

Modélisation de croissance d'un arbre **2013-2014**

Élèves : Razvan Boldis, Marius Vlas et Lorand Berekmeri de classe 11 (équivalent terminale) du Colegiul National Emil Racovita de Cluj (Roumanie) et Amaury JOURDAIN, Martin LUC et Tanguy RUTH élèves de 1^{er}ES et 1^{er}S du lycée d'Altitude de Briançon (France)

Établissements : Colegiul Național Emil Racoviță (Cluj / România), Lycée d'Altitude de Briançon (France)

Enseignants : Ariana Văcarețu (Roumanie) et Mickaël Lissonde et Hubert Proal (France)

Chercheurs : Madame Adela Lupescu (Université Bades – Bolyai de Cluj-Napoca), Messieurs Camille PETIT (Université de Fribourg) et Yves PAPEGAY (INRIA-Sophia Antipolis)

Présentation du sujet

Un arbre est un assemblage de cinq types de branches. Branche de type n°1 de longueur 1, branche de type n°2 de longueur 1/2, branche de type n°3 de longueur 1/3, branche de type n°4 de longueur 1/4 et branche de type n°5 de longueur 1/5.

Une branche évolue en deux nouvelles branches de numéro supérieur ou égal à son numéro (seule la branche n°5 n'évolue plus).

Pour déterminer comment évolue une branche n°i (≤4), on choisit un nombre p au hasard entre 0 et 1.

On cherche alors dans la matrice d'évolution M **(1)** le coefficient le plus petit $M_{i,j}$ de la ligne n°i tel que $p \leq M_{i,j}$.

Plusieurs cas se présentent alors. Soit $j=i$ et alors la branche évoluera en deux branches de type n°i+1. Soit $j>i$ et alors la branche évoluera en une branche de type n°i et une de type n°j.

Voici un exemple de matrice d'évolution $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,8 & 0,9 & 0,95 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0,8 & 0,9 & 1 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$

Problème : programmer ce système, le faire évoluer, changer les valeurs de M. Le but est de le rendre le plus proche de la réalité.

Résultats obtenus

Les élèves sont capables de déterminer la probabilité de l'âge d'un arbre (nombre d'évolutions avant que toutes les branches soient au maximum) en fonction de la matrice M.

Ils ont aussi travaillé, dans un second temps, sur l'aspect graphique mais les recherches ne sont pas finies.

Valorisations des travaux

Les deux groupes ont animé conjointement leur stand lors du congrès MeJ de Lyon 2014 où ils ont aussi fait un exposé commun. Les élèves de Cluj ont animé leur sujet lors de la semaine des maths et ceux de Briançon l'ont présenté au colloque Dedra-math-isons à Louvain et au forum PASS à Aix-en-Provence.



*Les groupes de Cluj et Briançon
lors de leur présentation au congrès de Lyon*

A partir de ce premier travail, nous avons étudié plusieurs pistes :

A1) Quel est l'âge de l'arbre le plus jeune que nous puissions avoir ?

Pour réaliser le plus jeune arbre il faut « rapidement » arriver aux branches n°4. Il faut ainsi qu'à chaque étape d'évolution, une branche de type n°i se divise en deux branches de type n°i+1.

La branche n°1 de départ va créer deux branches n°2 (avec probabilité 0,5), puis chaque branche n°2 va créer deux branches n°3 (probabilité 0,5²) et enfin les 4 fourches n°3 vont créer des branches n°4 (probabilité 0,5⁴).

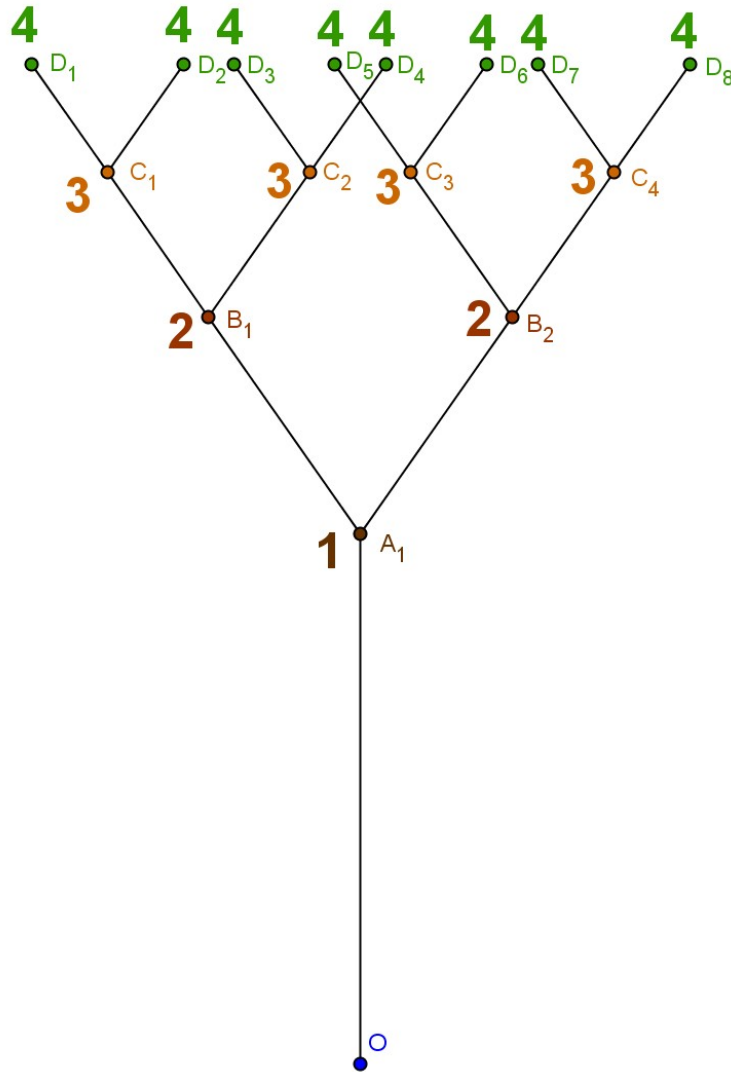


Figure 3 : arbre le plus jeune que nous puissions avoir

Ainsi la probabilité d'avoir un arbre de 4 ans est $0,5 \times 0,5^2 \times 0,5^4 = 0,5^7$ (7 correspond au nombre de fourches).

Pour le cas général nous avons la propriété suivante :

Propriété : si la matrice d'évolution a la même valeur a sur sa diagonale, si on note NE le nombre d'évolutions (nombre de lignes de la matrice d'évolution plus 1) alors l'âge du plus jeune arbre sera NE avec une probabilité de $a^{1+2+2^2+\dots+2^{NE-2}}$

A2) Augmenter le nombre de simulations pour déterminer la loi de l'âge

Nous avons réalisé davantage de simulations pour essayer de nous faire une meilleure idée de la courbe de la figure 2. Nous avons pour cela modifié notre programme en rajoutant une boucle qui réalise le nombre de fois voulu la simulation. Dans nos premiers essais le programme s'est bloqué. Nous avons alors limité l'âge à 10 ans pour éviter de bloquer notre programme.

Nous avons réalisé 4 simulations de 10000, soit 40000 simulations qui nous donnent les résultats suivants (figure 4).

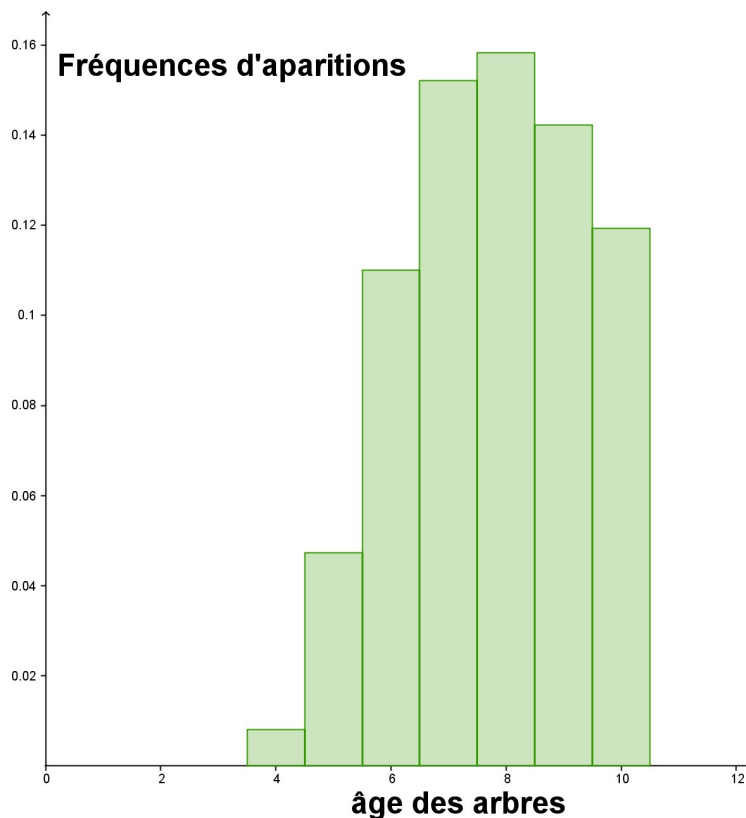


Figure 4 : résultats pour 40000 simulations

Il reste à trouver une suite (3) qui passe par ces points.

A3) Recherche sur des matrices plus petites

Pour essayer d'avoir un résultat théorique nous avons travaillé sur une matrice plus petite.

Si $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ on est dans une situation où un arbre ne peut avoir que deux types de branches (n°1 et n°2). Une branche n°2 évolue toujours (4) en deux branches n°2 et une branche n°1 évolue soit en deux branches n°2 (si $p \leq 0,3$), soit en une branche n°1 et en une branche n°2.

Dans le cas ci-dessus, $P(\text{age}=2)=0,3$, $P(\text{age}=3)=0,7 \times 0,3$, $P(\text{age}=4)=0,7 \times 0,7 \times 0,3$. Nous généralisons (5) à $P(\text{age}=n)=0,7^{n-2} \times 0,3$ pour $n \geq 2$ (figure 5).

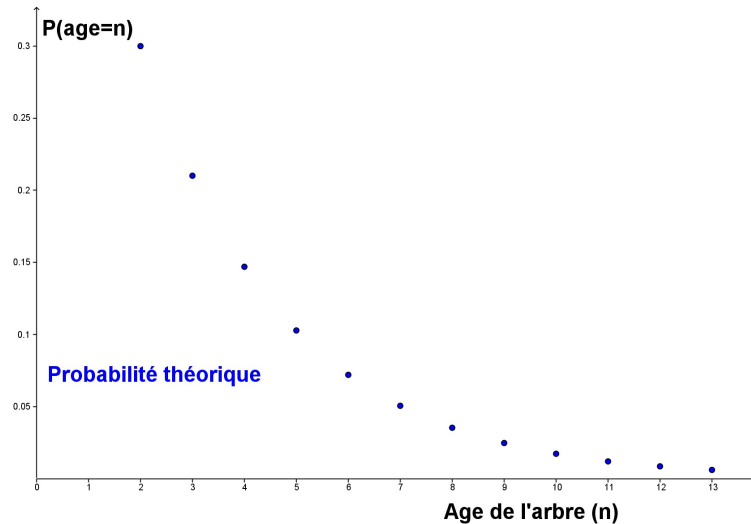


Figure 5 : Résultats théoriques pour un arbre à deux types de branches

Avec l'aide du programme, nous avons réalisé 3000 simulations d'évolution avec la nouvelle matrice (figure 6).

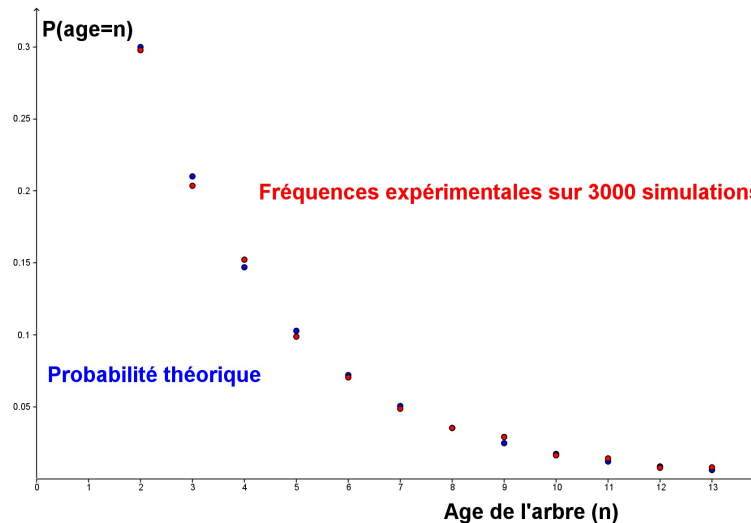


Figure 6 : Résultats théoriques et expérimentaux pour un arbre à deux types de branches

Grande idée de Tanguy.

Pour la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ nous avons trouvé $P(\text{age} = n) = 0,7^{n-2} \times 0,3$ pour $n \geq 2$.

Nous pouvons ainsi obtenir (pour $n \geq 2$) **(6)**

$$P(\text{age} \leq n) = 0,3 + 0,3 \times 0,7 + \dots + 0,3 \times 0,7^{n-2} = 0,3 \times (1 + 0,7 + \dots + 0,7^{n-2}) = 0,3 \times \frac{1 - 0,7^{n-1}}{1 - 0,7} = 1 - 0,7^{n-1}$$

Prenons la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ et cherchons à exprimer $P(\text{age} \leq n)$ pour $n \geq 3$. Nous noterons

$P(n, M)$ cette probabilité.

La branche de départ, avec un n°1, va évoluer en deux branches :

n°2-n°2	n°1-n°2	n°1-n°3
avec une probabilité de 0,3	avec une probabilité de 0,2	avec une probabilité de 0,5
Sur chaque branche n°2 l'évolution va se faire avec la matrice	Sur le même principe, nous obtenons comme « milieu » de la	La fin de la formule de $P(n, M)$
$Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ et les deux branches sont indépendantes.	formule de $P(n, M)$	sera $0,5 \times P(n-1, M)$
Ainsi la probabilité de cette partie de l'arbre ait un âge inférieur ou égale à $n-1$, c'est-à-dire que chaque branche ait un âge inférieur ou égal à $n-1$ va valoir le produit des probabilités (les branches sont indépendantes) soit	$0,2 \times (P(n-1, M) \times (1 - 0,7^{n-2}))$	
$(1 - 0,7^{n-2})^2$		
Ce qui donne comme début de formule pour $P(n, M)$		
$0,3 \times (1 - 0,7^{n-2})^2$		

Finalement, nous arrivons à $P(n, M) = P_n = 0,3 \times (1 - 0,7^{n-2})^2 + 0,2 \times (1 - 0,7^{n-2}) P_{n-1} + 0,5 \times P_{n-1}$ avec $n > 3$ et $P_3 = 0,3^3$. Graphiquement nous obtenons pour $P(\text{age} \leq n)$ la figure 7.

Remarque : $P(\text{age} = n) = P(\text{age} \leq n) - P(\text{age} \leq n-1)$

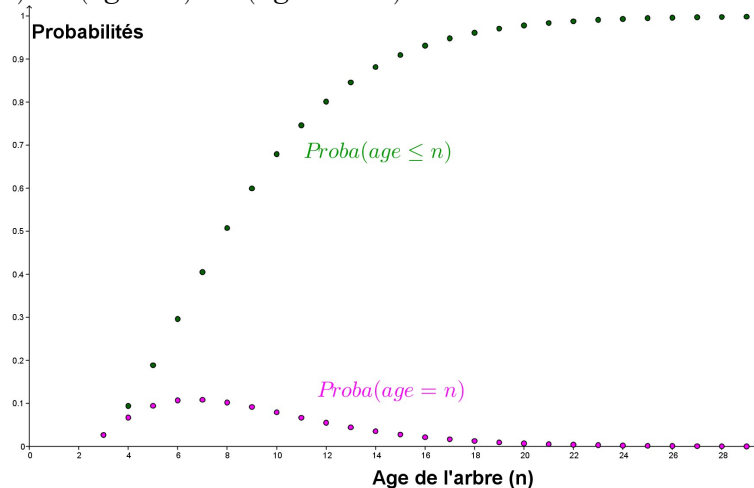


Figure 7 : résultats théoriques pour un arbre à trois types de branches

Nous avons voulu simuler cette évolution pour comparer nos résultats théoriques et expérimentaux. Malheureusement le langage LARP n'est pas assez puissant pour réaliser de nombreuses simulations. Nous avons refait nos programmes en Python, ce qui nous a permis de faire assez rapidement 30000 simulations, voici nos résultats (figure 8).

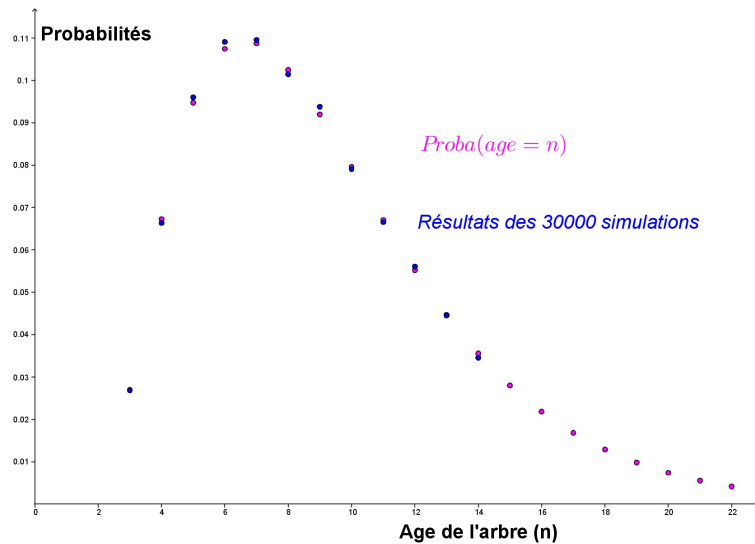


Figure 8 : résultats théoriques et expérimentaux sur un arbre à trois types de branches

Nous avons aussi fait varier les valeurs de la première ligne (0,3 0,5 1) sachant que la dernière doit être 1. Quand la première valeur augmente (la deuxième fixe), la forme de la bosse est de plus en plus haute vers la gauche (figure 9).

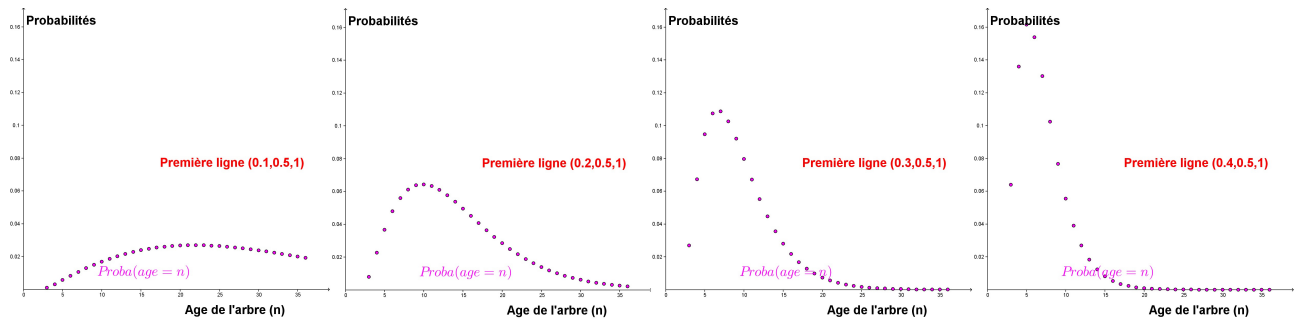


Figure 9 : courbes des probabilité des âges des arbres quand le premier paramètre varie

Quand la deuxième valeur augmente (la première fixe), la bosse baisse mais ne semble pas se déplacer (figure 10).

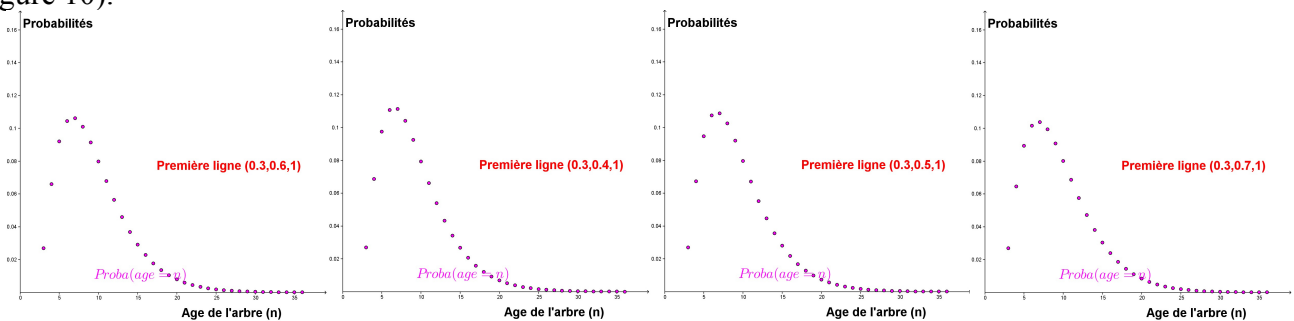


Figure 10 : courbes des probabilités des âges des arbres quand le deuxième paramètre varie

Il est possible de généraliser notre formule à des arbres avec plus de numéros de branche possible.

B. Modélisation géométrique

Nous avons abordé cette partie en début d'année mais de nombreux paramètres sont à régler.
Par exemple, est-ce que l'angle des fourches est toujours le même ou dépend du numéro de la branche ?
L'ordre des numéros des branches est important, les numéros les plus petits doivent-ils rester « proche » de l'axe de départ ?

Nous rappelons que la branche n°i est de longueur $1/i$.

Pour l'angle nous avons pris comme modèle qu'une branche va donner deux branches numéros x et y (voir figure 11). Les angles α et β sont deux paramètres et n est « l'âge » de la branche.

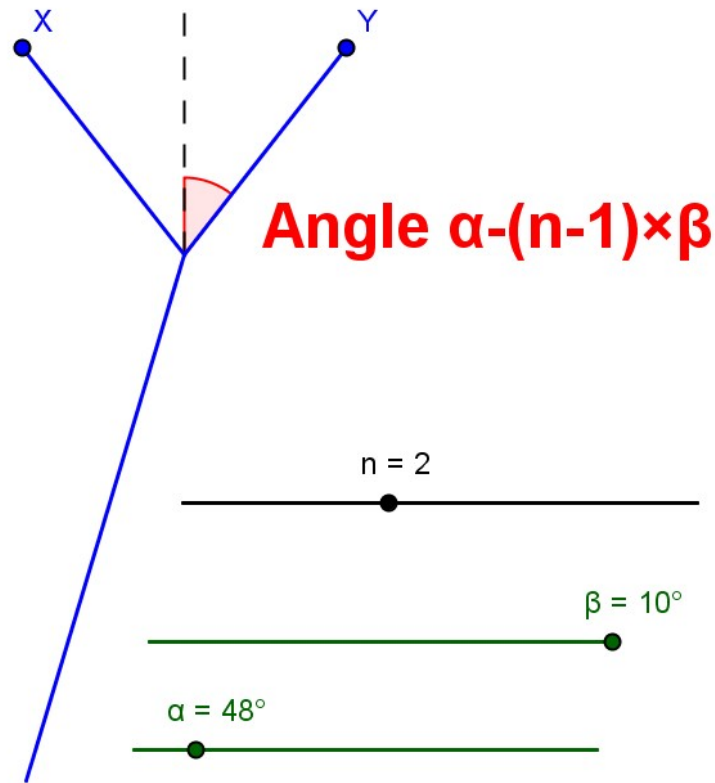


Figure 11 : angle d'évolution d'une branche

Exemples :

La liste d'évolution ci-dessous va donner l'arbre de la figure 13.

Liste des numéros de branche à l'âge 1 est 1

Liste des numéros de branche à l'âge 2 est 2 2

Liste des numéros de branche à l'âge 3 est 4 2 3 3

Liste des numéros de branche à l'âge 4 est 4 4 3 2 4 4 4 4

Liste des numéros de branche à l'âge 5 est 4 4 4 4 4 4 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4

Liste des numéros de branche à l'âge 6 est 4

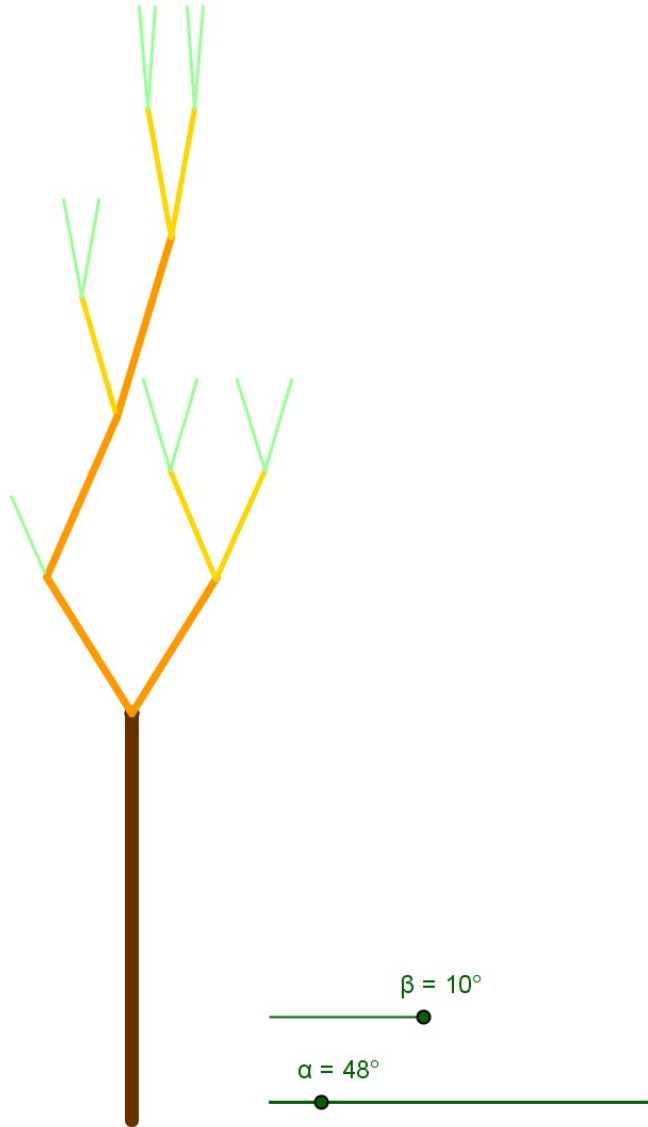


Figure 13 : exemple de réalisation d'arbre de 6 ans

Une autre liste d'évolution va donner un autre exemple d'arbre (figure 14).

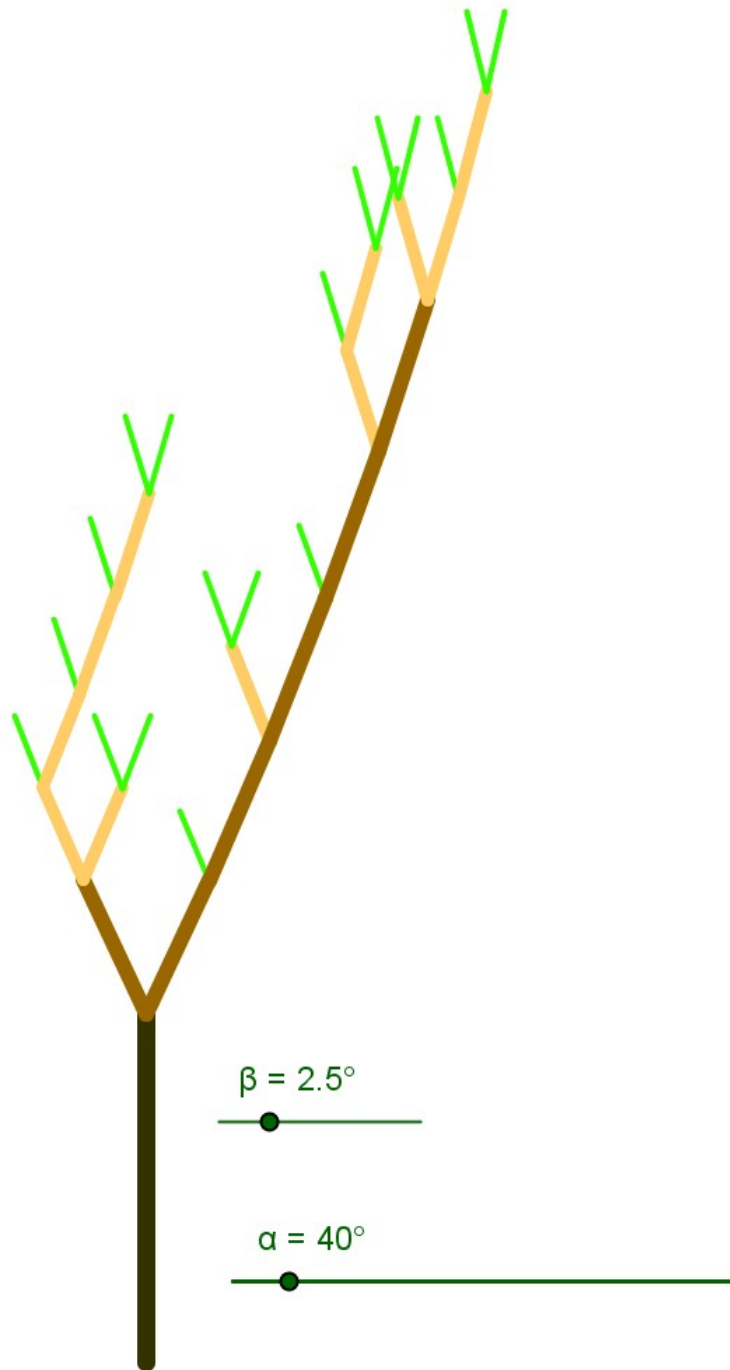


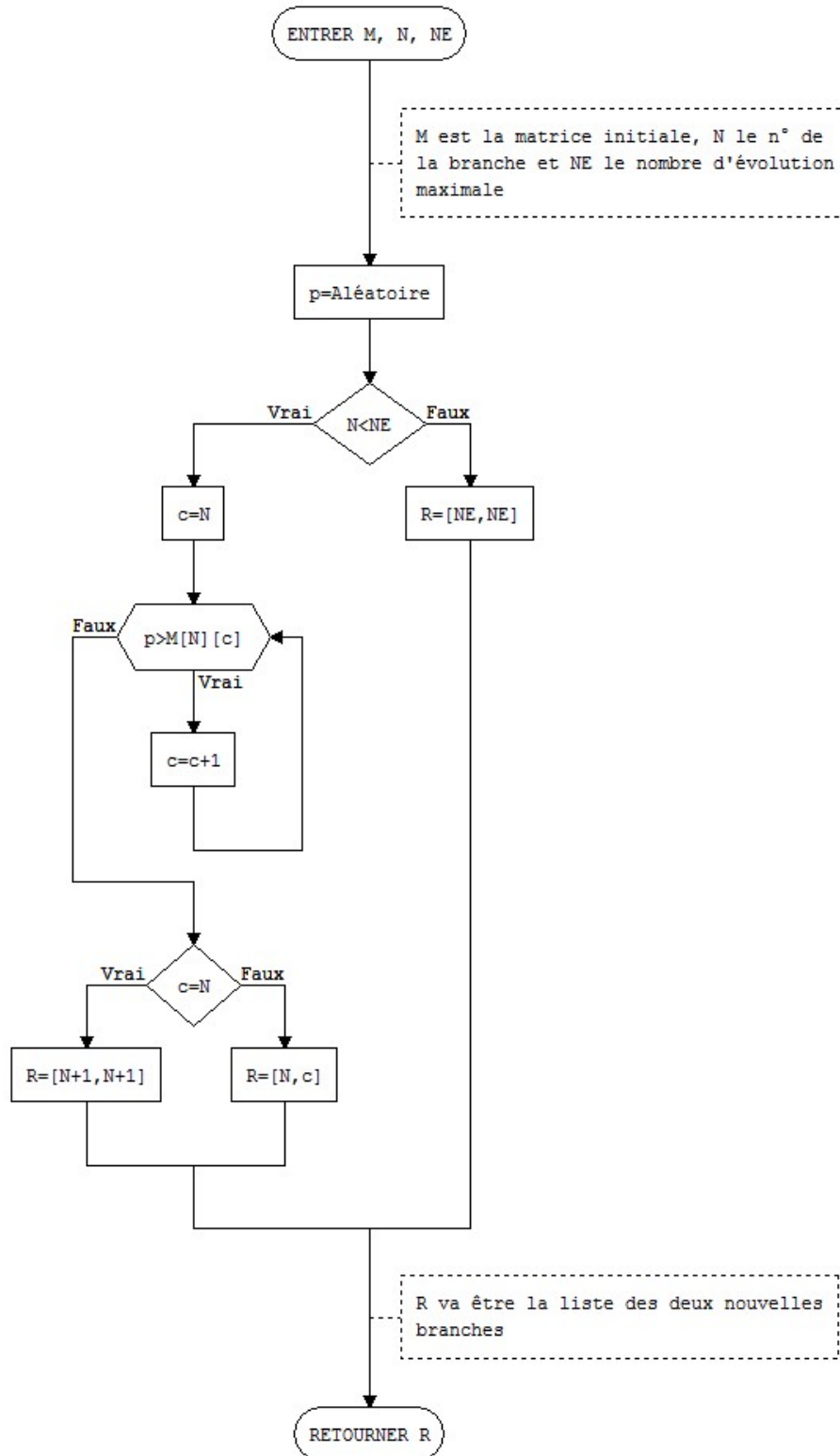
Figure 14 : exemple de réalisation d'arbre de 9 ans

ANNEXE 1

Programmes en LARP présentés sous forme d'organigramme

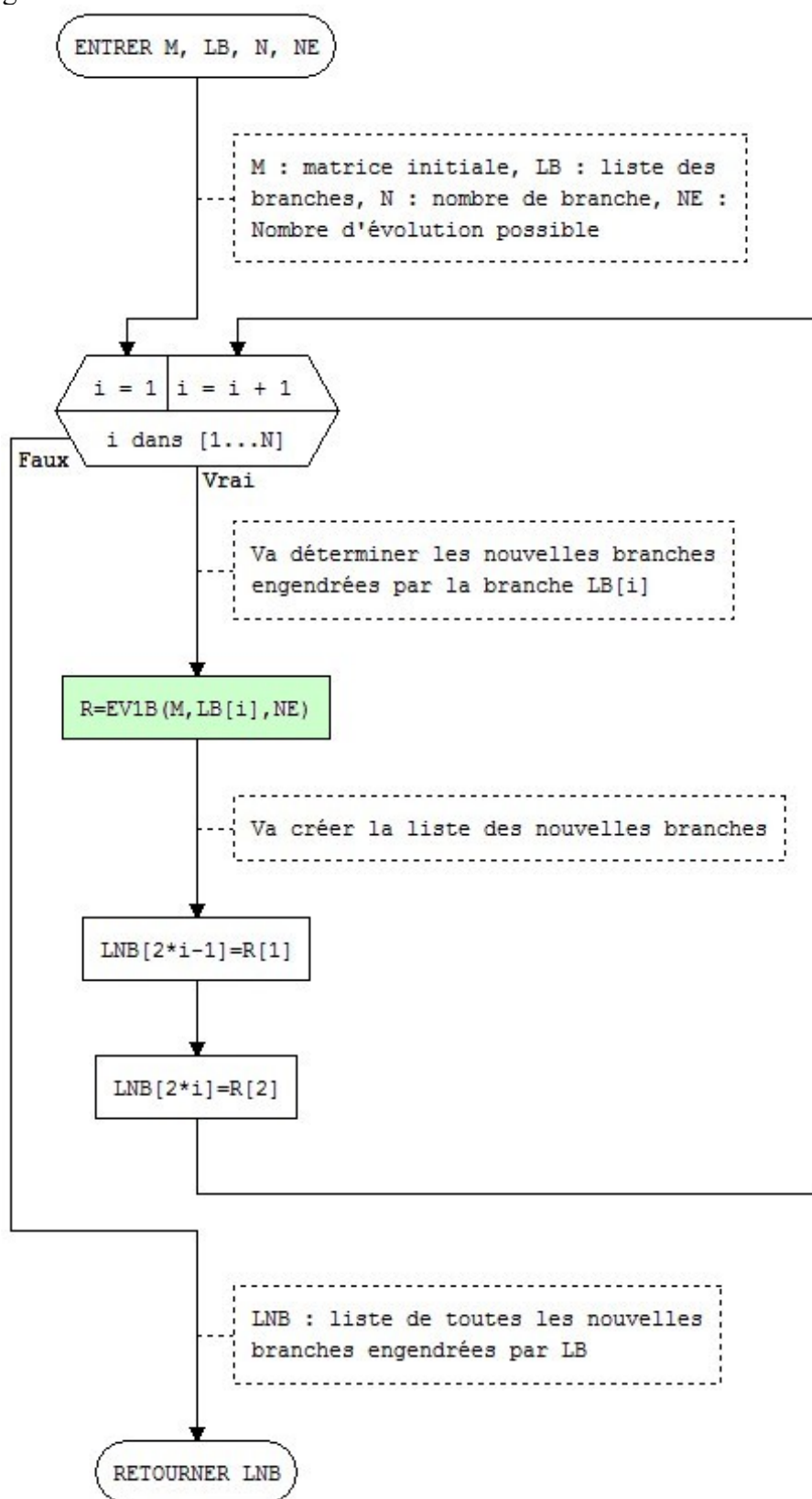
Sous programme EV1B - Évolution d'une branche

Il détermine l'évolution d'une branche n°N connaissant la matrice d'évolution (M) et le nombre d'évolution possible (NE). Il retourne R les deux nouvelles branches



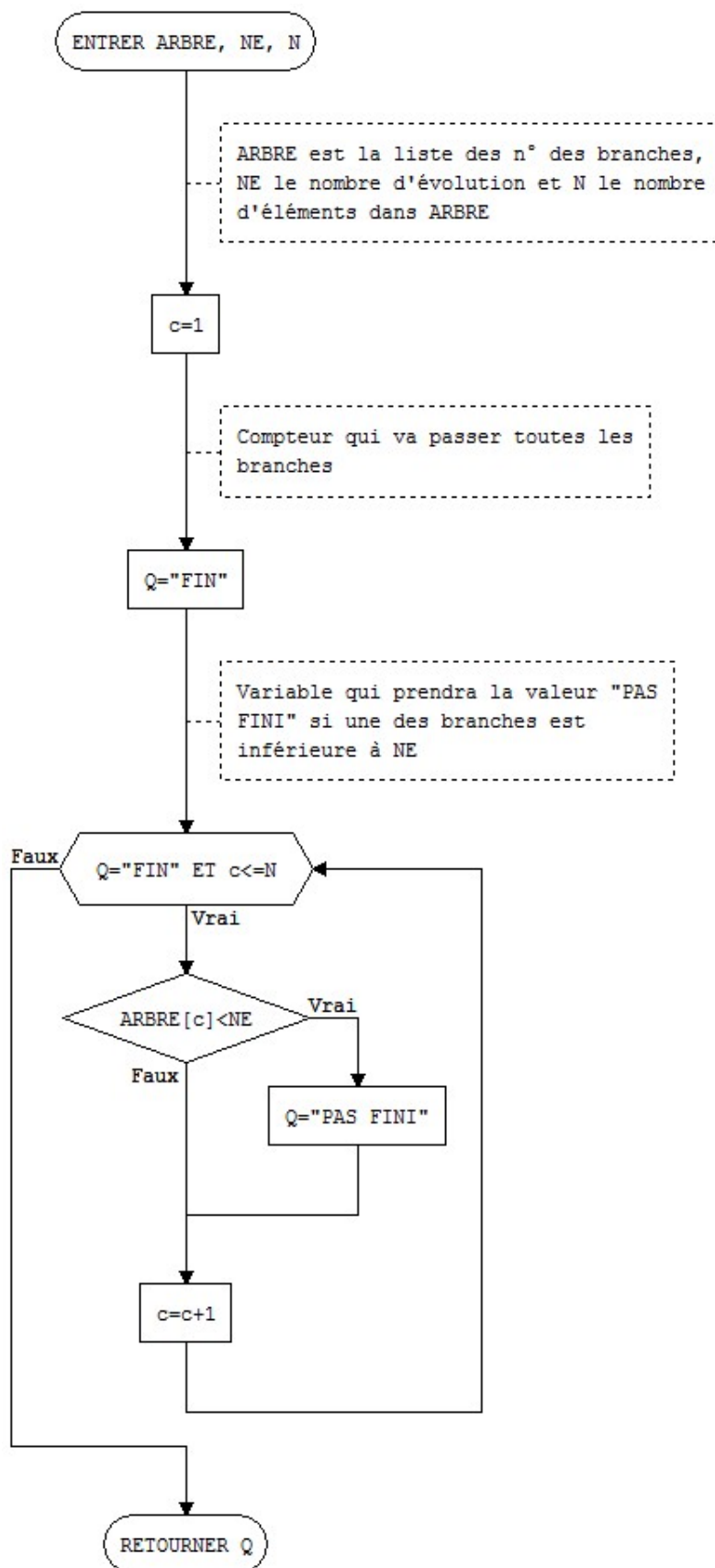
Sous programme EVDB - Évolution de branches

Il détermine l'évolution d'une liste de branches (LB), connaissant la matrice d'évolution (M), le nombre d'évolution possible (NE) et le nombre de branches (N). Il retourne la nouvelle liste de branches (LNB) deux fois plus longue.



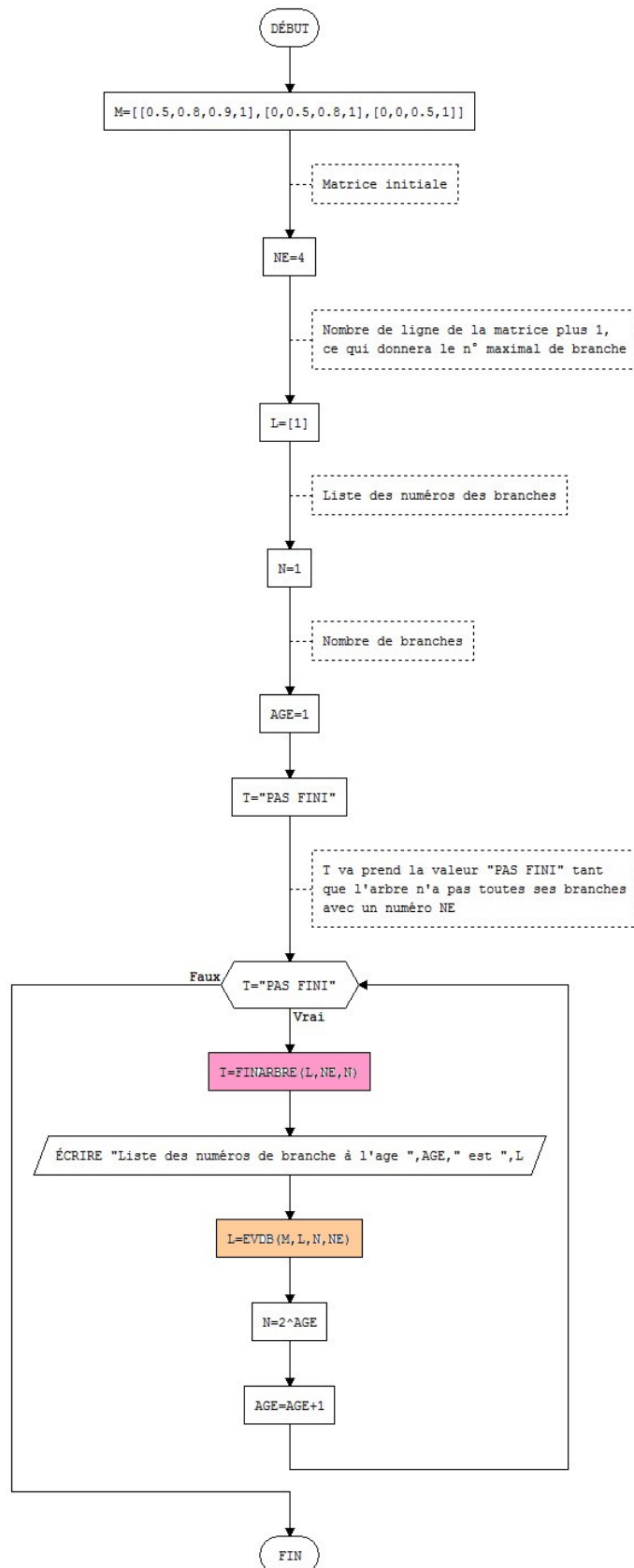
Sous programme FINARBRE -Fin d'un arbre

Il détermine si une liste de branches (ARBRE) composées de N branches est finie. C'est-à-dire si tous les numéros des branches de l'arbre valent NE.



Programme PRINCIPAL

Fait une évolution d'arbre. La matrice d'évolution M et NE sont rentrées dans le programme



Notes d'édition :

(1) La matrice M est supposée être triangulaire supérieure c'est-à-dire avoir des zéros dans la triangle inférieur sous la diagonale et on suppose de plus que la suite des coefficients est croissante sur chaque ligne. En réalité elle provient d'une autre matrice P plus naturelle dite stochastique qui contient par ligne les probabilités $p_{i,j}$ d'évolution de la branche n° i , la ligne n° i de M étant constituée des sommes cumulées de ligne n° i de P .

(2) En fait on s'aperçoit que contrairement au processus expliqué page 1, dans le programme une branche n° 4 donne à chaque fois naissance à deux branches de même type, ce qui donne un nombre de branches qui suit les puissances de 2. Cela revient à rajouter une 4ème ligne à la matrice ayant 1 en position diagonale et 0 ailleurs.

(3) Plutôt une loi de probabilité qui corresponde à cet histogramme.

(4) Il semble qu'on suive maintenant la variante adoptée dans l'exemple page 2

(5) Le lecteur averti aura reconnu une loi géométrique

(6) Ce résultat peut aussi se calculer en passant au complémentaire : $P(\text{age} > n) = 0,7^n$