Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Le mancala

Année 2014 - 2015

Paul PELLISSIER, Jasper MEYER, Virgile MOCQUAT élèves de première S
Corentin MARTIN, Léo JOLY élèves de seconde
CUIBUS Mihnea, ILE Andrei, RETE Catalina, REVNIC Iulia, RADOI Radu, CICEO Ioana, élèves de IX et XI

Etablissements : Colégiul National Emil Racovita de Cluj (Roumanie), Lycée d'Altitude de Briançon

Enseignants : Valentina VASILESCU, Adrian ANDREA, Ariana-Stanca VACARETU,
Hubert PROAL, Mickaël LISSONDE

Chercheurs, chercheuse : Camille PETIT (Université de Fribourg) et Yves PAPEGAY (INRIA-Sophia Antipolis), Adela LUPESCU (Universitatea Bades-Bolyai de Cluj-Napoca)

Présentation du sujet

Comprendre comment on peut formaliser le déroulement d'une partie de mancala dans le but de le programmer, et comment l'on définit des stratégies pour implémenter le comportement d'un joueur.

Résultats obtenus

Des règles pour pouvoir programmer sur une machine.

Valorisations des travaux

Présentations lors de la semaine des maths à Briançon (mars 2015)
Présentation lors du « Forum of the math research projects » à Cluj-Napoca (mars 2015)
Exposé commun lors du congrès *MATh.en.JEAN'S* à l'Université d'Avignon (mars 2015)
Présentation lors du « Math Youth Forum » à Cluj-Napoca (mai 2015)Présentations lors du forum PASS à Aix-en-Provence (juin 2015)

Présentation franco roumaine lors du congrès MeJ d'Avignon

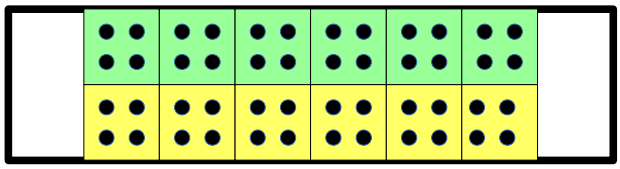
Texte de l'article

Sujet :

Il existe autant de variantes de règles à ces jeux que de tribus en Afrique. On choisit d'utiliser les règles suivantes :

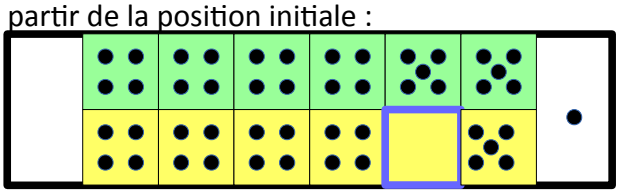
■ Le jeu se joue sur un plateau de deux fois six cases (avec deux greniers de chaque côté) avec des graines. Le but du jeu est d'avoir le plus de graines dans son camp (une des rangées de six cases) et dans son grenier à la fin de la partie. La partie se termine lorsqu'un des deux joueurs n'a plus de graine dans son camp.

■ Au début du jeu, chaque case contient quatre graines, les deux greniers sont vides.



Position de départ, le grenier de droite appartient au joueur jaune et celui de gauche au joueur vert.

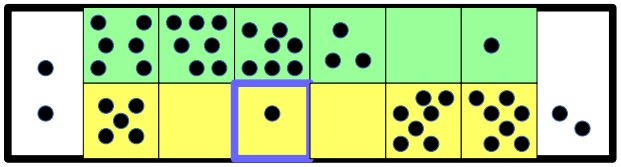
■ Chaque joueur, à son tour, choisit une case dans son camp qui contient au moins une graine. Il prend les graines de cette case et les distribue une par une dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, en passant éventuellement par son grenier (à sa droite). Voici un exemple de coup joué à partir de la position initiale :



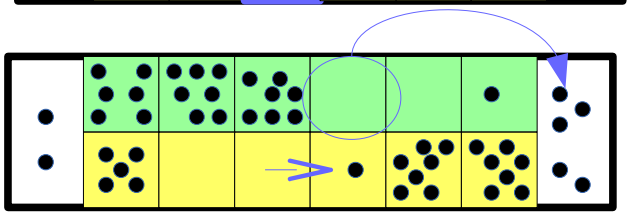
La case encadrée est vidée, les 4 graines qu'elle contenait sont distribuées, une par case.

■ Si la dernière graine est déposée dans le grenier, le même joueur rejoue.

■ Si la dernière graine est placée dans un trou vide du camp du joueur, alors il capture les graines du trou correspondant (opposé) et les place dans son grenier. Exemple de capture, avant et après.



Exemple de situation de jeu où la case encadrée va être jouée.



Sa graine est distribuée dans la case voisine qui était vide. Donc les 3 graines du trou opposé sont capturées et mises dans le grenier.

Comprendre comment on peut formaliser le déroulement d'un tel jeu dans le but de le programmer, et comment l'on définit des stratégies pour implémenter le comportement d'un joueur.

Jeu sur ordi : http://www.bambousoft.com/jeux/Mancala.html

Pour faciliter la compréhension du texte ci-après, nous codifions le plateau de jeu du mancala de la manière suivante. C'est le joueur jaune qui commence. Un coup J3 par exemple veut dire que le joueur jaune joue la case 3.

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	4	4	4	4	
	4	4	4	4	4	4	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

I. Stratégies empiriques

Le mancala est un jeu vraiment complexe. Après avoir analysé les options possibles pour chaque joueur, nous avons développé quelques stratégies qui peuvent assurer la victoire au premier joueur. C'est effectivement presque impossible pour le deuxième joueur de gagner contre nos stratégies.

En terme de la théorie des jeux, le mancala a un nombre fini de situations qu'il peut atteindre(1).
Le jeu a une solution c'est-à-dire qu'il n'y a pas de partie avec un nombre infini de coups.
Le mancala ressemble au jeu d'échecs ; la différence concerne les dimensions de l'arbre de jeu (nombre des situations). Les échecs ont 10^{120} situations possibles (le nombre de Shannon), tandis que le mancala n'en a que 10^{7}. Pour calculer approximativement ce nombre, on considère qu'en moyenne, une partie est composée de 30 coups avec 4 options à chaque coups. On obtient 4^{30}, soit plus de 10^{7} situations possible.
Nos recherches ne nous ont pas permis de trouver une stratégie générale permettant à un joueur de gagner à tous les coups mais nous avons dégagé des stratégies empiriques qui lui fournissent des avatanges sur le concurrent.

Le meilleur mouvement débutant

Après avoir beaucoup joué, tous les joueurs réalisent que le meilleur mouvement pour commencer est de bouger les graines de la case J3, et puis J6 (2).
Analyse des options : bouger les graines du cas J1 et J2 est inutile, parce qu'il n'y aura aucun avantage. J3, J4, J5, J6, tous offrent la possibilité de placer une graine dans le grenier, mais justement J3 offre un mouvement supplémentaire. Alors il y aura la situation suivante :

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	4	4	4	4	1
	4	4	0	5	5	5	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

De nouveau, on prend en considération les trois dernières cases parce qu'elles sont les seules qui mettent une graine dans le grenier. La raison pour laquelle nous choisissons J6 est d'avoir une case libre ce qui nous offre la possibilité d'utiliser le mouvement spécial pour capturer tous les graines de l'adversaire.

De plus, le grain qui tombe dans la case J6 peut être bougé dans le grenier facilement. Le joueur reçoit ainsi un mouvement supplémentaire.

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	5	5	5	5	2
	4	4	0	5	5	0	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

Les stratégie empiriques

Être le premier joueur est une précieuse opportunité parce qu'il permet au joueur d'avoir le contrôle du développement du jeu. Il y a quelques situations élémentaires qui ne doivent pas être oubliées :

- *« Capture »* - bouger un grain dans une case libre pour capturer tous les grains dans la case opposée. Simple, mais très efficace. Ce mouvement peut forcer l'adversaire à faire des mouvements défensifs.
- *« Boucle capture »* - un mouvement spécial de capture dans lequel le dernier grain bougé tombe dans une case libre mais à la gauche de la case avant le déplacement. Ce mouvement demande d'avoir au moins 7 grains dans la case choisie(3), pour faire une rotation complète. Nous devons planifier pour surprendre l'adversaire.
- *« La collection »* - ne pas bouger les grains dans une case, par conséquent en accumuler beaucoup . Les cases en milieu de plateau comme J3 ou J4 sont idéales pour ce mouvement. Cette case peut être utilisée comme un appât. C'est parfois un prérequis pour la stratégie « Boucle capture »

Stratégie de famine

C'est la meilleure stratégie pour le premier joueur. Il utilise le mouvement « collection » et les deux mouvements débutants que nous avons présentés : J3+J6. Le jeu peut se finir très rapidement, parce que le deuxième joueur ne possède plus de grains.
Pour le deuxième joueur, c'est très difficile de combattre cette stratégie. Il doit utiliser le mouvement « capture » pour menacer les grains collectés par l'adversaire.

II. Élaboration de règles

Après avoir passé plusieurs séances à jouer au jeu pour s'habituer et suite à un séminaire avec nos collègues de Turin, nous avons essayé de déterminer des « poids » (4) selon plusieurs critères. Ces règles sont une première ébauche que nous avons améliorée par la suite.

Règle 1 : pouvoir rejouer rapporte **5 points**
Règle 2 : **1 point** par pion mis dans le grenier
Règle 3 : si on donne la possibilité à l'adversaire de rejouer alors **-2 points**
Règle 4 : forcer l'adversaire à jouer (en vidant une case et en pouvant le coup d'après y venir dessus) **1 point**
Règle 5 : si on prend des pions à l'adversaire **2 points par pions pris**
Règle 6 : enlever la possibilité de nous prendre des pions : **1 point par pion sauvé**
Règle 7 : pouvoir rejouer le prochain coup sans compter un futur coup de l'adversaire : **1 point**

Exemple de règle 6

Nous partons de la situation suivante, c'est aux jaunes de jouer.

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
6	4	4	0	4	2	5	1
	4	0	5	1	6	6	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

S'ils ne font pas attention, le coup d'après, les verts peuvent jouer V5 et récupérer les pions de J3. Par contre, si les jaunes jouent J3, J5 ou J6, ils empêchent les verts de prendre 5 pions. D'après la règle 6, les trois coups jaunes ci-dessus vont rapporter 5x1=5 points.

III. Evolution du jeu au départ

Pour établir nos règles, nous sommes partis de la position de départ, les jaunes commencent :

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	4	4	4	4	
	4	4	4	4	4	4	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

Si **J1 est joué** alors nous arrivons à la position ci-dessous qui rapporte -2 points d'après la règle 3.

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	4	4	4	4	
	0	5	5	5	5	4	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

Si **J2 est joué**, nous obtenons la situation ci-dessous qui rapporte aussi -2 points (règle 3).

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	4	4	4	4	
	4	0	5	5	5	5	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

Si **J3 est joué**, alors nous rejouons car on finit dans notre grenier, nombre de points =+5 (R1)+1 (R2)=6.

Remarque : pour le coup J3, la règle n°3 ne s'applique pas car le joueur doit rejouer. La suite de J3 est ci-dessous.

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	4	4	4	4	1
	4	4	0	5	5	5	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

Il y a 5 sous-cas possibles après avoir joué J3 :

- Jouer J1 (-2 points)

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	4	4	4	4	1
	4	4	0	5	5	5	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

	V1	V2	V3	V4	V5	V6		
	4	4	4	4	4	4	1	-2
	0	5	1	6	6	5		J1
	J1	J2	J3	J4	J5	J6		

- Jouer J2 (-2 points)

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	4	4	4	4	1
	4	4	0	5	5	5	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

	V1	V2	V3	V4	V5	V6		
	4	4	4	4	4	4	1	-2
	4	0	1	6	6	6		J2
	J1	J2	J3	J4	J5	J6		

- Jouer J4 (-3 points)

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	4	4	4	4	1
	4	4	0	5	5	5	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

	V1	V2	V3	V4	V5	V6		
	4	4	4	4	5	5	2	-3
	4	4	0	0	6	6		J4
	J1	J2	J3	J4	J5	J6		

- Jouer J5 (0 point)

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	4	4	4	4	1
	4	4	0	5	5	5	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

	V1	V2	V3	V4	V5	V6		
	4	4	4	5	5	5	2	0
	4	4	0	5	0	6		J5
	J1	J2	J3	J4	J5	J6		

- Jouer J6 (0 point)

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	4	4	4	4	1
	4	4	0	5	5	5	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

	V1	V2	V3	V4	V5	V6		
	4	4	5	5	5	5	2	0
	4	4	0	5	5	0		J6
	J1	J2	J3	J4	J5	J6		

Si **J4 est joué**, +1(R2)-2(R3)=-1 point.

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	4	4	4	5	1
	4	4	4	0	5	5	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

Si **J5 est joué**, +1(R2)-2x2(2 fois R3)+1(R4)=-2 points.

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	4	4	5	5	1
	4	4	4	4	0	5	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

Si **J6 est joué**, +1(R2)-2(R3)+1(R4)=0.

En effet, si l'adversaire ne vide pas son grenier en V6, nous sommes en mesure, en jouant J2 de lui prendre 5 pions.

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
	4	4	4	5	5	5	1
	4	4	4	4	4	0	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

Finalement nous avons 10 aboutissements possibles au premier coup et c'est la combinaison J3 suivie de J5 ou J6 qui semble la meilleure (selon nos critères).

Notre chercheur nous avait fait un programme qui calcule notre score pour chaque coup (ce qui est très pratique) mais nous ne sommes pas arrivés à le modifier quand nous changions nos règles.

IV. Améliorations des règles

Lors du séminaire par vidéo-conférence avec nos collègues roumains et en discutant entre les groupes de seconde et de première, nous avons modifié certaines de nos règles :

Règle 1.1 : pouvoir rejouer rapporte 10 fois le n° de la case que l'on vide.
Par exemple : si en vidant la case J2 ou la case J6 on peut rejouer (c'est-à-dire 5 pions en J2 et 1 pions en J6) alors le coup J2 va « peser » 2x10=20 points et le coup J6 va peser 6x10=60 points.
Après plusieurs propositions, nous arrivons à ces règles générales.

Règle G1 : La case permet de rejouer alors, si elle est à droite d'UNE CASE PERMETTANT la capture ou l'empêchement de la capture alors le nombre de points est égal au numéro de la case fois 100, sinon 7 points.
Règle G2 : La case permet de capturer ou empêcher la capture= +3 fois le nombre de pions à capturer ou à perdre.
Règle G3 : La case empêche l'adversaire de rejouer = +1 point.
Règle G4 : En cas d'égalité, on joue la case qui donne le moins de pions possible à l'adversaire et s'il y a encore égalité alors on joue la case la plus à droite.

Exemples de situations :

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
17	2	2	1	4	3	0	10
	0	2	4	0	2	1	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

J2 → +3x5(G2)+1(G3)=16
J3 → 7 (G1)=7, la case permet de rejouer mais elle est à gauche de J4 qui permet la capture
J5 → +5x100(G2)=500
J6 → +6x100(G2)=600
Donc on joue J6, J5 puis J2

Autre exemple :

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
?	2	0	5	2	1	3	?
	0	10	0	6	4	1	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

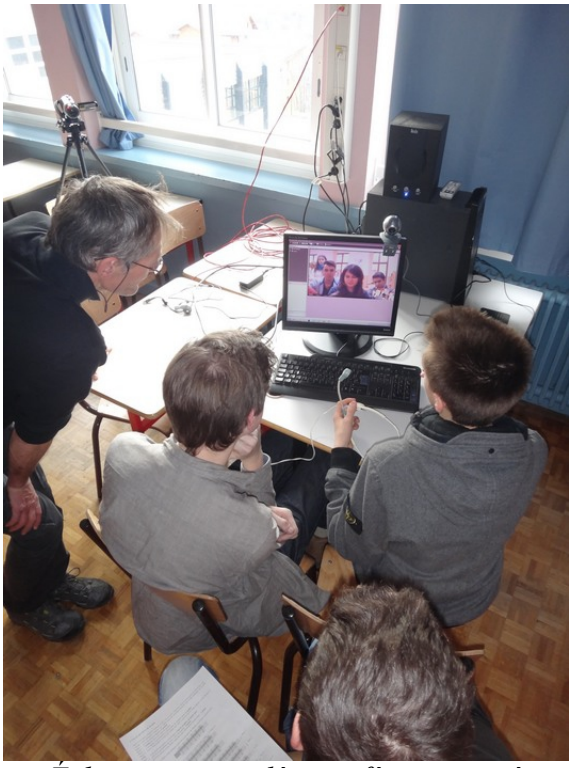
J2 → 3x10(G2)=30
J4 → 3x10(G2)=30, quand on joue la case 4, on leur rajoute un pion en V4. Du coup, le camp adverse ne peut plus capturer les pions de J2.
J5 → 0
J6 → 6x100(G1)=600
Finalement on joue J6 puis J4 car d'après G4 c'est le coup J4 qui donne le moins de pions à l'adversaire.

Un dernier exemple :

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
?	0	1	0	20	5	0	?
	10	0	0	4	0	2	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

J1 → 3x10(G2)+1(G3)=31
J4 → 0
J2 → 0
On joue J1.

Malheureusement nous n'avons pas programmé nos règles pour les tester face à une machine.

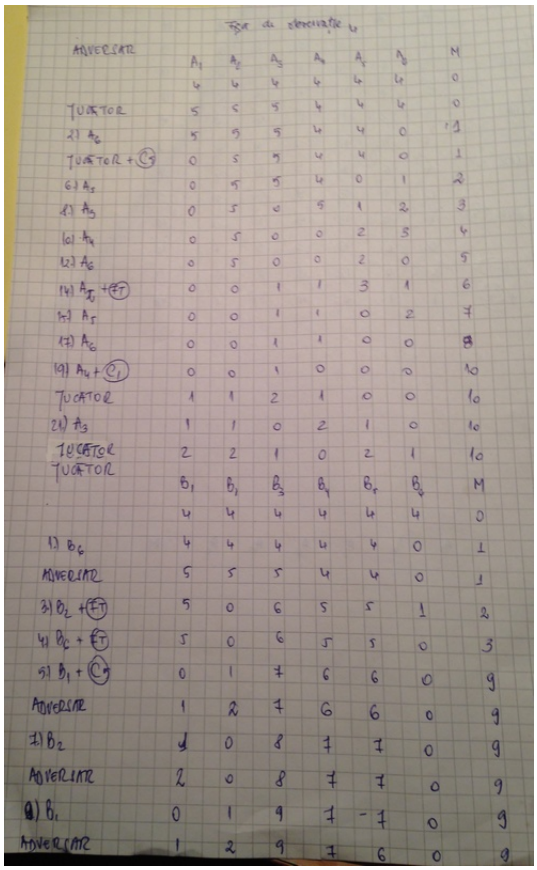


Échanges par vidéo-conférence, côté Briançon

Échanges par vidéo-conférence, côté Cluj

V. Autre démarche « statistique »

Pour commencer, nous avons joué plusieurs fois au mancala et nous avons fait des fiches d'observation pour trouver des règles qui peuvent aider le joueur à gagner. Nous en avons déduit qu'il n'importe pas qui commence, mais le joueur doit être très attentif et voir aussi les mouvements de l'adversaire avant de décider quelle tactique est la meilleure pour chaque situation.



Extrait de cahier d'expérimentation des élèves de Cluj

Aux stratégies déjà mentionnées précédemment, nous rajoutons le LOOPING qui consiste à entourer la partie adverse pour arriver avec la dernière graine dans une case du territoire de l'adversaire, opposée à une case de l'adversaire contenant un grand nombre de graines. Le nombre de graines doit être grand parce que pendant le looping le territoire de l'adversaire est peuplé de cinq graines. Toutefois cette stratégie est un peu compliquée à mettre en œuvre.

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	
?	8	5	3	2	3	5	?
	0	1	0	1	2	8	
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	

Exemple de LOOPING

Si le jaune joue J6, il va récupérer 9 pions de V1 en arrivant à J1.

Une autre démarche a été d'essayer d'analyser la stratégie d'une personne qui joue au Mancala pour la première fois. Nous avons fait une étude à laquelle ont participé des personnes de tous âges, en confrontant deux personnes du même âge, mais aussi deux personnes entre qui il y a une grande différence d'âge. Pour chaque jeu, l'une des personnes a reçu un ensemble de conseils et idées qui pourraient l'aider à gagner le match, tandis que l'on a laissé l'adversaire à réfléchir seul à ses mouvements.

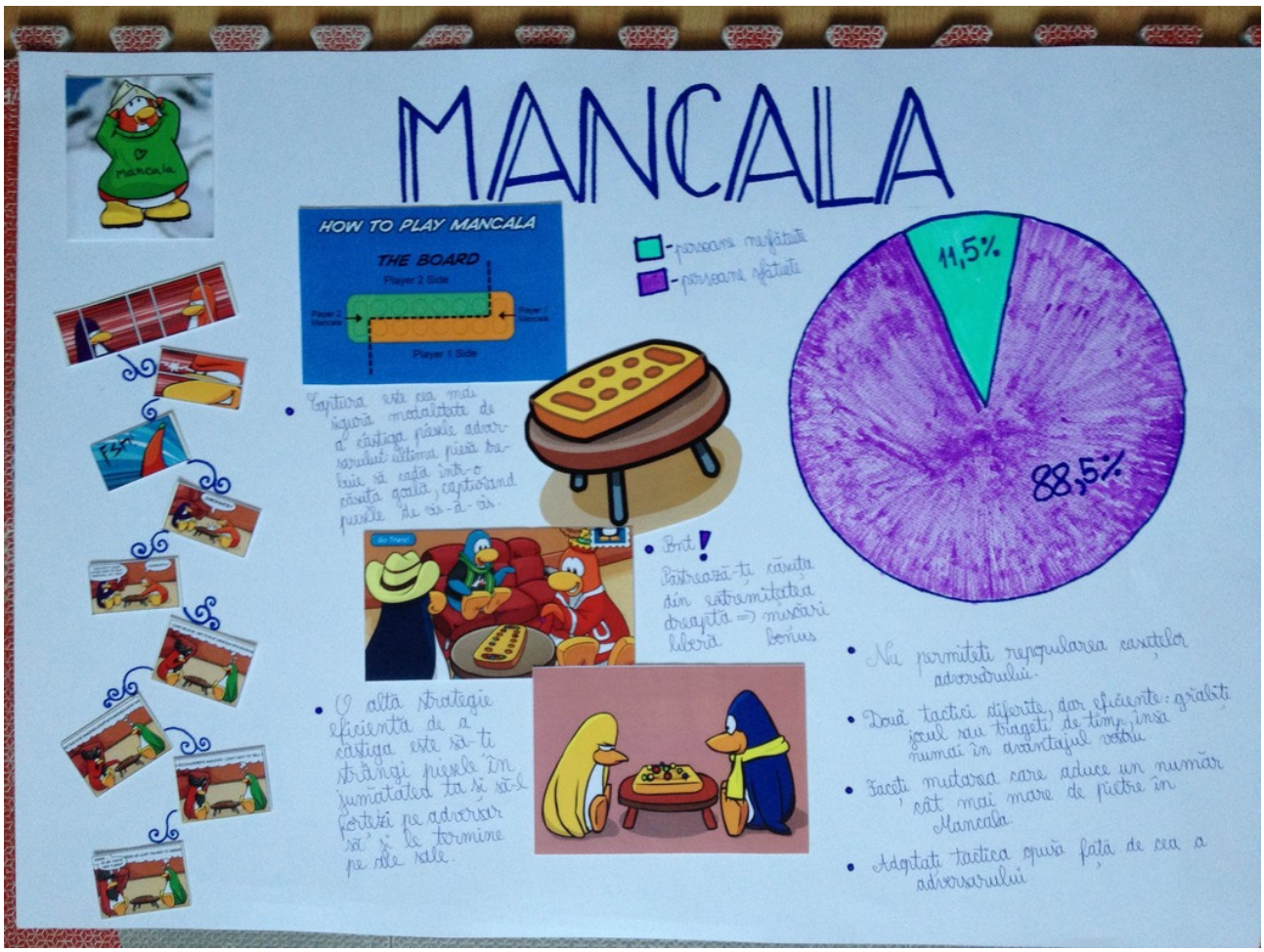
Après plusieurs matchs joués par chaque paire, nous avons remarqué que le joueur auquel nous avions donné des conseils, avant et pendant le jeu, a obtenu les meilleurs résultats. Après une

étude statistique, nous avons remarqué que les participants trouvaient leurs propres stratégies, mais pendant les premières parties du jeu, celui qui connaissait les idées déjà présentées, était plus avantagé.
87% des matchs ont été gagnés par les joueurs qui connaissaient nos stratégies et seulement 13% ont été gagnés par ceux qui avaient leurs propres stratégies.

Une autre question posée par la statistique c'était de savoir combien de joueurs qui n'avaient pas été conseillés ont réussi à trouver des stratégies efficaces, similaires à celles fournies à l'adversaire, quelque soit le résultat final du jeu. Ce qui est étonnant c'est que près de la moitié d'entre eux ont réussi à développer leur propre plan de jeu et certains d'entre eux ont gagné le jeu. (5)

Vous pouvez télécharger des documents et simulations sur ce sujet sur le site http://www.informathiques.fr/MeJ.html de Yves Papegay.

Notes d'éditions
(1) C'est ce qu'on appelle un jeu à « information complète » ; en effet on peut établir la liste de toutes les parties possibles
(2) C'est le joueur A qui entame la partie
(3) Ne serait ce pas plutôt 13 grains qui sont nécessaires au minimum pour ce « coup »
(4) Il s'agit ici d'évaluer (pour les comparer) les stratégies. Pour cela, on associe à chaque « état du jeu » (lorsque l'un des joueurs s'apprête à jouer), un nombre de points qui se calcule comme indiqué ensuite. Remarquez que le nombre de points dépend de la décision que le joueur, qui va jouer, va prendre et des possibilités qui lui sont offertes par l'état du jeu à cet instant.
(5) Remarque générale sur cet article : le sujet proposé n'est pas simple ; on constate que trouver des énoncés raisonnables, comme conjecture ou à démontrer est difficile. Peut-être le chercheur en connaissait-il. Programmer une stratégie se révèle ardu. Ce n'est pas souvent les cas pour des sujets « MeJ ». On voit malgré tout que les élèves ont fait un gros travail en essayant d'analyser ce qui se passait lors des parties de Mancala. Et ils en ont fait un article intéressant. Merci à elles, merci à eux.



Poster des élèves de Cluj