Sentinelles

Année 2023 – 2024

Élèves de 3ème : Alexis BUCHLIN, Morgane DELSANTI, Clément JEGU, Héloïse MOUCAN et Simon ROY.

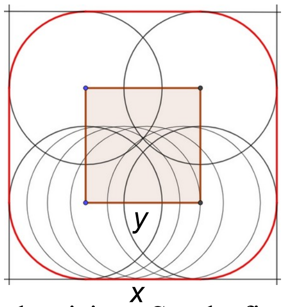
Établissement : Collège Alain-Fournier.

Enseignante : Florence FERRY.

Chercheur : Emmanuel KAMMERER, Ecole polytechnique Paris-Saclay.

Le sujet : Un château a une forme polygonale. Du haut de ses remparts sont postées des sentinelles qui peuvent voir à un kilomètre. Où vaut-il mieux les placer pour voir l'ennemi le plus tôt possible dans la plupart des cas, si le château est carré ?

Dans la suite de l'article, nous allons utiliser des notations :
. y : la longueur d'un côté du château.
. x : La longueur du côté du carré qui entoure la zone de vision maximale des sentinelles comme le montre la figure ci-dessous.



. P : L'aire de la surface optimale de vision. Sur la figure ci-dessus, la zone maximale de vision est donnée par la figure entourée de rouge ; c'est celle observable par « une infinité » de sentinelles.

I – Premier calcul – Aire de la zone maximale de vision

On suppose qu'on met un grand nombre de sentinelles sur les bords du château et on calcule P.

Le rayon d'un cercle, champ de vision de la sentinelle, est : $\frac{x-y}{2}$.

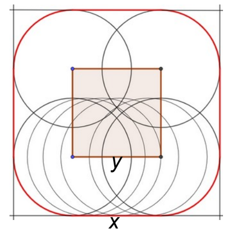
Aire d'un « coin » du carré de côté x : $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2-\frac{\pi\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}{4}$

On a alors : $P=x^2-4\times\left(\left(\frac{x-y}{2}\right)^2-\frac{\pi\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}{4}\right)$

$$P=x^2-4\times\left(\frac{x^2-2xy+y^2}{4}-\frac{\pi x^2-2\pi xy+\pi y^2}{16}\right)$$

$$P=x^2-x^2+2xy-y^2-\frac{\pi x^2-2\pi xy+\pi y^2}{4}$$

$$P=2xy-y^2-\frac{\pi x^2-2\pi xy+\pi y^2}{4}$$



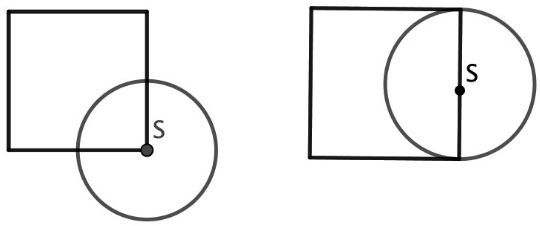
Cette zone maximale de vision est celle dont on cherche à se rapprocher le plus possible.

Nous aurons deux façons de voir le problème :

- Si on considère que les ennemis connaissent le château et ses points faibles, on veut protéger de la même façon tout les château.
- On veut surveiller au mieux la zone maximale observable en protégeant la plus grande zone possible. Si l'ennemi attaque au hasard, la probabilité de le voir rapidement doit être la plus grande possible quitte à ce que certains endroit soit affaiblis.

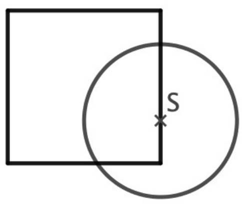
II – Une sentinelle

Cas 1 : les remparts entourant le château ont une longueur égale au diamètre de vision des sentinelles ; c'est à dire : $y = 2$ km. Nous envisageons alors deux positions possibles.

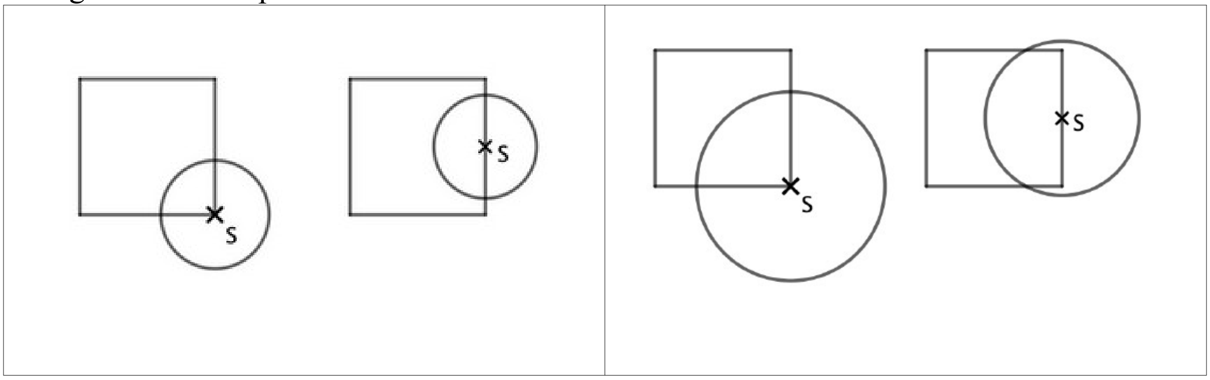


S représente la sentinelle.

Sur la figure de gauche, la sentinelle est postée sur un sommet du carré représentant le château. Dans ce cas de figure, on peut observer que la sentinelle a un champ de vision qui est égal à 3/4 d'un disque. Dans le deuxième cas de figure, à droite, la sentinelle est postée au milieu d'un des côtés du château ; la zone de vision est d'un demi disque, ce qui est moins bien. On privilégiera dons le premier positionnement.
Si la sentinelle est placée sur un des côtés au hasard, la surface de la zone de vision reste inférieure .



Cas 2 : *y* est supérieur ou inférieur à 2 km, la longueur de la diagonale du château est supérieure à 1 km. Nous avons un raisonnement identique au précédent ; la meilleure configuration est la première.

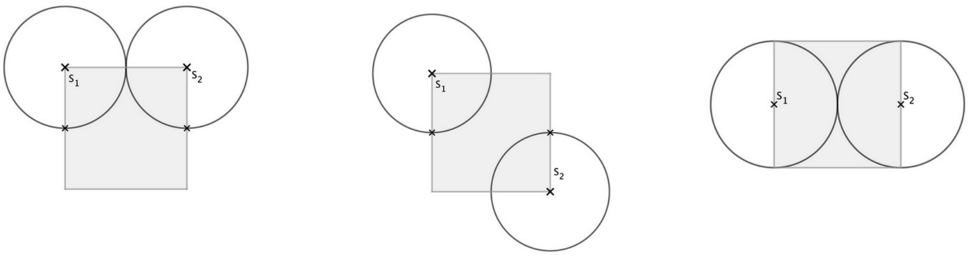


Cas 3 : La longueur de la diagonale du château est inférieure à 1 km.

Dans ce cas on peut mettre la sentinelle n'importe où, *P* reste la même.

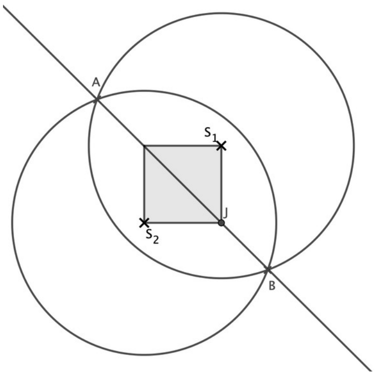
III – Deux sentinelles

Voici trois emplacements possibles pour les deux sentinelles S_1 et S_2 ; avec les deux premières positions, *P* est maximale.

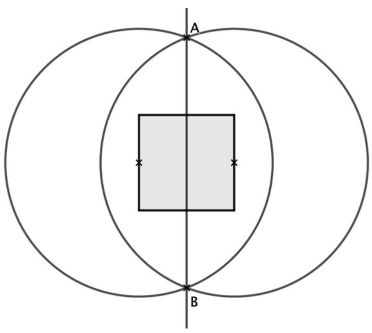


Supposons que *y* soit inférieur au rayon de vision de la sentinelle ; nous allons alors étudier deux positions qui nous paraissent intéressantes :

Position 1 :

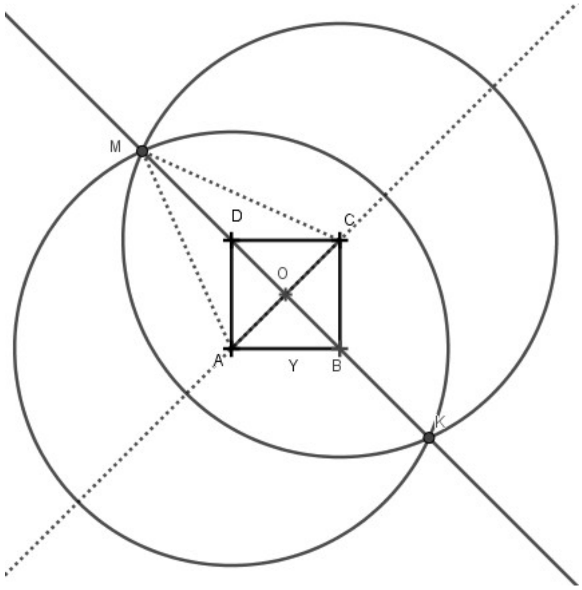


Position 2 :



Dans quelle position P est-elle la plus grande ?
Pour répondre à cette question, on va calculer l'aire commune aux deux cercles que forment les champs de vision des deux sentinelles : plus cette surface est petite, plus P est grande.

Pour la position 1 : notons T la surface commune au deux cercles.



- Calcul de OC :
Dans BDC rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore : $BD^2 = CD^2 + BC^2$
D'où : $BD^2 = 2y^2$. Or $BD>0$, donc : $BD=\sqrt{2y^2}=y\sqrt{2}$ et $OC=\frac{y\sqrt{2}}{2}$
- Calcul de $\widehat{OCM}$:

OCM rectangle en O. $\cos\widehat{OCM}=\frac{OC}{CM}$ d'où : $\cos\widehat{OCM}=\frac{\frac{y\sqrt{2}}{2}}{1}$ Donc : $\widehat{OCM}=\arccos\frac{y\sqrt{2}}{2}$

- Calcul de l'aire du secteur angulaire du disque de centre C d'angle $\widehat{OCM}$:
L'angle du secteur angulaire est proportionnel à la surface du secteur.

Angle	360°	$\widehat{OCM}$
Surface	$\pi\times1^2$	$\text{Aire}_{\text{portion}}$

$\text{Aire}_{\text{portion}} = \frac{\arccos\frac{y\sqrt{2}}{2}\times\pi}{360}$

De ce secteur, il faut enlever l'aire du triangle OCM.
- Calcul de l'aire de OCM :
OCM est rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore : $MC^2 = OM^2 + OC^2$
d'où : $OM^2 = 1-\left(\frac{y\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{4-2y^2}{4}=\frac{2-y^2}{2}$ or, $OM>0$ donc : $OM=\sqrt{\frac{2-y^2}{2}}$

L'aire de OCM est donc : $$\frac{OC\times OM}{2}=\frac{\frac{y\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{\frac{2-y^2}{2}}}{2}=\frac{y\sqrt{2}}{4}\times\sqrt{\frac{2-y^2}{2}}=\frac{y}{4}\times\sqrt{2-y^2}$$

- Calcul de l'aire commune cherchée :

$$T=4\times\left(\frac{\arccos\frac{y\sqrt{2}}{2}\times\pi}{360}-\frac{y}{4}\times\sqrt{2-y^2}\right)$$

$$\boxed{T=\frac{\pi}{90}\times\arccos\left(y\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-y\sqrt{2-y^2}}$$

Pour la position 2 : notons U la surface commune au deux cercles.

Avec un calcul de même nature, on obtient : $\boxed{U=\frac{\pi}{90}\times\arccos\left(\frac{y}{2}\right)-\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2}}$

Comparons ces deux aires « perdues » à l'aide d'un tableur.

Avec la position 1

	A	B
1	y	Aire de la zone de vision pardue
2	0,1	2,941676018
3	0,2	2,742260324
4	0,3	2,543850309
5	0,4	2,346958453
6	0,5	2,152109225
7	0,6	1,959843825
8	0,7	1,770725656
9	0,8	1,58534685
10	0,9	1,404336276

Avec la position 2

	A	B
1	y	Aire de la zone de vision pardue
2	0,1	2,85898582
3	0,2	2,577798544
4	0,3	2,29947214
5	0,4	2,025493151
6	0,5	1,757420578
7	0,6	1,496919684
8	0,7	1,245806716
9	0,8	1,006111917
10	0,9	0,780174383
11		

La position 1 permet le meilleur remplissage de la zone de vision mais dans le cas où l'ennemi connaît le château, il saurait où attaquer puisqu'il y a des endroits moins surveillés qui sont les deux points faibles de la défense, en A et en B.

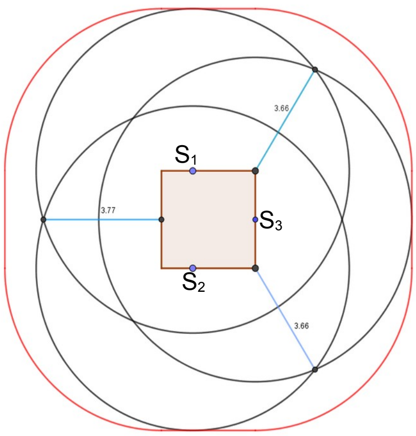
La position 2 permet de repérer plus rapidement l'ennemi ; en effet, la distance de A au château est plus longue avec cette configuration. Néanmoins, l'aire de la zone de vision est moins importante qu'avec la première position.

Donc, si l'ennemi attaque aléatoirement, on préfèrera la première position ; dans le cas où l'ennemi connaît les lieux, on privilégiera la seconde.

IV – Trois sentinelles

Pour cette partie nous avons juste fait des essais avec le logiciel Géogébra et conjecturé deux positions qu'on pense être les meilleures mais nous n'avons pas réussi à le démontrer.
Voici les positions trouvées :

Cette première position est celle ayant le moins de points faibles.



Voici le deuxième position qui semble remplir le mieux la zone P :