5 disques et un rectangle
Année 2015-2016

Elèves (6ème et 4ème):
Nino ZANFONATO, Valentin CHARTIER, Mathias GOULEVANT, Margaux MENARD, Robin LEMEURE, Keila FONROSE, Lennie-Lou POIRIER, Lola PUYGRENIER.

Etablissements :
Collège Jean ROSTAND de la Rochefoucauld (16110)
et le collège Eugène DELACROIX de Saint Amant de Boixe (16330).

Enseignants :
MM Christelle ROBUCHON, MM Caroline KEMPF,M. Jean-Guy PETIT, M. Frédéric GINESTE.

Chercheur :
M. Nicolas JAMES, université de Poitiers

Problématique:

Peut-on mettre 5 disques de 1 cm de rayon dans un rectangle de 8 cm par 3,33 cm sans chevauchement ?

Etude :

Au début nous faisons des figures sur papier et remarquons que ce n'est pas précis. Il est donc difficile de répondre à la problématique. (fig1)

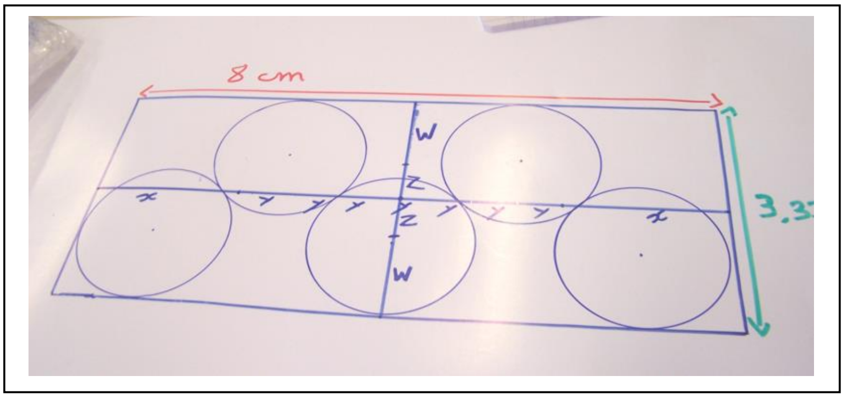


Fig1

Nous essayons ensuite sur Géogébra, la construction avec ce logiciel semble nous dire que la réponse à la problématique est « oui ».(fig2)

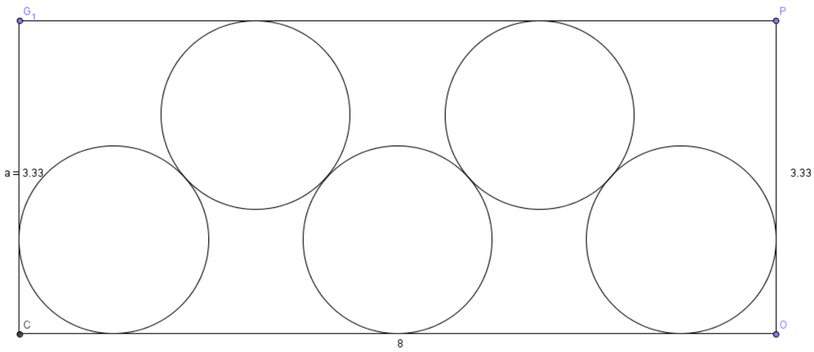


Fig2

Nous conjecturons que l'on peut mettre 5 disques de 1 cm de rayon dans un rectangle de 8 cm par 3,33 cm sans chevauchement.

Nous le démontrons par le calcul. (1)

Schématisation du problème : (fig3)
Nous prenons l'hypothèse que les disques rentrent dans le rectangle.

Nous cherchons alors à calculer la hauteur des disques. **(2)**
On se fixe la longueur qui est de 8 cm et nous recherchons la hauteur h.

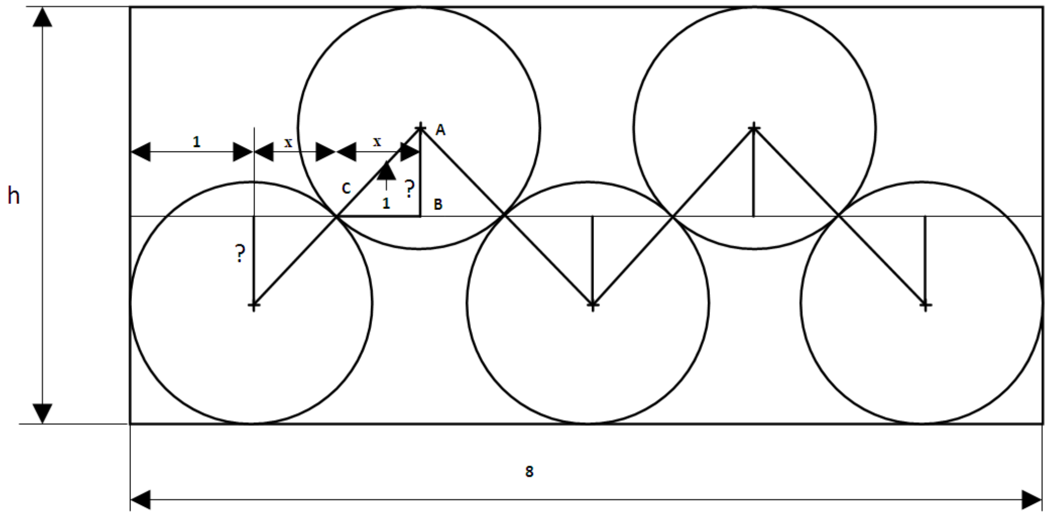


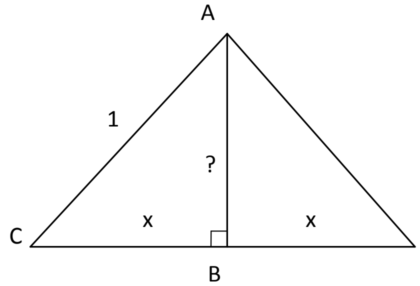
Fig3

Calcul de x : **(3)**
Il y a 8x + 1 + 1 dans la longueur 8 du rectangle donc 8x+2=8

Résolution de l'équation $8x + 2 = 8$

$8x + 2 = 8$
$8x + 2 - 2 = 8 - 2$
$8x = 6$
$\frac{8x}{8} = \frac{6}{8}$
$x = \frac{6}{8}$
$x = 0{,}75$ $\boxed{\text{Donc } x = 0{,}75 \text{ cm}}$

Calcul de AB :
-On calcule à présent la distance AB (écrit « ? » sur le schéma) grâce au théorème de Pythagore en se servant de x.



Le triangle ABC est rectangle en B, son hypoténuse est le côté AC. D'après le théorème de Pythagore :

$AC^2 = AB^2 + CB^2$

donc $AB^2 = AC^2 - CB^2$

$AB^2=1^2 - x^2$

$AB^2 = 1^2 - 0,75^2$

$AB^2 = 1 - 0,5625$

$AB^2 = 0,4375 = \frac{7}{16}$

$AB = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0,661$

Donc $AB = \frac{\sqrt{7}}{4}$ cm

Calcul de la hauteur h minimale de la boîte :

Pour cela on multiplie la distance AB par deux puis on ajoute deux fois le rayon du disque. (fig3)

$$h = 2 \times \frac{\sqrt{7}}{4} + 2 \times 1 = \frac{4+\sqrt{7}}{2} \approx 3,323$$

Donc $h \approx 3,323$ cm

Or 3,323 < 3,33

CONCLUSION : les cercles rentrent dans la boîte sans se chevaucher.

MAQUETTE 5 disques et un rectangle :

Notes d'éditions :

(1) Le principe de la démonstration est de supposer que la longueur du rectangle est fixe (8 cm), de prendre une configuration particulière et de chercher la « hauteur » (plus précisément la largeur) du rectangle.

(2) Il faut plutôt comprendre la hauteur (c'est-à-dire la largeur) du rectangle car le rayon du cercle est fixé dans la démonstration.

(3) L'inconnue x correspond à la demi distance entre les projections des centres de deux cercles consécutifs (comme expliqué sur la figure 3).