Le hasard peut-il nous mettre d'accord ?

Année 2020 – 2021

Élèves de 4ème : BRAULT Léo, COLLET—HAGLUND Malo, CRAUET Romain, JOLY Julien, OGUIEVETSKAIA—GAUTREAU Gaïa, TEMPIER Eugénie,
Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignante : FERRY Florence.
Chercheur : HACQUARD Olympio.

Le sujet : On considère une classe de 22 élèves. Au départ, chaque élève a un joueur de l'équipe de France préféré parmi la liste des 22 joueurs sélectionnés pour l'Euro de foot. Chaque jour, un élève E est choisi uniformément, au hasard (donc avec une probabilité de 1/22). On choisit alors uniformément, au hasard, un autre élève F (donc avec une probabilité 1/21) qui devient influencé par E : le joueur préféré de E devient le joueur préféré de F. Si les deux avaient initialement le même joueur préféré rien ne change. Les élèves finiront-ils tous un jour par aduler le même joueur ? Quand ?

Résultats : Nous avons commencé par traiter plusieurs exemples avec un petit nombre d'élèves pour conjecturer qu'ils se mettraient tous d'accord. Nous avons ensuite fait un programme en langage Python qui nous a permis de prendre des milliers d'exemples très rapidement et qui nous a fait penser que notre conjecture était vraie. Nous avons ensuite démontré cette conjecture en utilisant des arbres de probabilité, en commençant par un nombre réduit d'élèves.

Pour le temps qu'il faut pour que les élèves soient tous d'accord, nous avons trouvé une conjecture sans arriver à la démontrer.

I – Compréhension du sujet par l'exemple

Pour mieux comprendre le sujet, nous avons commencé avec un groupe de six élèves au lieu de vingt-deux. Pourquoi six ? Nous avons choisi six élèves pour faciliter la compréhension et voir si on obtenait un résultat interessant.

Nous avons décidé ensuite de représenter chaque élève numéroté de 1 à 6 qui supporte des joueurs numérotés également de 1 à 6 par la face d'un dé à 6 faces. On jette le dé une première fois : le nombre obtenu nous donne l'influenceur ; un deuxième lancer décidera du numéro de l'élève influencé. Si le même nombre est sorti deux fois, on relance le dé jusqu'à obtenir un nombre différent de celui obtenu au premier jet.

Voici deux de nos nombreux exemples obtenus : les élèves sont rangés au départ du premier au sixième et ne bougeront pas de place à chaque ligne. Le numéro marqué est celui du joueur adulé par l'élève. Le nombre en gras représente l'influenceur et celui souligné l'influencé. Lorsque nous obtenons une ligne identique à la précédente, on notera à la fin de la ligne le nombre de répétitions en indice inférieur. Ainsi, dans l'exemple 1, le joueur numéro 1 adule au départ le joueur 1 puis le joueur 2 en enfin le 5. Le premier jour, le joueur 6 va influencer le joueur 4.

Exemple 1

1 2 3 $\underline{4}$ 5 **6**
$\underline{1}$ **2** 3 6 5 6
2 2 $\underline{3}$ 6 **5** 6
2 2 5 $\underline{6}$ **5** 6 $_{2}$
2 $\underline{2}$ **5** 5 5 6
$\underline{2}$ 5 5 **5** 5 6 $_{3}$
5 5 5 5 5 $\underline{6}$ $_{5}$
5 5 5 5 5 5

Exemple 2

$\underline{1}$ **2** 3 4 5 6
2 $\underline{2}$ **3** 4 5 6
2 3 3 **4** 5 $\underline{6}$
2 3 $\underline{3}$ 4 **5** 4 $_{1}$
2 3 5 $\underline{4}$ 5 4
2 **3** $\underline{5}$ 2 5 4
$\underline{2}$ 3 3 2 **5** 4
$\underline{5}$ 3 3 2 5 **4** $_{2}$

$\underline{4}$ **3** 3 2 5 4 $_{1}$
3 3 3 $\underline{2}$ **5** 4 $_{3}$
3 3 3 $\underline{5}$ 5 **4** $_{1}$
3 3 **3** 4 $\underline{5}$ 4
3 3 3 $\underline{4}$ **3** 4 $_{4}$
3 **3** 3 3 3 $\underline{4}$ $_{3}$
3 3 3 3 3 3

Le nombre de répétitions augmente vers la fin mais nous avons remarqué que les joueurs finissent toujours par se mettre d'accord. Parfois c'est très long.
Nous avons donc fait une **conjecture** : les joueurs se mettent tous d'accord au bout d'un certain temps. Nous avons pu également faire deux remarques :

- Le premier jour, une opinion disparaît et ne réapparaîtra jamais.
- Lorsqu'une opinion disparaît, elle ne réapparaît plus.

II – Simulation de l'expérience

Lancer le dé était vraiment très long. Nous avons alors simulé cette expérience avec un programme en Python que vous pourrez retrouver en annexe de cet article. Après de très nombreux essais, réalisés avec ce programme, notre conjecture semblait se vérifier : les élèves arrivaient toujours à être tous d'accord !

Nous avons pu également calculer le temps moyen (en jours) pour que cela se produise.

Nous avons ensuite amélioré notre programme informatique et commencé à faire varier le nombre d'élèves : la conjecture semblait toujours vraie quelque soit le nombre d'élèves *n* au départ adulant *n* joueurs !

Voici les temps moyens pour que tous soient d'accord que nous avons trouvés avec le programme :

Nombre d'élèves au départ	Moyenne du nombre de jours (arrondie) pour que tous soient d'accord
2	1
3	4
4	9
5	16
6	25
8	49
10	81
15	196
20	360
22	437

En regardant de plus près les résultats et en essayant de trouver un lien avec le nombre d'élèves, nous avons remarqué que les temps moyens évoluent en étant proches de $(n-1)^2$ (pour $n > 1$, n étant le nombre d'élèves au départ), sans qu'on ait pu trouver une formule précise ni le démontrer.

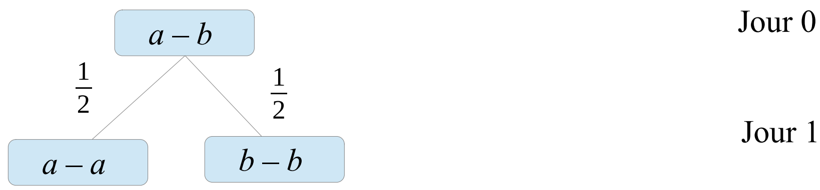
Remarque : Dans la suite de l'article, ce premier jour sera noté « Jour 0 ».

Nous allons maintenant essayer de comprendre pourquoi les élèves se mettent toujours d'accord à la fin.

Dans la suite, nous allons utiliser des lettres pour différencier les opinions : deux mêmes lettres représentent deux élèves de même opinion quelque soit l'opinion et deux lettres différentes correspondent à 2 opinions différentes ; l'ordre n'a pas d'importance. Par exemple : *a a b ; b a a,* ou encore *c c b* sont des cas de figures identiques. Ecrire *a a b c* signifie que deux élèves ont la même opinion, peu importe laquelle, et deux autres ont une opinion différente.

III – Etude avec deux élèves

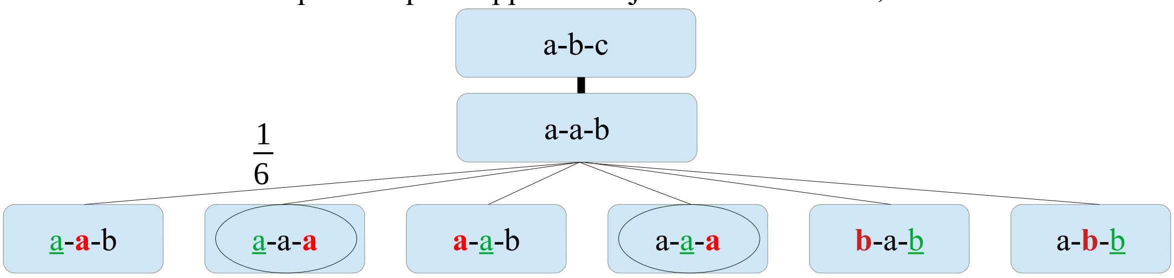
Nous commençons notre étude pour 2 élèves au départ qui supportent 2 joueurs différents *a* et *b.* On a, au jour 1, deux possibilités, soit *a* influence *b* soit *b* influence *a* . Nous représentons la situation par un arbre de probabilités.



Notre conjecture est bien démontrée pour deux élèves : ils se mettent tous d'accord dès le 1er jour.

IV – Etude avec trois élèves

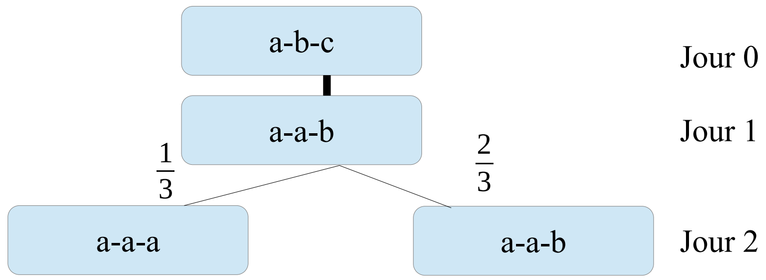
Prenons maintenant 3 élèves qui au départ supportent 3 joueurs différents *a, b* et *c* .



L'influenceur : **a** L'influencé : <u>a</u>

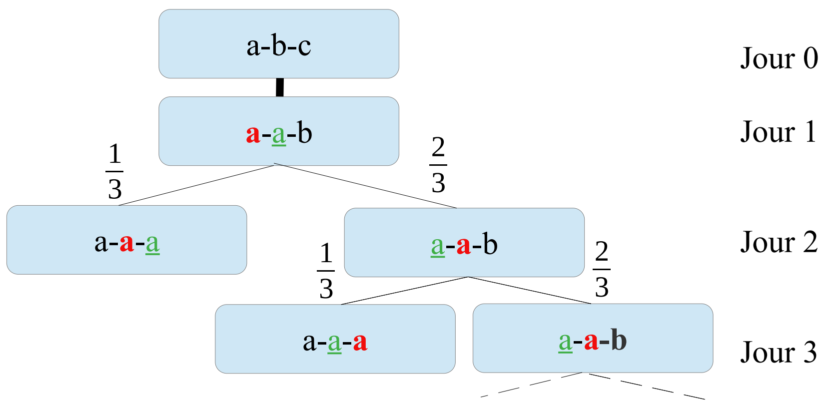
Remarque : - Dès le jour 1, une opinion disparaît. On nomme les deux restantes, par exemple *a* et *b*.
- Au jour 2, chaque issue à une probabilité de 1/6 d'arriver. Il y a 2 chances sur 6, c'est à dire une chance sur 3 pour qu'ils se mettent d'accord.

On peut donc simplifier notre arbre car on a des « cas similaires » :



On a deux possibilités : soit ils sont tous d'accord avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ soit il y a toujours un élève qui n'est pas d'accord (probabilité $\frac{2}{3}$).

Regardons maintenant le jour d'après :



Et ainsi de suite ...

On remarque que les issues au jour 3 sont identiques à celles du jour 2, les jours suivant seront donc également identiques.
On peut donc facilement calculer la probabilité qu'ils ne soient pas d'accord puis on en déduit la probabilité d'être d'accord.
Voici un tableau illustrant ces résultats :

Jours	Probabilité de ne pas être tous d'accord	Probabilité d'être tous d'accord
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$	$1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$
4	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$	$1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$
5	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$	$1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}$

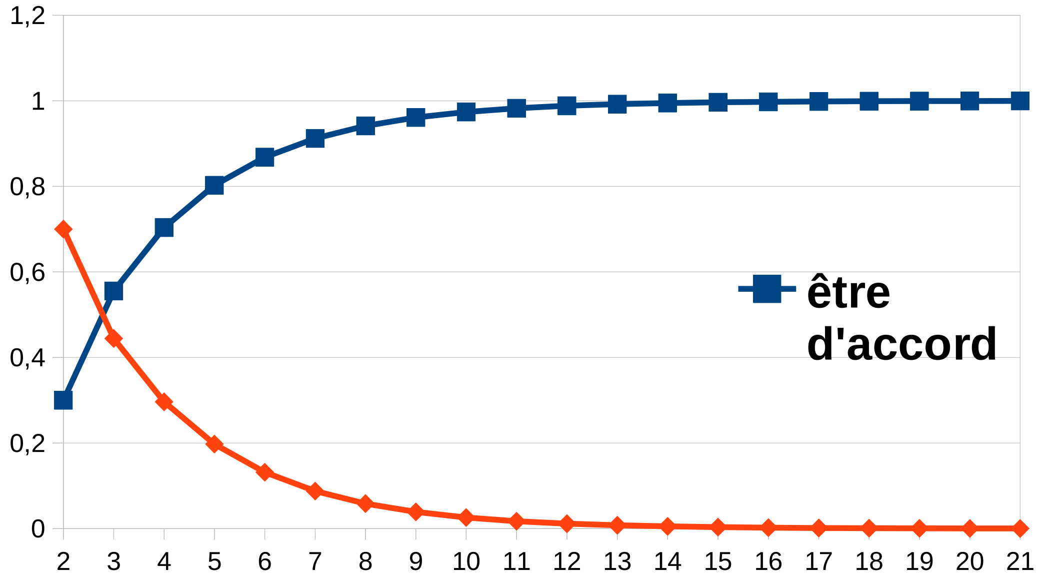
Généralisation
Au jour n (n est un entier positif supérieur ou égal à 2) :

- La probabilité pour que les élèves n'aient pas la même opinion est : $(\frac{2}{3})^{n-1}$

- La probabilité pour qu'ils soient tous d'accord est donc : $1-(\frac{2}{3})^{n-1}$

Réalisons quelques calculs pour avoir un ordre de grandeur du résultat
La probabilité pour qu'ils soient tous d'accord :
- au 10ème jour : environ 0,97 - au 15ème : environ 0,9966 - au 20ème : environ 0,9995
Cette probabilité se rapproche de plus en plus de 1 (celle de ne pas être d'accord se rapproche de 0). Ils finiront donc par être tous d'accord !

Voici encore un graphique illustrant ce résultat.

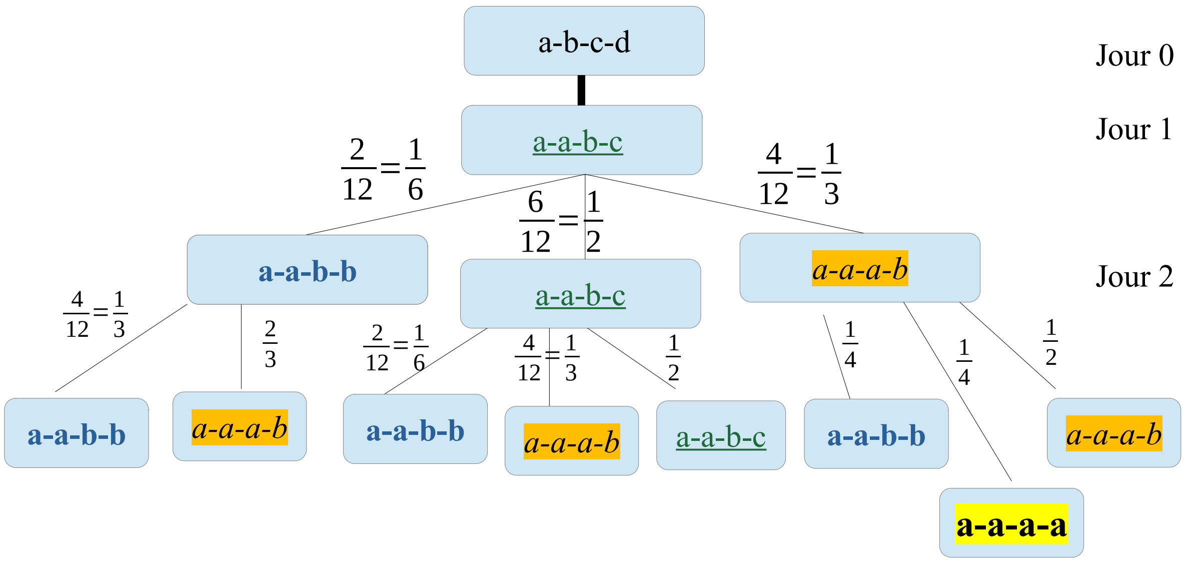


Sur ce graphique, on observe encore que la probabilité qu'ils soient tous d'accord (bleu) tend vers 1, et inversement, celle qu'il y ait au moins un élève qui ne soit pas d'accord (rouge) tend vers 0. Les deux courbes se croisent au début car la probabilité que les élèves soient tous d'accord au jour 0 est de 0 et celle qu'il y ait au moins un élève qui soit en désaccord au jour 0 est de 1. Au fil des jours, on a de plus en plus d'élèves de la même opinion, et donc de plus en plus de chances que tous les élèves soient d'accord (la courbe bleue augmente). Par conséquent, on a de moins en moins d'élèves qui sont en désaccord et donc de moins en moins de chances qu'il y ait un élève en désaccord (la courbe rouge diminue).

V – Etude avec quatre élèves

4 élèves au départ supportent 4 joueurs différents *a, b, c* et *d*.

Le jour 1, une opinion disparaît. Il y a ensuite 12 issues : chaque élève (il y en a 4) peut en influencer 3 autres, ce qui fait 3 × 4 possibilités.



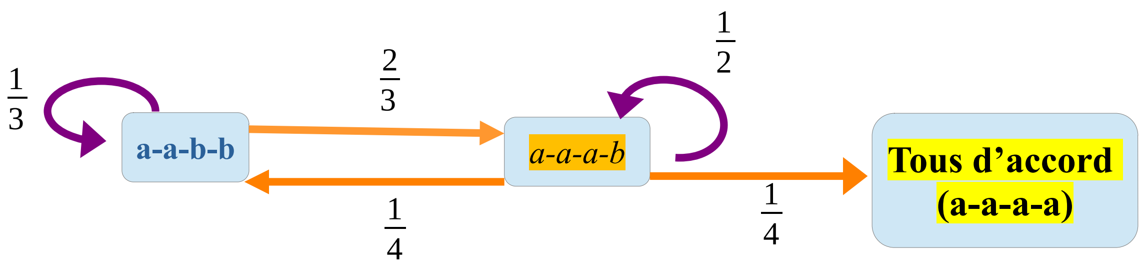
On observe qu'au jour 3, tous les cas obtenus sont ceux trouvés au jour 2 avec en plus, le cas où ils se mettent tous d'accord. Donc on peut simplifier notre étude vous le verrez par la suite.

Etudions d'abord la probabilité qu'il reste toujours 3 opinions a/b/c différentes.

Au jour 2, cette probabilité est de $\frac{1}{2}$, au jour 3, elle est de $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ et au jour 4, elle est de $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$.

Au jour n, elle sera de : $(\frac{1}{2})^{n-1}$ avec n > 1 . Cette probabilité tend de plus en plus vers 0 et donc ce cas va, un jour, disparaître.

Simplifions notre étude en étudiant les cas restants, c'est-à-dire en supprimant la branche avec les trois opinions différentes.



La probabilité d'être tous d'accord n'est pas nulle, alors la probabilité de l'événement contraire est de plus en plus petite au fur et à mesure que les jours augmentent (et tend même vers 0).

- Si on se trouve dans le cas **a-a-b-b** , il y a plus de chance d'en sortir et d'arriver à *a-a-a-b* que de rester dans ce cas de figure. Donc on arrivera à : *a-a-a-b*

- Si on se trouve dans le cas *a-a-a-b* , la probabilité de se mettre tous d'accord n'étant pas nulle, ce cas finira forcément par arriver.
Il finiront donc par se mettre tous d'accord.

Nous allons maintenant calculer quelques probabilités que les élèves se mettent tous d'accord en fonction du nombre de jours :

Au jour 3 : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ (environ 0.08)

Au jour 4 : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{36}$ (environ 0.19)

Au jour 5 :

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{7}{36}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times3+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{31}{108}$ (environ 0.29)

On peut constater une nouvelle fois que la probabilité qu'il se mettent tous d'accord augmente au fil des jours.

VI – Etude avec 22 élèves

Nous avons ensuite exploré le cœur de notre sujet, à savoir étudier ce que nous avons fait précédemment, mais avec cette fois avec 22 élèves.

Nous avons, cette fois, représenté les élèves par des nombres entiers à la place des lettres pour faciliter la compréhension. Le premier jour une opinion disparaît forcément, comme nous l'avons déjà dit auparavant ; il ne reste alors ''que'' vingt-et-une opinions.

1 2 3 4 5 . . . . . . 21 22 — Jour 0

1 1 2 3 4 5 . . . . . . 21 — Jour 1

Nous regardons ensuite les différents cas possibles **au jour 2** et la probabilité que chaque cas arrive.

Cas 1 : cela reste tel quel (deux opinions semblables et les vingt autres différentes)

1 1 2 3 4 5 21

Cas 2 : une des vingt opinions différentes influence une des dix-neuf autres opinions différentes (ce qui donne deux opinions semblables, deux autres opinions semblables et toutes les autres différentes).

1 1 2 2 3 4 20

Cas 3 : une des deux opinions semblables en influence une des vingt autres (ce qui donne trois semblables, dix-neuf différentes)

1 1 1 2 3 4 20

Calcul des probabilités

Cas 1:

1 1 2 3 4 5 . . . . . . 21 — 1 1 2 3 4 5 21

Dans ce cas c'est un 1 qui va influencer un autre 1 (2 possibilités) ou une des 20 autres opinions qui vont influencer un des deux 1 ($20\times2=40$ possibilités).
Pour trouver le nombre total de possibilités d'influencer, sachant qu'un élève ne peut pas s'influencer lui-même, les 22 élèves peuvent chacun en influencer 21 ; ce qui fait au total 2 $22\times21=462$ possibilités. Pour le cas 1, la probabilité est donc de $\frac{20\times2+2}{21\times22}=\frac{42}{462}=\frac{21}{231}=\frac{1}{11}$
.

Cas 2:

1 1 2 3 4 5 . . . . . . 21 — 1 1 2 **2** 3 4 20

Une des 20 opinions différentes (autres que 1) influence une autre de ces 20 mêmes opinions ; la probabilité est donc de $\frac{20\times19}{21\times22}=\frac{380}{462}=\frac{190}{231}$.

Cas 3:

1 1 2 3 4 5 . . . . . . 21 — 1 1 **1** 2 3 20

Un des deux 1 influence une des 20 opinions différentes ; la probabilité est donc de
$\frac{20\times2}{21\times22}=\frac{40}{462}=\frac{20}{231}$

Nous pouvons également retrouver ce résultat en le déduisant des deux premiers cas :

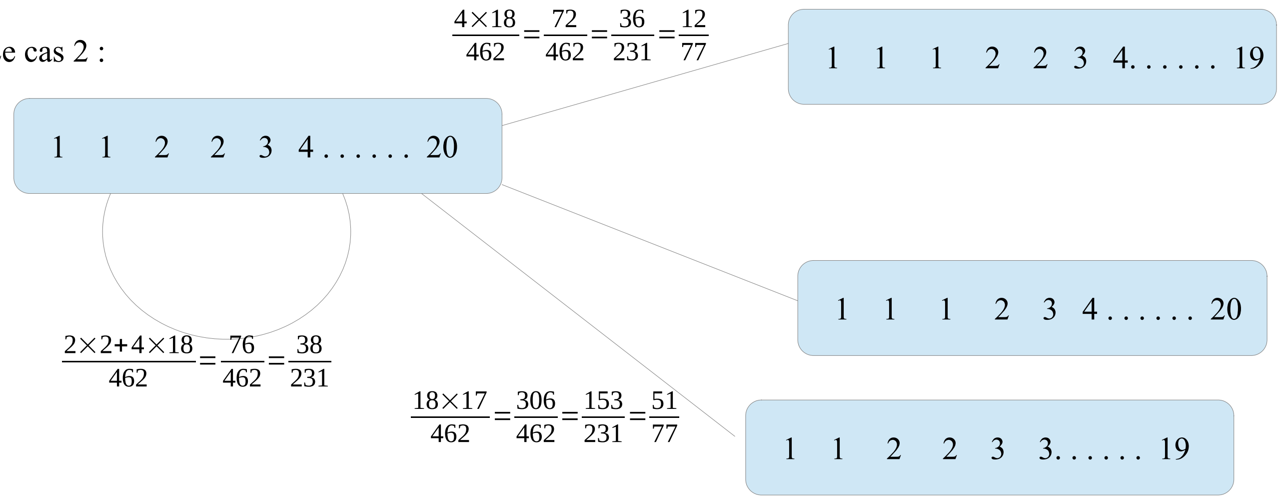
$$1-\frac{21}{231}-\frac{190}{231}=\frac{231-21-190}{231}=\frac{20}{231}$$

Remarque : le cas 1 ne peut se produire indéfiniment (la probabilité d'être toujours dans ce cas au bout de n jours est de : $\left(\frac{1}{11}\right)^{n-1}$, où $n > 1$, elle tend vers 0 lorsque n augmente) et donc, très probablement, une opinion va disparaître au bout d'un certain nombre de jours.

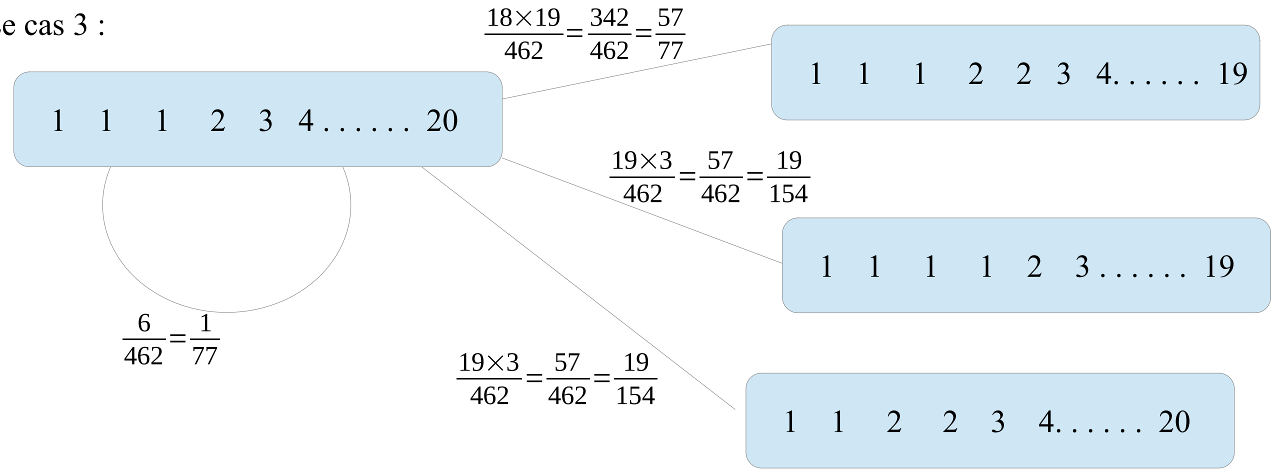
<u>Jour 3</u> : Nous devons maintenant étudier chaque cas précédent

Le cas 1 va nous redonner les trois mêmes cas.

Le cas 2 :



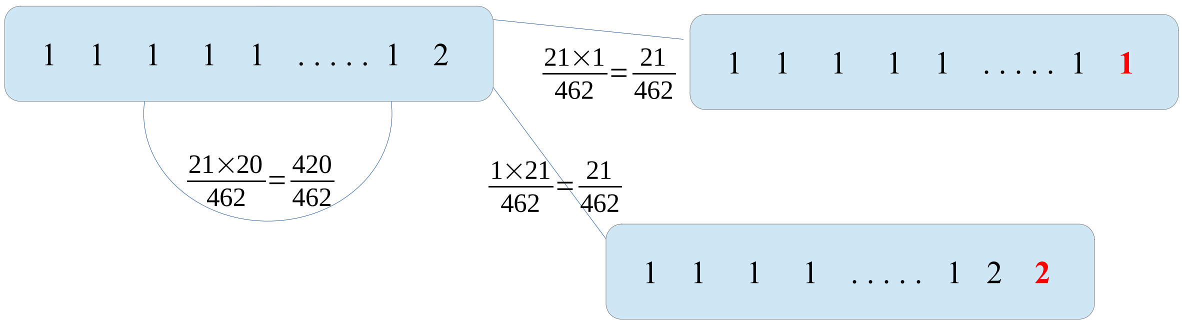
Le cas 3 :



En observant ces premiers jours, la probabilité de perdre une opinion n'est pas nul donc régulièrement des opinions seront perdues. Comme une opinion perdue ne réapparaît jamais, on va en perdre jusqu'à arriver au cas où il ne reste que deux opinions.

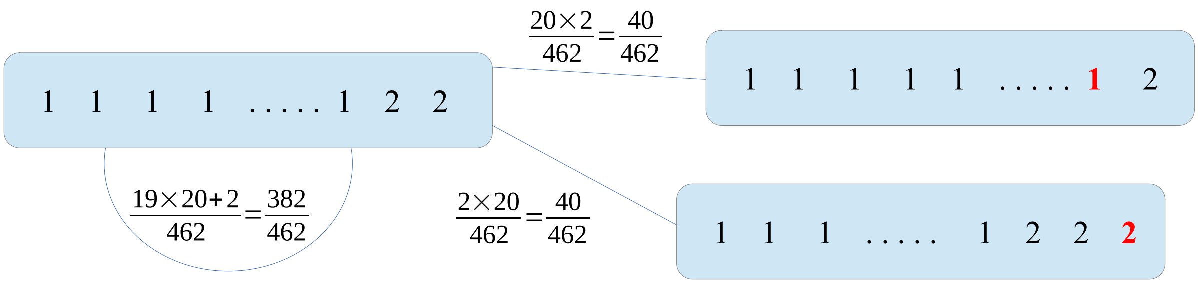
C'est ce cas que nous allons finir par étudier.

Jour X : il reste vingt et une opinions identiques et une opinion différente.



On peut remarquer que on perd soit une opinion 1 soit une opinion 2.

Voici un autre cas.
Jour X : il reste vingt opinions 1 et deux opinions 2



On continue d'étudier chaque cas ; voici nos résultats.

Opinion 1	**Opinion 2**	**Probabilités**		
		Reste identique	**On perd une op 1**	**On perd une op 2**
21	1	420/462	21/462	21/462
20	2	382/462	40/462	40/462
19	3	348/462	57/462	57/462
18	4	318/462	72/462	72/462
17	5	292/462	85/462	85/462
		...		
11	11	220/462	121/462	121/462

La probabilité de perdre une des opinions n'étant pas nulle, les opinions vont être régulièrement perdues jusqu'à ce qu'ils soient tous d'accord.

Généralisation

Ainsi, si on appelle n le nombre d'opinions 1 et m le nombre d'opinions 2 à un instant donné, on a (avec $n + m = 22$) :

Opinion 1	**Opinion 2**	**Probabilités**		
		Reste identique	Perd op 1	Perd op 2
n	m	$\frac{(n-1)\times n+(m-1)\times m}{462}$	$\frac{m\times(22-m)}{462}=\frac{mn}{462}$	$\frac{(22-n)\times n}{462}=\frac{mn}{462}$

Explication des expressions de généralisation :

- Reste identique :

Nous avons observé, que pour que la situation reste identique, il fallait qu'une opinion 1, influence le reste des opinions 1, donc n x (n-1), ou n représente le nombre d'opinions 1. Mais il y avait aussi la possibilité que les opinions 2 s'influencent entre elles, donc m x (m-1). Le dénominateur restant le même, la formule est : $\frac{(n-1)\times n+(m-1)\times m}{462}$.

- Une opinion 1 ou 2 est perdue :

Pour qu'une opinion 1 soit perdue, il faut que une opinion 2, influence une opinion 1. Le nombre d'opinions 1 étant le nombre d'opinions total, moins le nombre d'opinions 2. La formule est donc: $\frac{m\times(22-m)}{462}$ où m est le nombre d'opinions 2. Le dénominateur reste le même. Nous avons un raisonnement identique pour une opinion 2 perdue ; la probabilité est : $\frac{(22-n)\times n}{462}$.

Ces deux résultats sont identiques à $\frac{mn}{462}$ puisque $n + m = 22$ et donc $22 – n = m$ et $22 – m = n$.

Conclusion : les élèves vont toujours finir par se mettre d'accord mais cela peut prendre très longtemps. Combien de temps cela va-t-il prendre en moyenne ? Nous n'avons pas réussi à le démontrer.

Annexe :

Programme 1 : ils se mettent tous d'accord

Code :

main.py > ...

```python
from random import randint

eleves = [i + 1 for i in range(int(input("Combien d'élèves? ")))]  # création de la liste d'élèves
etapes = 0

def influence(source: int, target: int):
    # fonction permettant de mettre l'opinion d'un élève cible (target) à celle d'un élève source.
    eleves[target] = eleves[source]


def choose_random_duo():
    # fonction permettant de choisir un "duo" d'élèves qui sont différents (un élève ne peut s'influencer lui-même!)
    duo = {
        "influencer-index": randint(0, len(eleves) - 1),
        "influenced-index": randint(0, len(eleves) - 1)
    }
    while duo['influencer-index'] == duo['influenced-index']:
        duo = {
            "influencer-index": randint(0, len(eleves) - 1),
            "influenced-index": randint(0, len(eleves) - 1)
        }
    return duo



while len(set(eleves)) != 1: # tant que tous les élèves ne sont pas d'accord, on recommence l'opération
    duo = choose_random_duo() # on  choisit deux élèves: l'influenceur et l'influencé
    influence(duo['influencer-index'], duo['influenced-index']) # l'influencé prend l'opinion de l'influenceur
    etapes += 1


print(f"Les {len(eleves)} élèves se sont tous mis d'accord en {etapes} jours. L'opinion gagnante est la {eleves[0]}.")
```

Sortie :

```
Combien d'élèves? 22
Les 22 élèves se sont tous mis d'accord en 479 jours. L'opinion gagnante est la 3.
```

Programme 2 : Calcul du temps moyen pour se mettre d’accord

Code :

moyenne.py > ...

```python
from random import randint

nbEleves = int(input("Combien d'élèves? "))
eleves = [i + 1 for i in range(nbEleves)]  # création de la liste d'élèves
etapes = 0
nbJours = []
moyenneJours = 0
repetitions = int(input("Combien de répétitions? "))

def influence(source: int, target: int):
    # fonction permettant de mettre l'opinion d'un élève cible (target) à celle d'un élève source.
    eleves[target] = eleves[source]


def choose_random_duo():
    # fonction permettant de choisir un "duo" d'élèves qui sont différents (un élève ne peut s'influencer lui-même!)
    duo = {
        "influencer-index": randint(0, len(eleves) - 1),
        "influenced-index": randint(0, len(eleves) - 1)
    }
    while duo['influencer-index'] == duo['influenced-index']:
        duo = {
            "influencer-index": randint(0, len(eleves) - 1),
            "influenced-index": randint(0, len(eleves) - 1)
        }
    return duo

for i in range(repetitions): # on répète l'opération le nombre de fois voulues
    while len(set(eleves)) != 1:
        """
        Tant que tous les élèves ne sont pas d'accord, on choisit un élève au hasard qui en influence un autre au hasard.
        (Tant que tous les éléments de la liste eleves ne sont pas les mêmes, on en remplace un par l'opinion d'un autre élément.)
        """
        duo = choose_random_duo() # on  choisit deux élèves: l'influenceur et l'influencé
        influence(duo['influencer-index'], duo['influenced-index']) # l'influencé prend l'opinion de l'influenceur
        etapes += 1

    nbJours.append(etapes)
    etapes = 0
    eleves = [i +1 for i in range(nbEleves)] # On réinitialise les élèves et on recommence avec une autre classe...

for i in range(repetitions):
    moyenneJours += nbJours[i] # calcul de la moyenne (ajout de toutes les valeurs, la division se fait directement à l'affichage)

print(f"En moyenne pour {repetitions} répétitions, les {len(eleves)} élèves se sont mis d'accord en {round(moyenneJours / repetitions)} jours (valeur exacte : {moyenneJours / repetitions}).")
```

Sortie :

```
Combien d'élèves? 22
Combien de répétitions? 5000
En moyenne pour 5000 répétitions, les 22 élèves se sont mis d'accord en 440 jours (valeur exacte : 440.4804).
```

Nous remercions notre chercheur Olympio Hacquard de nous avoir accompagnés durant cette année 2020/21, même avec les conditions sanitaires liées au covid19 et de nous avoir donné des idées quand on ne savait plus comment avancer.