Les calendriers…

<u>Année :</u> 2014-15

<u>Elèves :</u> Beauvallet Pierre, Jiang Léonie, Thomas Julie, élèves de 2de au lycée St Paul (Roanne), jumelé avec le lycée Jean Puy (Roanne)

<u>Enseignantes :</u> Mes Gotte, Kroll et Martinelli.

<u>Chercheur :</u> Mr Chardard, <u>chercheur</u> à l'université Jean Monnet à St Etienne.

Le Sujet :

Certains calendriers utilisent des cycles plus ou moins longs

- le calendrier grégorien utilise un cycle de 400 ans pour déterminer les années bissextiles
- le calendrier hébreu, utilise un cycle d'une durée de 19 ans.
- le calcul des éclipses dans l'antiquité utilisait un cycle de 18 ans et 11 jours appelé Saros

Les concepteurs des calendriers ont cherché à décrire le temps en utilisant 3 durées particulièrement frappantes :

- la durée du jour
- la durée d'un cycle des saisons (l'année)
- l'intervalle entre deux nouvelles lunes (environ 1 mois)

Tous les calendriers font apparaître des cycles assez longs.

Est-il possible de faire apparaître des cycles plus courts, tout en ayant des calendriers précis ?

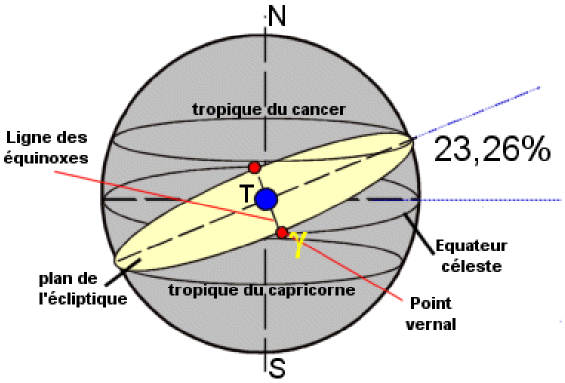
<u>Conjectures et résultats obtenus</u> : Nous avons constaté à l'aide d'un tableur qu'il existait des cycles plus ou moins longs qui permettaient d'avoir des calendriers assez précis.

Ensuite à l'aide des fractions continues, nous avons commencé à démontrer qu'il était possible de trouver des cycles conduisant à des calendriers de plus en plus précis.

Le début de nos recherches s’est fait sur internet ainsi que sur des livres (cf bibliographie). Nous avons tout d’abord cherché quelles mesures permettaient de définir la longueur d’une année du point de vue astronomique.

Notions de base :

- Si on considère la direction du point vernal de la date (équinoxe de printemps), la Terre mettra 365 jours 5h 48m 45s pour revenir dans la direction de ce point. C'est une durée différente de l'année sidérale puisque le point vernal a bougé pendant que la Terre tournait... On appelle cette durée l'année tropique.
- L'équinoxe a lieu lorsque le soleil traverse le plan orthogonal au plan de rotation de la Terre (et passant par le centre de la Terre). Lorsque ce passage se fait du sud vers le nord (ce qui correspond au printemps dans l'hémisphère nord), la position du soleil à l'équinoxe est appelée point vernal. Ce n'est pas le fait que la Terre tourne qui modifie le point vernal mais le fait que l'axe de rotation change, un phénomène appelé précession des équinoxes (ou plus rarement du point vernal). Ce changement est très faible, de l'ordre de 1/72e de degré par an.



Le plan de l'équateur et le plan de l'écliptique font un angle de 23° 26'.Le point vernal marque l'endroit où l'écliptique coupe l'équateur céleste.Il est exprimé par la lettre gamma.Le point vernal coïncidait autrefois avec le début de la constellation du Bélier (symbolisé par la lettre gamma) aux environs du IIème siècle avant J.C .
Actuellement il ne se situe plus sur 0° du Bélier, mais dans la constellation des Poissons, et prochainement dans celle du Verseau (voir plus loin les explications sur le précession des équinoxes)

- La valeur de l’année tropique est estimée à 365 jours 5h 48m 45s soit 365,2421905162 jours.
- La plupart des calendriers ont pour but de se rapprocher le plus possible de cette valeur pour éviter un décalage des saisons. Nous avons donc décidé de nous baser sur cette valeur pour calculer les écarts entre différents calendriers solaires.

Nous nous sommes ensuite concentrés sur une approche historique en découvrant différents calendriers utilisés au cours du temps. En effet : dans les différentes civilisations, les calendriers utilisés sont différents.

Le Calendrier Julien :

En Europe, le calendrier julien fut introduit par César en -45. L’année julienne dure en moyenne 365,25 jours soit 3 années de 365 jours et une quatrième de 366 jours (année dite bissextile). On voit donc apparaitre un **cycle de 4 ans.**
L’écart entre l’année julienne et l’année tropique est donc de 0,0078094838 jour par an .
En 1582, il était décalé de dix jours par rapport au Soleil. Il en résultait un déplacement de plus en plus important vers l'été de la date de Pâques, fête du printemps et du renouveau.
Il fut donc remplacé par le calendrier grégorien à la fin du XVIe siècle : c'est le 5 octobre 1582 (calendrier julien) que le pape Grégoire XIII décida que ce jour serait le 15 octobre 1582 (calendrier grégorien) .

Le Calendrier Grégorien :

C’est notre calendrier actuel. Il est composé de 3 années de 365 jours suivies d’une année bissextile de 366 jours sauf les années divisibles par 100 qui doivent être aussi divisible par 400 pour être bissextile. On voit donc apparaitre **un cycle de 400 ans.**

Ex: L'année 2200 ne sera pas bissextile alors que l'année 2400 le sera.

L'année grégorienne dure en moyenne = 365,2425 jours.
Aujourd'hui le calendrier grégorien s'est imposé dans la majeure partie du monde.

Le Calendrier Perse :

Le calendrier perse quant à lui existe depuis l'Antiquité mais a beaucoup évolué. C'est en 1925 que le calendrier dans sa forme actuelle devint officiel en Iran, en 1957 en Afghanistan. Ce calendrier est aussi en usage dans les régions voisines, notamment dans les parties kurdes de la Mésopotamie. Il est bien plus précis que le calendrier grégorien, en effet on constate qu'avec notre calendrier, 1 jour est perdu tous les

33 000 ans contre 1 tous les 123 987 ans avec le calendrier perse. (1)

La durée moyenne de l'année perse est de 365,24219858156 j

Ce calendrier ce compose comme ci-dessous:

On a donc **un cycle de 2 820 années** dont 683 sont bissextiles. (2)

<table>
<tr><td rowspan="5">2 820 ans</td><td rowspan="2">21 × 128 ans</td><td>1 × 29 ans</td></tr>
<tr><td>3 × 33 ans</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1 × 132 ans</td><td>1 × 29 ans</td></tr>
<tr><td>2 × 33 ans</td></tr>
<tr><td>1 × 37 ans</td></tr>
</table>

Finalement, on peut remarquer que parmi les 3 calendriers étudiés, le plus précis est le calendrier perse mais c'est aussi celui qui fait intervenir le cycle le plus long.
En effet avec une moyenne de 365,24219858156 j, c'est le plus proche de l'année tropique. Une année julienne fait en moyenne 365,25 j pour un cycle de 4 an et une année grégorienne, en moyenne 365,2421 j, avec un cycle 400 ans. Suite à cela, nous nous sommes interrogés sur l'existence d'autres cycles possibles. (3)

Calcul des écarts :

Nous avons donc commencé par rechercher les formules permettant de calculer les écarts entre les différentes années et l'année tropique.

Voici ce que nous avons finalement trouvé (avec A représentant la moyenne d'une année tropique) :

Année julienne : $\frac{(365-A)\times 4+1}{4}$ *On rajoute 1 journée tous les 4 ans*

Année grégorienne: $\frac{(365-A)\times 400+97}{400}$ *On rajoute 97 journées tous les 400 ans*

Année perse: $\frac{(365-A)\times 2820+683}{2820}$ *On rajoute 683 journées tous les 2820 ans*

Ces calculs d'écart nous ont servis de pistes car notre but était d'avoir l'écart le plus petit possible afin d'être au plus près de l'année tropique. Nous avons donc cherché d'autres écarts possibles sur des cycles de n années :

Notre hypothèse de départ était que nous récupérions 1 jour dès que l'écart total avec l'année tropique dépassait 24h. Ainsi la formule rentrée dans le tableau pour la 2^{e} colonne est : pour la cellule C2 :

=ENT(B2*écart)   ou écart représente l'écart entre le durée de l'année tropique et l'année de 365j

A	B	C	D	E
1	Années	Jours récupérés	Ecart moyen par an	Ecart total
2	1	0	-0,242190516	-0,24219052
3	2	0	-0,242190516	-0,48438103
4	3	0	-0,242190516	-0,72657155
5	4	0	-0,242190516	-0,96876206
6	5	1	-0,042190516	-0,21095258
7	6	1	-0,07552385	-0,4531431
8	7	1	-0,099333373	-0,69533361
9	8	1	-0,117190516	-0,93752413
10	9	2	-0,019968294	-0,17971465
11	10	2	-0,042190516	-0,42190516
	29	7	-0,000811205855	-0,023525
…	50	12	-0,002190516	-0,10952581
	60	14	-0,008857183	-0,53143097
	70	16	-0,013619088	-0,95333613
	90	21	-0,008857183	-0,79714646
	91	22	-0,000432274	-0,03933697
	92	22	-0,003060081	-0,28152749
	128	31	-0,000003016200	-0,0003861
	97	23	-0,005077114	-0,49248007

On voit par exemple que sur un cycle de 128 ans, si nous rajoutons 31 jours l'écart par an avec l'année tropique est très petit : de l'ordre de 3.10^{-6} jours . Nous remarquons alors que nous retrouvons régulièrement de petits écarts.

Pour l'expliquer le chercheur Mr Chardard nous demande de faire quelques recherches sur le principe des tiroirs.

Le principe des tiroirs : (4)

En mathématiques, le principe des tiroirs, affirme que si n chaussettes occupent m tiroirs, et si n > m, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette.

Autre exemple possible : si on supposait que les habitants d'une ville ont entre 0 et 2 millions de cheveux, et dans cette ville où il y ait plus de 2 millions d'habitants, il y aurait forcément deux personnes qui auraient le même nombre de cheveux.

Avec ce principe nous voulions démontrer qu'il y a des écarts plus petits qui se répètent régulièrement, mais nous n'avons pas réussi à faire le parallèle.

Le chercheur nous a alors parlé d'une autre possibilité pour trouver des cycles, c'est d'utiliser une approximation par des fractions.

Les fractions continues :

En mathématiques, une fraction continue ou fraction continue simple est une expression de la forme :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}.$$

Comportant un nombre fini (pour les nombres rationnels) ou infini d'étages (pour les irrationnels).
On montre qu'on peut « représenter » — en un sens qui sera précisé — tout nombre réel sous forme d'une fraction continue, finie ou infinie, dans laquelle a_0 est un entier relatif et les autres a_i sont des entiers strictement positifs.

Avec la longueur de l'année tropique : 365,2421905162 que nous appellerons A :

A = 365 + 0,2421905162 donc a_0 = 365 et $\frac{1}{a'_1} = 0{,}2421905162 \Leftrightarrow a'_1 = \frac{1}{0{,}2421905162}$

donc on obtient $365+\frac{1}{4}$ en première approximation. (utilisée pour le calendrier Julien).

Ensuite on réitère le procédé :

$a'_1 = \frac{1}{0{,}2421905162} = 4 + 0{,}1289808358$ donc $a_1 = 4$ et $\frac{1}{a'_2} = 0{,}1289808358 \Leftrightarrow a'_2 = \frac{1}{0{,}1289808358}$

Ensuite on réitère le procédé :

$a'_2 = \frac{1}{0{,}1289808358} = 7 + 0{,}753089782$ donc $a_2 = 7$ et $\frac{1}{a'_3} = 0{,}753089782 \Leftrightarrow a'_3 = \frac{1}{0{,}753089782}$ ....

Par exemple si on s'arrête à cette étape : on peut dire que l'année tropique :

$A \approx 365 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}}$ soit $A \approx 365 + \cfrac{1}{\cfrac{29}{7}}$ soit $A \approx 365 + \frac{\boxed{7}}{\mathbf{29}}$

Plus on va loin dans le procédé meilleure est l'approximation de l'année tropique.

Nous retrouvons alors un résultat précédent : une assez bonne approximation de l'année tropique pourrait être un calendrier basé sur un cycle de **29** ans pour lequel on rajouterait $\boxed{7}$ jours donc 7 années bissextiles.

Si nous poussons la décomposition deux étapes plus loin, nous trouvons que $A \approx 365 + \frac{\boxed{31}}{128}$

Nous obtenons alors une meilleure approximation de l'année tropique pour un calendrier basé sur un cycle de **128** ans pour lequel on rajouterait $\boxed{31}$ jours donc 31 années bissextiles.

Nous retrouvons donc ici deux cycles qui apparaissaient déjà dans notre tableau de décalages.

Cette décomposition de la partie décimale de la valeur d'une année tropique a pour but de trouver une la décomposition d'un réel « compliqué », dans ce cas-là 365,2421905162 :

$$A \approx 365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{19+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4_4}}}}}}}$$

Puisque c'est long et répétitif : on a donc cherché un moyen de le calculer grâce au tableur sur Excel :

Nombre de départ	partie entière	partie décimale
365,242190516200	365	0,242190516200
4,128980835790	4	0,128980835790
7,753089781709	7	0,753089781709
1,327862924564	1	0,327862924564
3,050055145241	3	0,050055145241
19,977966204867	19	0,977966204866
1,022530221417	1	0,022530221417
44,384827894614	44	0,384827894614
2,598564225712	2	0,598564225712
1,670664495209	1	0,670664495209
1,491058505621	1	0,491058505621
2,036417226364	2	0,036417226364

Le but de cette recherche a été de trouver différents cycles avec leurs nombres de jours bissextiles.

En effet, en calculant la fraction $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}}$ obtenue,

le numérateur nous donnerait le nombre de jour bissextile et le dénominateur le nombre d'années.

Ne trouvant pas de moyen sur Excel d'afficher le résultat sous forme fractionnaire, nous avons calculé la faction a la main, obtenant ce résultat : $\frac{\boxed{31}}{128}$.

La fraction obtenue nous a permis de déterminer un cycle de **128** ans avec $\boxed{31}$ jours bissextiles.

La formule de son écart avec l'année tropique serait: ((365-Année T) x128+31)/128 ce qui donne $3{,}0162 \times 10^{-6}$ jours.

Il est donc un peu plus précis que le calendrier perse dont l'écart est de $3.419560284 \times 10^{-6}$ jours et surtout le cycle du calendrier perse est beaucoup plus long.

Nous pourrions avec ce calendrier faire apparaître des cycles plus courts: 128 années pour 31 jours bissextiles. On peut donc observer qu'il est beaucoup plus court que notre calendrier actuel qui fait apparaître des cycles de 400 ans et surtout beaucoup plus précis, évitant ainsi un décalage trop important au fil des années.

Nous aurions pu continuer à approfondir notre recherche en prenant pour base de départ une fraction encore plus précise, pour obtenir un écart encore plus petit et peut-être des cycles plus intéressants et plus courts mais nous avons manqué de temps.

Notes d'édition :

(1) Le nombre d'années nécessaires pour obtenir un décalage d'une journée dans le calendrier grégorien est erronée. Il est en fait d'environ 3200 ans.

(2) Les années bissextiles se répartissent de la manière suivante au sein des différents cycles du calendrier perse :

2 820 ans	21 × 128 ans	1 × 29 ans	années bissextiles : n° 5, 9, 13, 17, 21, 25 et 29.
		3 × 33 ans	années bissextiles : n° 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29 et 33 (pour chacune des 3 périodes).
	1 × 132 ans	1 × 29 ans	années bissextiles : n° 5, 9, 13, 17, 21, 25 et 29.
		2 × 33 ans	années bissextiles : n° 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29 et 33 (pour chacune des 2 périodes).
		1 × 37 ans	années bissextiles : n° 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33 et 37.

Dans Wikipedia. Récupéré le 22 juillet, à partir de http://fr.wikipedia.org/wiki/Calendrier_persan

(3) La durée moyenne d'une année grégorienne mentionnée à la fin de la partie sur le calendrier perse n'est pas 365,2421 jours mais 365,2425 jours.

(4) Dans la mesure où la partie sur le principe des tiroirs n'apporte aucun résultat et que le rapport au problème n'a pas été compris par les élèves, il pourrait être envisageable de l'enlever.