Accident ferroviaire

Année 2016 - 2017

Élèves de 4ème : Anouk Missenard, Mathieu Tarnus, Alexandre Barbe, Tristan Brahy.
Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence FERRY et Claudie ASSELAIN.
Chercheur : Maxime INGREMEAU.

Le sujet :
Un accident ferroviaire a eu lieu : deux trains de marchandise sont rentrés en collision. Les deux trains comportent différentes sortes de wagons mais sont identiques (même nombre de wagons de chaque sorte). Les wagons se sont accrochés en désordre formant un cercle. Détacher un wagon est très difficile ; notre but est de trouver comment détacher le moins de wagons pour prendre le moins de temps, reconstituer les trains comme ils étaient avant l'accident et les faire repartir le plus vite possible. (1)

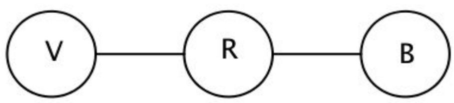
Les résultats : Nous avons trouvé le minimum de coupes à faire quand il y a des wagons de deux sortes et qu'ils sont alternés ou non et nous avons une conjecture pour un minimum de coupes suivant la parité des sortes de wagons.

Dans la suite de l'article, nous donnerons une couleur à chaque sorte de wagon.

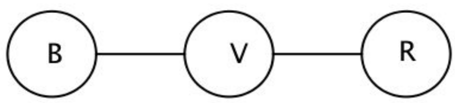
I – Exemples

1) Prenons un premier exemple de 3 wagons de 3 couleurs différentes (V, B et R) dans chaque train.

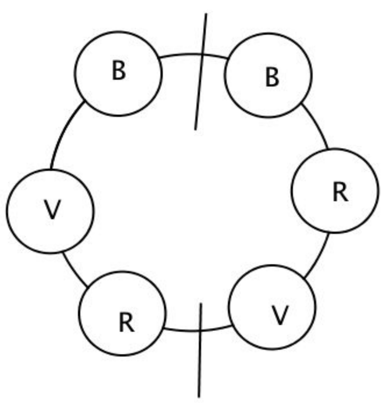
TRAIN 1

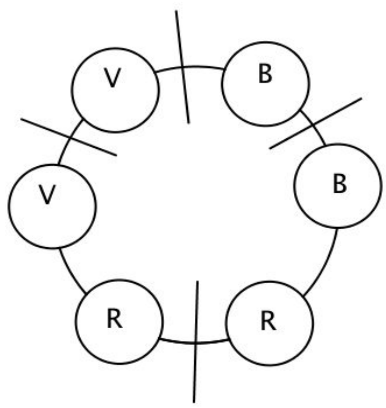


TRAIN 2



COLLISION : 2 cas

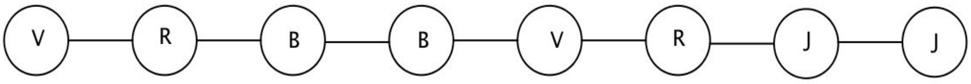




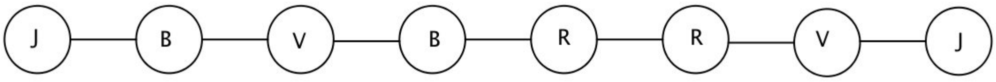
Dans le premier cas, il suffit de 2 coupes pour reformer les trains d'origine alors que pour le deuxième cas nous avons besoin de 4 coupes.

2) Voici un deuxième exemple

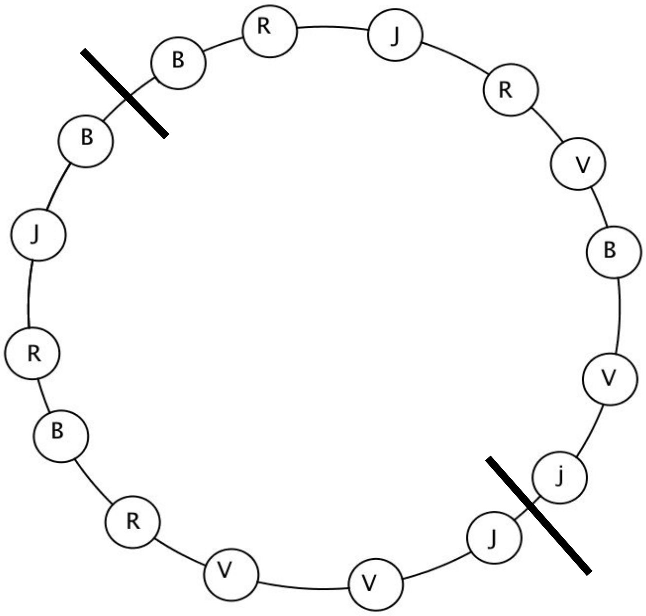
TRAIN 1



TRAIN 2



COLLISION



Deux coupes suffisent.

II – Premières remarques

1) Remarque sur le nombre de wagons (après collision)

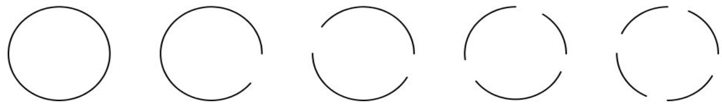
Ce nombre est toujours pair. Le nombre de wagons après l'accident est le double du nombre de wagons de chaque train avant l'accident : si n est le nombre de wagons de chaque train et N le nombre de wagons du train après la collision, on a : N = 2n.

2) Remarque sur le nombre de couleurs

Les deux trains ont le même nombre de wagons et les mêmes couleurs ; les couleurs sont donc représentées deux fois (au moins) chacune. Il y a au plus n wagons différents ; le nombre de couleurs est inférieur ou égal à n, c'est-à-dire N/2. Par exemple, pour un nombre de wagons de 32 après collision, il y aura 16 couleurs maximum.

3) Remarque sur le nombre de coupes

Il faut former un nombre pair de paquets pour pouvoir les répartir équitablement entre les deux trains. (2)



Si une première coupe a été faite, pour former les deux trains, il en faut forcément une deuxième.
Si on fait une troisième coupe, pour former les deux trains, il faut regrouper deux coupes adjacentes ensemble donc une coupe était inutile ; il suffit donc de deux.
Si on en fait 5, pour former les deux trains, il faut regrouper deux coupes adjacentes ensemble donc une coupe était inutile ; il suffit donc de 4. On peut généraliser ce raisonnement.
Donc : le nombre de coupes doit toujours être pair et il doit au moins y en avoir 2.

III – Étude de cas particuliers

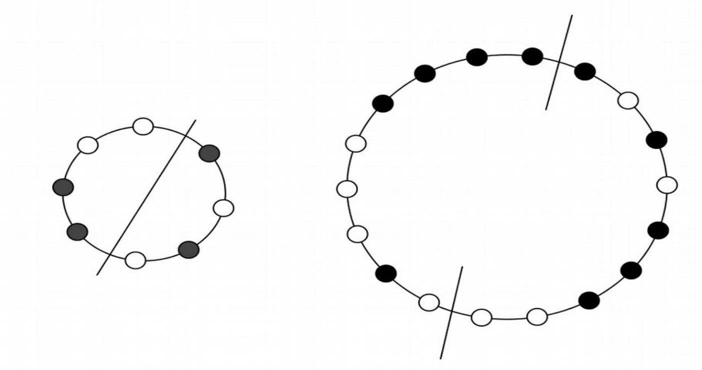
1) Cas de couleurs alternées

On s'aperçoit que, lorsqu'on positionne les wagons avec les couleurs alternées, il suffit de deux coupes pour obtenir les deux trains et ce quel que soit le nombre de couleurs.
On a même plusieurs choix possibles pour couper.
Exemples :

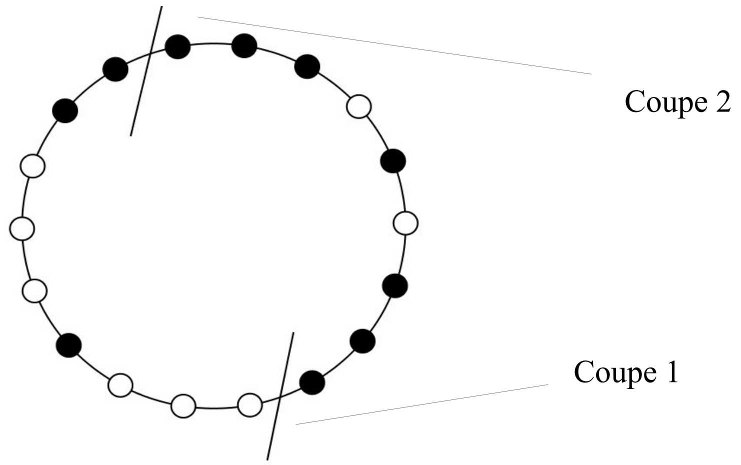
En effet :
Supposons que le nombre de wagon de chaque couleur soit *n,* il suffit de mettre la première coupe à un endroit puis de tourner en comptant jusqu'à avoir *n/*2 wagons de chaque couleur ; on met alors la deuxième coupe et nous avons bien reformé deux trains de même composition.

2) Cas de deux couleurs

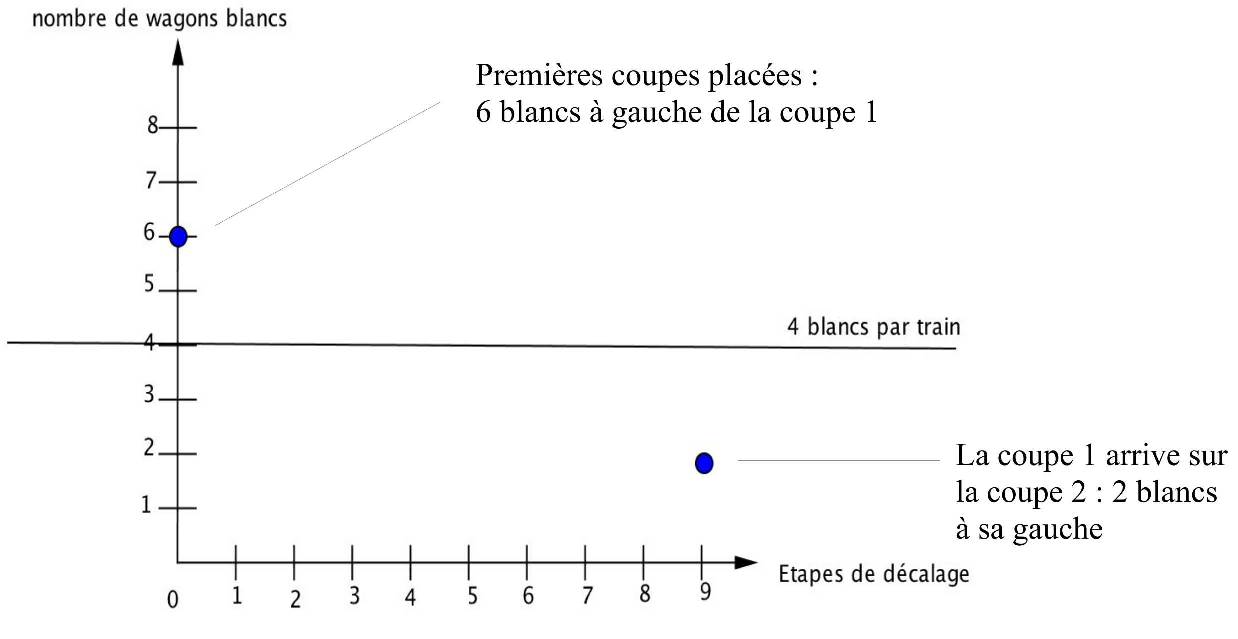
Avec deux couleurs, 2 coupes suffisent toujours. Voici tout d'abord deux exemples ; on regarde après la collision :



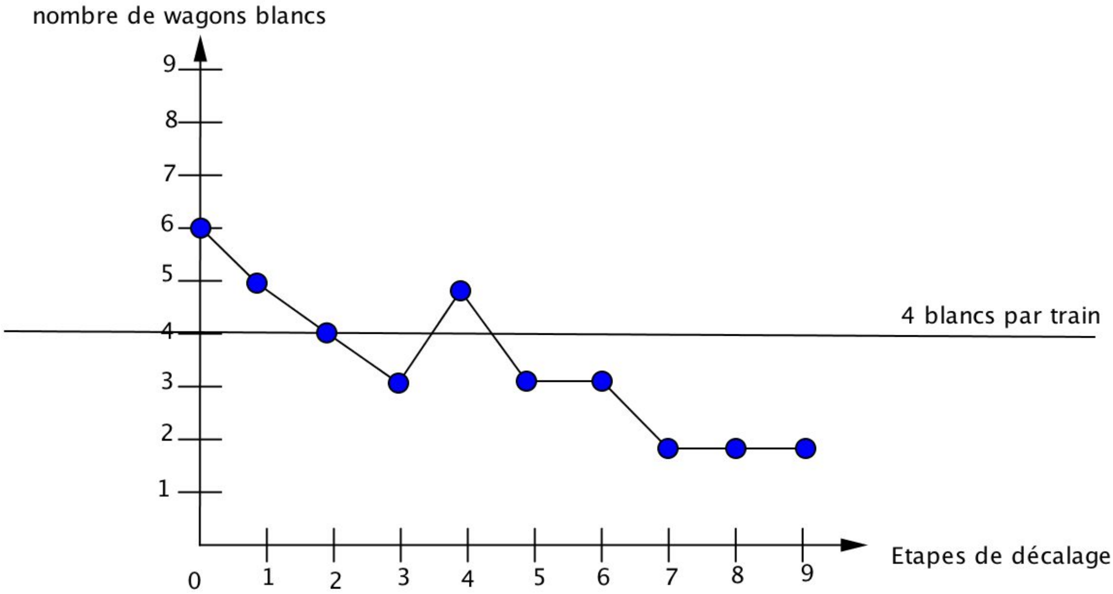
Étudions le deuxième exemple.
Il y a 4 wagons blancs et 5 noirs dans chaque train, donc en tout 8 wagons blancs et 10 noirs.
On cherche une coupe qui est suivie de 4 wagons blancs seulement sur les 9 wagons qui se suivent ; les 5 autres sont forcément des wagons noirs. On place alors la deuxième coupe qui nous donnera le partage voulu.
Nous pouvons aussi l'expliquer sur un graphique.
Nous commençons par mettre deux coupes au hasard diamétralement opposées pour qu'il y ait autant de wagons sur les deux arcs de cercles ; nous voulons avoir 4 blancs sur chaque arc de cercle :

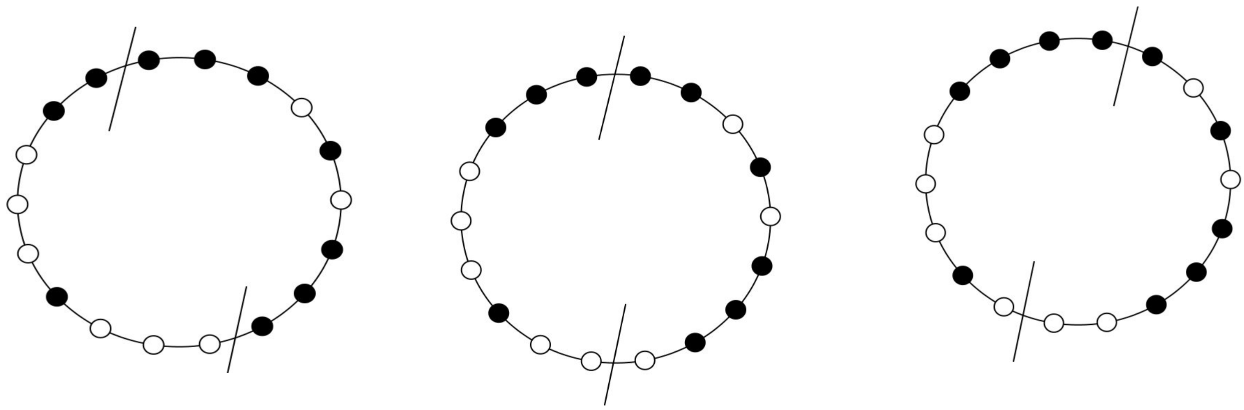


Nous commençons par compter le nombre de blancs sur l'arc de cercle de gauche d'une coupe à l'autre en commençant par la coupe 1. Il y en a 6 donc deux de trop par rapport à ce que l'on veut. On va décaler chaque coupe d'un cran à chaque fois dans le sens des aiguilles d'une montre jusqu'à obtenir autant de blancs et autant de noirs sur chaque arc de cercle. Pourquoi est-on sûr d'arriver au résultat voulu ?



Si le nombre total de wagons blancs à gauche de la coupe 1 est B et le nombre total de wagons blancs est T alors le nombre de wagons blancs après le nombre total de décalage (quand la coupe 1 se retrouve sur la coupe 2) est T – B.
Ici au départ on a 6 wagons blancs à gauche de la coupe 1 ; lorsque celle-ci sera sur la coupe 2, elle aura 2 blancs à sa gauche.
On trace ensuite la courbe qui relie les deux points. A chaque étape, soit on avance horizontalement (c'est le cas où le nombre de couleurs de chaque catégorie reste le même), soit on monte de 1 (on gagne un wagon blanc), soit on descend de 1 (on perd un wagon blanc). Dans tous les cas, la courbe va donc forcément passer par la ligne tracée où le nombre de wagons blancs est le même de chaque côté.





Ici on peut s'arrêter au bout de 2 décalages : on aura 4 blancs à gauche de la coupe 1 et donc 4 blancs à droite. Le reste sera des wagons noirs, 5 de chaque côté.On coupe au hasard

1er décalage

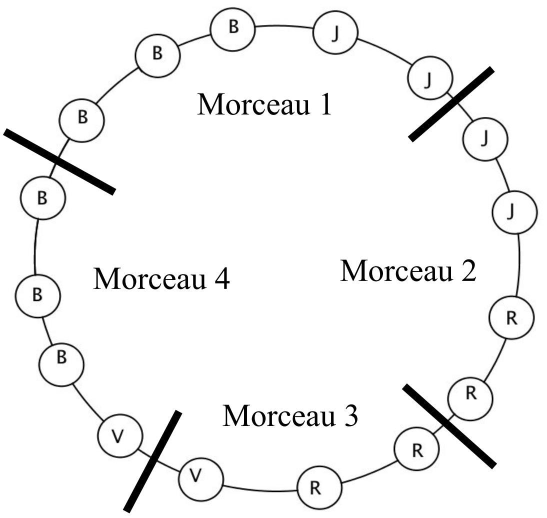
2ème décalage, on s'arrête, c'est gagné.

IV – Cas général

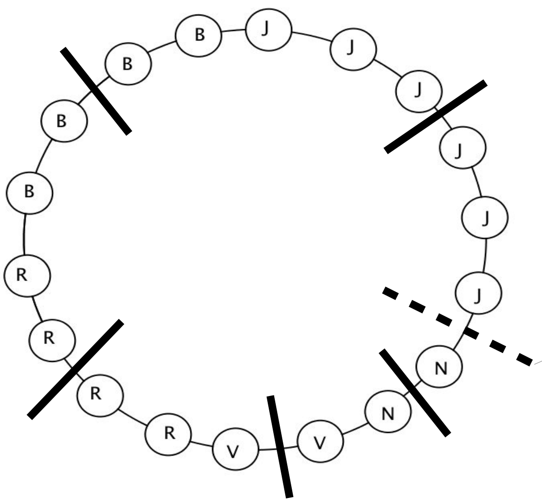
1) Nombre maximum de coupes

Pour un nombre de couleurs donné, il y a différentes dispositions des wagons après collision. Il semble que la configuration qui donne à chaque fois le maximum de coupes est celle où l'on met les wagons de même couleur à côté. Il faudra dans ce cas couper chaque paquet contenant les mêmes couleurs en 2 et, si le nombre de coupes est impair, en rajouter une.

Exemple :



On met les morceaux 1 et 3 ensemble et 2 et 4 ensemble, on reforme les deux trains.



En séparant les paquets ici, nous ne pouvons pas reformer les deux trains ; il faut une coupe supplémentaire.

Coupe supplémentaire

2) Relation entre le nombre de wagons, le nombre de couleurs et le nombre de coupes

Nous avons ensuite étudié de nombreux exemples en faisant varier le nombre de couleurs et leur disposition après collision. Suivant la disposition des wagons, le nombre de coupes varie.
Voici un tableau récapitulatif de nos résultats.

Nombre de wagons total (après collision)	Nombre de couleurs possible	Nombre de coupes nécessaires
2	1	1
4	1 ou 2	2
6	1	2
6	2	2
6	3	2 ou 4
8	1	2
8	2	2
8	3	2 ou 4
8	4	2 ou 4
10	1	2
10	2	2
10	3	2 ou 4
10	4	2 ou 4
10	5	2 ou 4 ou 6
12	1	2
12	2	2
12	3	2 ou 4
12	4	2 ou 4
12	5	Au plus 6
12	6	Au plus 6
14	1	2
14	2	Au plus 4
14	3	Au plus 4
14	4	Au plus 6
14	5	Au plus 6
14	6	Au plus 6
14	7	Au plus 8

On remarque une sorte de progression logique sur le nombre maximal de coupes nécesaire.

Si on regarde le nombre maximum de couleurs dans la pire des configurations :

Nombres de wagons	Maximum de couleurs	Maximum de coupes
2	1	2
4	2	2
6	3	4
8	4	4
10	5	6
12	6	6
14	7	8

CONJECTURE

Nombres de wagons	Maximum de couleurs	Maximum de coupes
2n avec n pair	n	n
2n avec n impair	n	n + 1

(3)

Généralisation / conjecture :

Nombre N de wagons après la collision	Nombre de couleurs	Nombre de coupes nécessaires
2n, n pair	1	2
	2	2
	3	Au plus 4
	4	Au plus 4
	...	...
	n - 1	Au plus n
	n	Au plus n
2n, n impair	1	2
	2	2
	3	Au plus 4
	4	Au plus 4
	...	...
	n - 2	Au plus n-1
	n - 1	Au plus n-1
	n	Au plus n+1

Nous n'avons pas réussi à démontrer cette conjecture.

Notes d'édition

(1) Attention, les wagons peuvent être ordonnés différemment à la configuration initiale.

(2) Cette phrase n'a pas un sens mathématique clair. L'énoncé de la proposition que les auteurs démontrent à continuation est le suivant : le nombre minimal de coupes nécessaires est pair et supérieur ou égal à deux.

(3) Le format table n'est pas le plus adéquat pour une conjecture. Les éditeurs se permettent de la reformuler pour enlever toute ambiguïté. Conjecture : si le nombre de wagons après collision est 2n avec n pair, le nombre maximum de coupes nécessaires est n. Si le nombre de wagons après collision est 2n avec n impair, le nombre maximum de coupes nécessaires est n+1. Dans les deux cas, il existe une configuration avec n couleurs qui atteint ce maximum, celle où les wagons de même couleur sont groupés.