Arbres binaires planaires

Année 2016-2017

Élèves :

MARIE--PUIG Léna, MOISSY Agathe, MUSCAT Marie-Adèle, NGUYEN Mathilde, PERARNAU Bertrand, FALL Zara, GOMES DE ALMEIDA Jérôme, GARNIER Alexis, LAFON Gaëlle ; élèves de cinquième et de quatrième.

Encadrés par : les professeurs Monsieur DUPRAT, Madame MAIOUF et la chercheuse Emily BURGUNDER (Université Paul Sabatier).

Établissements : Michelet Annexe / Collège Jolimont de Toulouse

Sujet :

Considérons des chemins reliant un nombre d'entrées défini à une sortie unique.

Les règles sont que :

- tous les chemins doivent se rejoindre
- deux chemins ne peuvent pas se croiser
- seuls deux chemins à la fois peuvent se rejoindre.

Problématique :

Si on connaît le nombre d'entrées peut-on savoir le nombre de chemins possibles ?

Réponse :

Nous avons trouvé que pour n + 1 entrées, le nombre de chemins possibles est donné par la formule :

$$\frac{2^n \times (2n-1) \times (2n-3) \times \ldots \times 1}{(n+1) \times n \times \ldots \times 1}$$ [1]

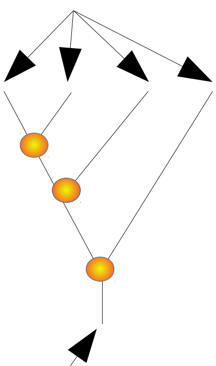
Démarche :

Ne pouvant pas répondre directement à cette problématique, nous l'avons simplifiée de manière à y répondre progressivement.

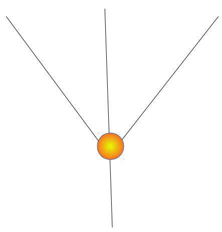
Nous avons d'abord résolu des petits cas, c'est-à-dire des arbres à 1 entrée, 2 entrées, 3 et 4.

Par exemple :

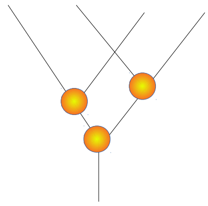
4 entrées



1 sortie



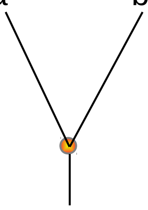
Cet arbre est faux car trois chemins se rejoignent ensemble.



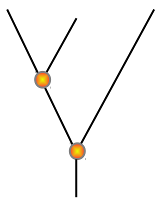
Cet arbre est faux car deux chemins se croisent.

La notation en lettres :

Afin de pouvoir comparer plus facilement les arbres nous avons mis en place une notation qui traduit les arbres par des lettres.



a et b se rejoignent directement ensemble ; on note (a;b)

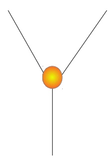


a et b se rejoignent directement ensemble, sans c puis a et b qui ne font plus qu'un vont rejoindre c ; on note (a;b)c (ab;c)

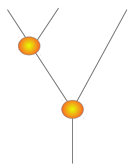
Les possibilités(récapitulatif) :

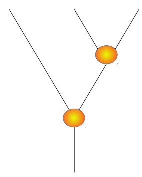
Pour 1 entrée il y a 1 possibilité

Pour 2 entrées il y a 1 possibilité

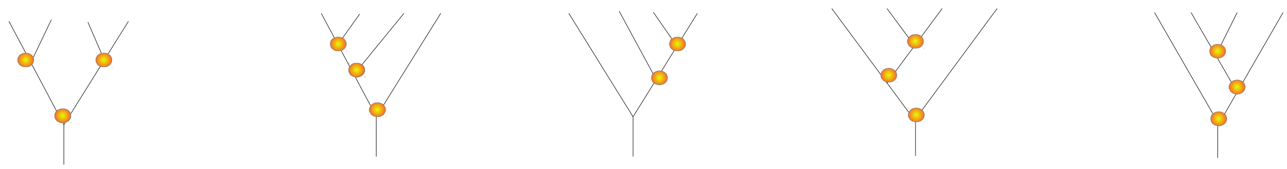


Pour 3 entrées il y a 2 possibilités





Pour 4 entrées il y a 5 possibilités



Pour 5 entrées nous avons compté 14 possibilités, pour 6 entrées 42 possibilités.

Après avoir remarqué que nous avions obtenu les mêmes résultats que le groupe « *triangulation* », nous avons cherché à démontrer que nos résultats étaient identiques. Pour cela, nous devions établir des liens entre les découpages de polygones et les arbres. [2]

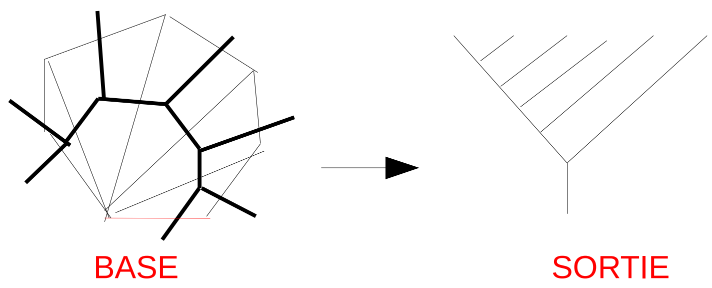
Problématique des triangulations

De quelle manière peut-on découper un polygone en un nombre minimal de triangles ? Combien de découpages différents y a-t-il par polygone ?

Pour passer d'un polygone à un arbre il faut : [3]

- déterminer la base du polygone qui correspond à la sortie de l'arbre
- placer au centre de chaque triangle un point (futur nœud)
- 3 traits (futurs chemins) partent de chaque nœud et traversent chaque côté du triangle (Un même chemin relie les points de 2 triangles mitoyens, en traversant leur côté commun).

Par exemple :



De plus :

- il y a une entrée de moins que le nombre de côtés du polygone : Le dernier côté du polygone correspond à la sortie
(dans l'exemple ci-dessus, pour un polygone à 7 côtés, l'arbre a 6 entrées).

- un polygone a 2 triangles de moins que son nombre de côtés ;
En effet, un découpage de polygone peut être construit de la manière suivante : on part d'un sommet du polygone, et on le relie à tous ses autres sommets ; si on note *n* le nombre de côtés du polygone, on obtient bien n - 2 triangles car deux des segments reliant le sommet choisi aux autres sommets du polygone sont déjà des côtés du polygone.

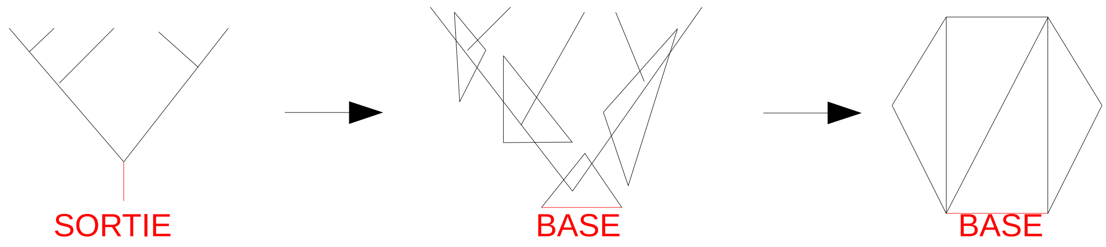
On peut en déduire qu'un polygone donne un arbre précis car

- le nombre de côtés du polygone et la position de sa base définissent le nombre d’entrées de l’arbre, le nombre de nœuds et la position de la sortie.
- L’agencement des triangles au sein du polygone (les triangles mitoyens par rapport à la base) détermine l’agencement, l’ordre des nœuds par rapport à la sortie. Ainsi, un polygone à *n* côtés ne donne qu'un arbre à *n* - 1 entrées.

Pour passer d’un arbre à un polygone :

- la sortie correspond à la base du polygone
- tracer un triangle autour de chaque nœud de telle manière que chaque branche sorte par un côté du triangle
- « redresser » le polygone (lorsque tous les triangles ont été tracés)

Par exemple :



De plus :

- il y a autant de triangles que de nœuds
- le polygone a un côté de plus que le nombre d’entrée (la base correspond à la sortie).

Par exemple, pour un arbre à 5 entrées, on obtient un hexagone (6 côtés),

-un polygone a 2 côtés de plus que le nombre de triangles.

En effet, il y a 1 nœud de moins que le nombre d’entrées de l’arbre (les chemins se rejoignant deux par deux, ceux-ci forment un seul nœud. Pour un arbre à deux entrées, il y a donc un seul nœud, et à chaque fois que l'on ajoute une entrée on rajoute donc un seul nœud supplémentaire). Comme le nombre de côtés du polygone est le nombre d’entrées de l’arbre plus 1 (bas) alors il y a deux côtés de plus que de nœuds.

De ce fait, un arbre correspond à un seul découpage de polygone car

- Le nombre d’entrées et de nœuds de l’arbre définit le nombre de côtés et donc de triangles du polygone.
- L’agencement, l’ordre des nœuds par rapport à la sortie définit la position, l’agencement des triangles dans le polygone par rapport à la base.

Donc un polygone (et son découpage en triangles) correspond finalement à un seul arbre et inversement.

Donc les résultats pour le nombre de possibilités d'arbres à n entrées ou de découpages de polygones à $n + 1$ côtés (ou $n - 1$ triangles) sont les mêmes.

On peut donc appliquer la formule trouvée pour calculer le nombre de découpages d'un polygone pour calculer le nombre d'arbres possibles pour un nombre donné d'entrées :

$$\frac{2^n \times (2n-1) \times (2n-3) \times \ldots \times 1}{(n+1) \times n \times \ldots \times 1}$$

Pour le groupe « *triangulation* » n représente le nombre de triangles. Or le nombre de triangles est égal au nombre de nœuds d'un arbre, on applique donc cette formule pour un arbre à $(n + 1)$ entrées.

Cette formule est donc applicable à notre sujet, nous avons donc calculé le nombre de possibilités pour 7, 8, 9 entrées...

Les possibilités(suite) :

Pour 7 entrées il y a 132 possibilités

Pour 8 entrées il y a 429 possibilités

Pour 9 entrées il y a 1430 possibilités…

Conclusion :

Nous avons donc répondu à notre problématique ; nous l'avons tout d'abord simplifiée en travaillant sur de petits cas(pour créer une base de données) puis, nous étant rendus compte que nous cherchions la même formule que le groupe triangulation, plus en mesure de la trouver que nous, nous avons démontré que les sujets étaient liés, que l'on pouvait passer de l'un à l'autre et que l'on pouvait donc appliquer la formule trouvée par l'autre groupe à nos recherches. C'est donc ce que nous avons fait, et ainsi, nous avons résolu la problématique : peut-on trouver une formule qui permet de connaître le nombre d'arbres possibles pour un nombre d'entrées donné ?

Réponse : Oui, c'est possible.

Notes d'édition :

[1] Les nombres ainsi trouvés sont appelés les nombres de Catalan du nom du mathématicien belge Eugène Charles **Catalan** (1814-1894).

[2] La question est traitée dans l'article « Triangulation », écrits par d'autres élèves des mêmes établissements. Ils comptent le nombre de façon de découper un polygone à n côtés en n-2 triangles, uniquement en traçant des segments qui relient des sommets du polygone sans se couper à l'intérieur du polygone.

[3] Soit un polygone convexe P à n+1 côtés, notés de façon circulaire C0, C1, ..., Cn ; la suite de l'article établit une correspondance entre les triangulations de P et les arbres binaires dont la base est C0 et les feuilles sont C1, ..., Cn.