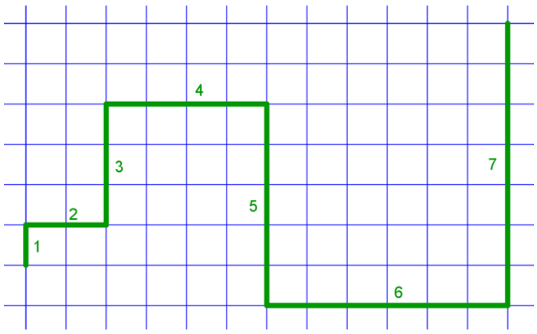
Balade à New-York

Année 2017-2018

Auteurs : Alexandre DELIMAUGES, Inès DEVILLERS, Gwendoline ROUSSEAU (terminale S).
Établissement : Lycée Condorcet, Saint-Quentin (02).
Encadrés par : Fabien AOUSTIN.
Chercheur : Fabien DURAND, Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée (LAMFA).

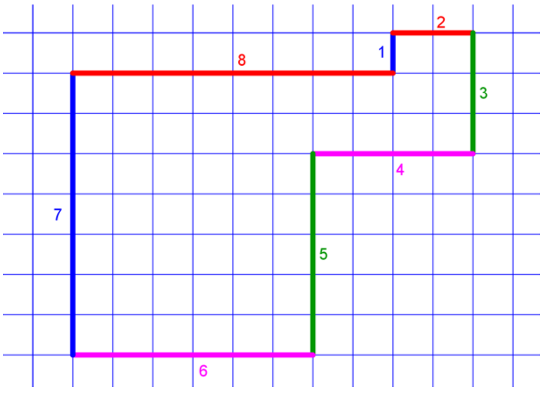
1) Présentation du problème :

Un petit bonhomme se balade dans les rues d'une ville comme New York.
Le plan de cette ville est constitué de blocs.
Pour simplifier, on considère que le plan est une grille parfaite.
À chaque étape, il tourne à gauche ou à droite et avance d'un bloc de plus que précédemment.



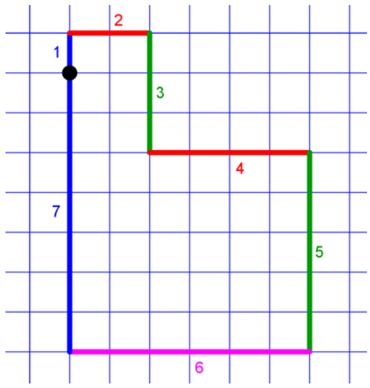
Le problème est de savoir s'il est possible de retourner ainsi au point de départ.
Si cela est possible, en combien d'étapes est-ce réalisable ?

Par tâtonnement, nous avons trouvé une première solution en huit étapes :



2) Quelques notations :

On souhaite éviter les situations comme celle-ci ou le dernier déplacement se fait dans la continuité du premier :



Dans la suite, on considère donc que :
- la première étape se fait en direction du Nord ;
- la dernière se fait vers l'Est ou vers l'Ouest.

Le nombre total d'étapes est donc pair.
On note $2n$ le nombre total de côtés du parcours.

On note aussi :
- S_{Nord} : la somme des déplacements vers le Nord
- S_{Sud} : la somme des déplacements vers le Sud
- S_{Ouest} : la somme des déplacements vers l'Ouest
- S_{Est} : la somme des déplacements vers l'Est

Il y a donc :
• n côtés de longueur impaire : 1, 3, 5, 7, ..., $2n - 1$
• n côtés de longueur paire : 2, 4, 6, 8, ..., $2n$.

3) Constructions d'autres solutions :

3-a) Parcours à 8 côtés :

Pour notre polygone à 8 côtés, on a :

$S_{Nord} = 1 + 7 = 8$ $\qquad$ $S_{Ouest} = 2 + 8 = 10$

$S_{Sud} = 3 + 5 = 8$ $\qquad$ $S_{Est} = 4 + 6 = 10$

Pour les nombres impairs, la répartition est : **1 3 5 7**.
On a associé le plus petit nombre avec le plus grand, et le deuxième avec l'avant dernier.

Pour les nombres pairs, la répartition est : **2 4 6 8**. Le principe est le même.

3-b) Parcours à 16 côtés :

On peut procéder de la même façon pour 16 côtés.

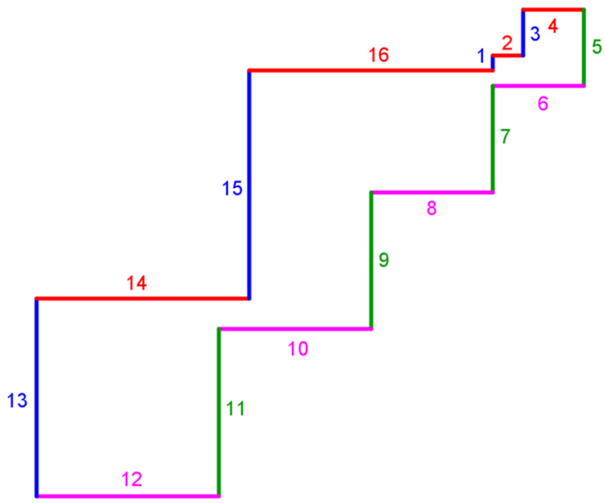
On associe le plus petit nombre impair avec le plus grand, le deuxième avec l'avant dernier, le troisième avec l'avant-avant dernier, etc.

$S_{Nord} = (1 + 15) + (3 + 13) = 16 + 16 = 32$
$S_{Sud} = (5 + 11) + (7 + 9) = 16 + 16 = 32$

On procède de la même façon pour les nombres pairs.

$S_{Ouest} = (2 + 16) + (4 + 14) = 18 + 18 = 36$
$S_{Est} = (6 + 12) + (8 + 10) = 18 + 18 = 36$

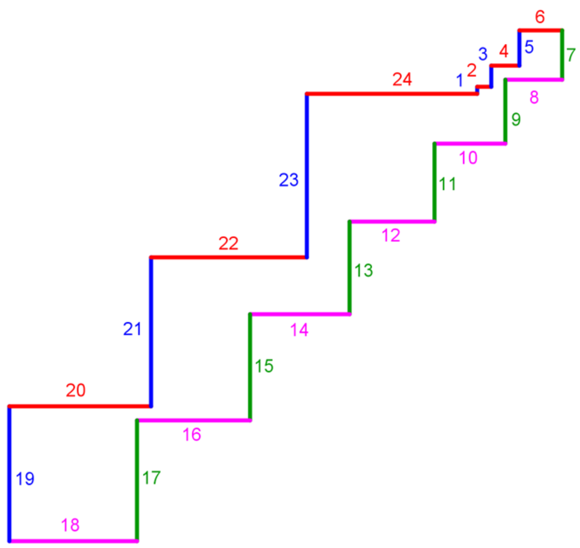
Finalement, on obtient le parcours suivant :



3-c) Parcours à 24 côtés :

On peut procéder de la même façon pour 24 côtés.

$S_{Nord} = (1 + 23) + (3 + 21) + (5 + 19) = 24 + 24 + 24 = 72$
$S_{Sud} = (7 + 17) + (9 + 15) + (11 + 13) = 24 + 24 + 24 = 72$
$S_{Ouest} = (2 + 24) + (4 + 22) + (6 + 20) = 26 + 26 + 26 = 78$
$S_{Est} = (8 + 18) + (10 + 16) + (12 + 14) = 26 + 26 + 26 = 78$



3-d) Avec un multiple de 8 :

Ce procédé fonctionne pour tout polygone dont le nombre de côtés est un multiple de 8.
Si le nombre de côtés est égal à $8k$, on peut suivre le tableau suivant :

Vers le Nord	Vers le Sud
k premiers nombre impairs : de 1 jusqu'à $2k - 1$. k derniers nombres impairs : de $6k + 1$ jusqu'à $8k - 1$.	Les nombres impairs restants de $2k + 1$ jusqu'à $6k - 1$.

Vers l'Est	Vers l'Ouest
k premiers nombres pairs : de 2 jusqu'à $2k$ k derniers nombres pairs : de $6k + 2$ jusqu'à $8k$.	Les nombres pairs restants de $2k + 2$ jusqu'à $6k$.

4) Étude de la réciproque :

On suppose maintenant que le bonhomme arrive à revenir à son point de départ en $2n$ étapes.
On va montrer que ce nombre d'étapes est un multiple de 8.

On utilise la formule pour la somme des termes d'une suite arithmétique :

$$S = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} S_{impair} &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) \\ &= \frac{(1 + (2n - 1)) \times n}{2} = \frac{2n \times n}{2} = n^2 \end{aligned}$$

On a aussi : $S_{impair} = S_{Nord} + S_{Sud}$.
Comme le bonhomme revient à son point de départ, il se déplace du même nombre de blocs au Nord et au Sud :

$$S_{Nord} = S_{Sud}$$

La somme des valeurs impaires est donc un nombre pair :

$$S_{impair} = S_{Nord} + S_{Sud} = 2\, S_{Nord}$$

Comme $S_{impair} = n^2$ alors n^2 est forcément un nombre pair donc ***n* est un nombre pair aussi.**

De même, pour les valeurs paires, on a :

$$\begin{aligned} S_{pair} &= 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = \frac{(2 + 2n) \times n}{2} \\ &= \frac{2n + 2n^2}{2} = n + n^2 = n(n + 1) \end{aligned}$$

On a aussi : $S_{pair} = S_{Ouest} + S_{Est}$.

Comme le bonhomme revient à son point de départ, il se déplace du même nombre de blocs à l'Ouest et à l'Est :

$$S_{Ouest} = S_{Est}$$

Comme S_{Ouest} et S_{Est} sont des sommes de nombres pairs, ce sont aussi des nombres pairs :

$$S_{Ouest} = S_{Est} = 2x, \text{ avec } x \text{ un nombre entier}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} S_{pair} &= S_{Ouest} + S_{Est} \\ &= 2x + 2x \\ &= 4x \end{aligned}$$

Comme $S_{pair} = n \times (n + 1)$, on en déduit que **$n(n + 1)$ est un multiple de 4.**

Le nombre n est pair donc $n + 1$ est impair.
On a donc :

$$\underbrace{n}_{\text{pair}} \times \underbrace{(n+1)}_{\text{impair}} = \underbrace{4x}_{\text{multiple de 4}}$$

Le nombre **n est donc un multiple de 4.**

Si notre bonhomme revient à son point de départ, **le nombre d'étapes est un multiple de 8 !**

5) Nombre de solutions :

5-a) Nombre de solutions à 8 côtés :

On garde les mêmes notations que précédemment.

Nous avons déjà trouvé une solution (voir paragraphe 1) et on en obtient facilement une deuxième par symétrie si le déplacement de deux carreaux se fait vers l'Ouest plutôt que vers l'Est. Dans la suite, on supposera donc pour simplifier que le déplacement de deux carreaux se fait toujours vers l'Est.

La somme des déplacements vers le Nord doit être égale à : $S_{Nord} = (1 + 3 + 5 + 7)/2 = 8$.
S_{Nord} peut être la somme de deux entiers impairs ; la seule possibilité est $S_{Nord} = 1 + 7$ (car on avait imposé que le déplacement de 1 carreau se fasse vers le Nord).
S_{Nord} ne peut pas être la somme de trois entiers impairs car la somme des trois plus petits est déjà trop grande : $1 + 3 + 5 = 9$.

La somme des déplacements vers l'Est doit être égale à : $S_{Est} = (2 + 4 + 6 + 8)/2 = 10$.
Le même raisonnement permet d'établir qu'il n'y a qu'une seule somme possible : $S_{Est} = 2 + 8$.

Comme il n'y a qu'une seule possibilité pour S_{Nord} et une seule possibilité pour S_{Est} il n'y a qu'une seule solution à notre problème pour huit étapes.

5-b) Nombre de solutions à 16 côtés :

On cherche toutes les possibilités pour les déplacements vers le Nord.
On doit avoir $S_{Nord} = (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15)/2 = 32$.
Une somme de deux termes, ce n'est pas assez car la plus grande vaut $1 + 15 = 16 < 32$ (1).
Une somme de trois termes ne peut pas convenir car la somme de trois nombres impairs est impaire et n'est donc pas égale à 32.
Pour une somme de quatre termes, les possibilités sont :

$S_{Nord} = 1 + 7 + 9 + 15$
$S_{Nord} = 1 + 7 + 11 + 13$
$S_{Nord} = 1 + 5 + 11 + 15$
$S_{Nord} = 1 + 3 + 13 + 15$

Une somme de cinq termes ne peut pas convenir car la somme de cinq nombres impairs est impaire et n'est donc pas égale à 32.
Une somme de six termes, c'est trop car la plus petite vaut $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 > 32$.

On cherche maintenant toutes les dispositions pour les déplacements vers l'Est.
On doit avoir $S_{Est} = (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16)/2 = 36$.
Nous avons remarqué qu'une disposition vers le Nord donne une disposition vers l'Est en ajoutant 1 à chaque terme (2).

$S_{Nord} = 1 + 7 + 9 + 15$	donne	$S_{Est} = 2 + 8 + 10 + 16$
$S_{Nord} = 1 + 7 + 11 + 13$	donne	$S_{Est} = 2 + 8 + 12 + 14$
$S_{Nord} = 1 + 5 + 11 + 15$	donne	$S_{Est} = 2 + 6 + 12 + 16$
$S_{Nord} = 1 + 3 + 13 + 15$	donne	$S_{Est} = 2 + 4 + 14 + 16$

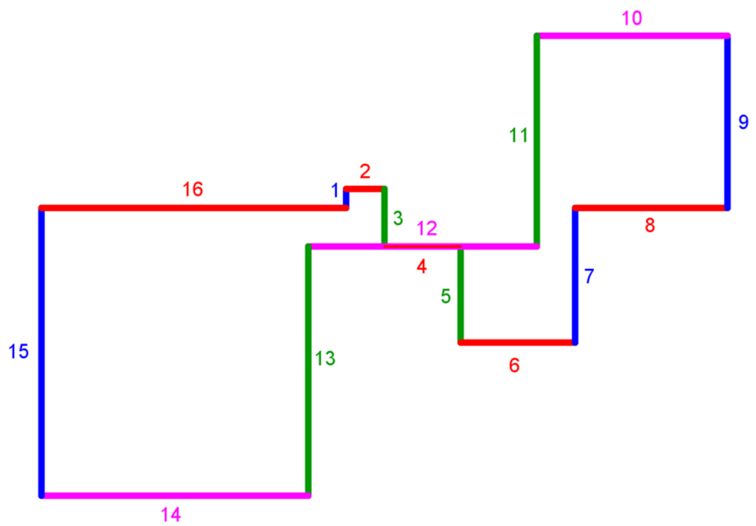
Il reste donc à étudier les sommes d'un nombre impair de nombre pairs.
Trois nombres ne suffisent pas car la plus grande somme vaut $2 + 14 + 16 = 32 < 36$.
Pour une somme de cinq nombres pairs nous avons trouvé :

$S_{Est} = 2 + 4 + 6 + 8 + 16$
$S_{Est} = 2 + 4 + 6 + 10 + 14$
$S_{Est} = 2 + 4 + 8 + 10 + 12$

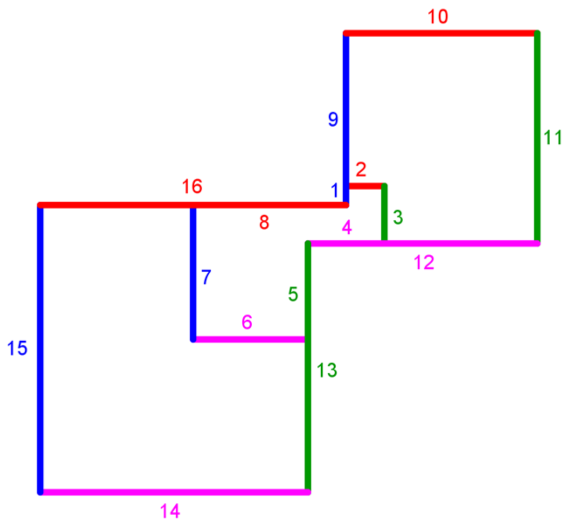
Pour les sommes de 7 nombres pairs, la plus petite vaut : $2 + 4 + 6 + 8 +10 +12 = 42 > 36$.

En tout, on a 4 possibilités pour S_{Nord} et 7 possibilités pour S_{Est}.
Au total, le nombre de possibilités à notre problème pour 16 côtés est égal à $4 \times 7 = 28$.

Par exemple, avec $S_{Nord} = 1 + 7 + 9 + 15$ et $S_{Est} = 2 + 4 + 6 + 8 + 16$ on obtient :



Et avec $S_{Nord} = 1 + 7 + 9 + 15$ et $S_{Est} = 2 + 8 + 10 + 16$ on obtient :



5-c) Nombre de solutions à 24 côtés :

On cherche toutes les possibilités pour les déplacements vers le Nord.
On doit avoir $S_{Nord} = (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23)/2 = 72$.
Une somme de deux termes, ce n'est pas assez car la plus grande vaut $1 + 23 = 24 < 72$.
Une somme de trois termes ne peut pas convenir car la somme de trois nombres impairs est impaire et n'est donc pas égale à 72.
Une somme de quatre termes, ce n'est pas assez car la plus grande vaut $1 + 19 + 21 + 23 = 64 < 72$.
Une somme de cinq termes ne peut pas convenir car la somme de cinq nombres impairs est impaire et n'est donc pas égale à 72.
Pour les sommes de six termes, nous en avons trouvé plusieurs :

$S_{Nord} = 1 + 3 + 5 + 19 + 21 + 23$
$S_{Nord} = 1 + 3 + 7 + 17 + 21 + 23$
$S_{Nord} = 1 + 3 + 9 + 15 + 21 + 23$
$S_{Nord} = 1 + 3 + 11 + 13 +21 + 23$
$S_{Nord} = 1 + 3 + 9 + 17 + 19 + 23$
$S_{Nord} = 1 + 3 + 11 + 17 + 19 + 21$
$S_{Nord} = 1 + 5 + 7 + 15 + 21 + 23$
$S_{Nord} = 1 + 5 + 9 + 13 + 21 + 23$
$S_{Nord} = 1 + 7 + 9 + 11 + 21 + 23$
$S_{Nord} = 1 + 7 + 9 + 13 + 19 + 23$
$S_{Nord} = 1 + 7 + 9 + 15 + 17 + 23$
$S_{Nord} = 1 + 5 + 11 + 13 + 17 + 23$
$S_{Nord} = 1 + 7 + 9 + 15 + 19 + 21$
etc.

Nous savons aussi que chaque combinaison pour S_{Nord} en donnera une pour S_{Est} (en ajoutant 1 à chaque terme) mais, cette méthode devient trop longue car il y a trop de combinaisons à tester.

Nous avons donc écrit un algorithme.
On a : $S_{Nord} = 1 + 3A + 5B + 7C + 9D + 11E + 13F + 15G + 17H + 19I + 21J + 23K = 72$.
Les nombres A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K valent 0 ou 1.
Pour tester toutes les possibilités, on a utilisé des boucles pour.
La variable Total permet de compter toutes les possibilités.

Voici notre algorithme :

```
Total prend la valeur 0
Pour A allant de 0 à 1 faire
  Pour B allant de 0 à 1 faire
    Pour C allant de 0 à 1 faire
      Pour D allant de 0 à 1 faire
        Pour E allant de 0 à 1 faire
          Pour F allant de 0 à 1 faire
            Pour G allant de 0 à 1 faire
              Pour H allant de 0 à 1 faire
                Pour I allant de 0 à 1 faire
                  Pour J allant de 0 à 1 faire
                    Pour K allant de 0 à 1 faire
                      Si 1 + 3A + 5B + 7C + 9D + 11E + 13F + 15G + 17H +
19I + 21J + 23K = 72 alors
                        Total prend la valeur Total + 1
                        Afficher A
                        Afficher B
                        Afficher C
                        Afficher D
                        Afficher E
                        Afficher F
                        Afficher G
                        Afficher H
                        Afficher I
                        Afficher J
                        Afficher K
                      Fin Si
                    Fin Pour
                  Fin Pour
                Fin Pour
              Fin Pour
            Fin Pour
          Fin Pour
        Fin Pour
      Fin Pour
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour
Afficher Total
```

En programmant cet algorithme sur Algobox nous avons obtenu le résultat suivant :

```
00011011100          01001010110          10001100011
00011101010          01001011001          10010001101
00011110001          01001100101          10010010011
00100111100          01010001110          10100001011
00101011010          01010010101          11000000111
00101100110          01010100011          11101111000
00101101001          01100001101          11110110100
00110010110          01100010011          11111001100
00110011001          10000110110          11111010010
00110100101          10000111001          11111100001
00111000011          10001001110          34
01000111010          10001010101
```

La première ligne des résultats donne par exemple la combinaison :
$S_{Nord} = 1 + 3\times0 + 5\times0 + 7\times0 + 9\times1 + 11\times1 + 13\times0 + 15\times1 + 17\times1 + 19\times1 + 21\times0 + 23\times0$
$S_{Nord} = 1 + 9 + 11 + 15 + 17 + 19$
Il y a donc 34 possibilités pour S_{Nord}.

Pour S_{Est} nous avons modifié le calcul de la somme dans l'algorithme par :
2 + 4A + 6B + 8C + 10D + 12E + 14F + 16G + 18H + 20I + 22J + 24K = 78.
Nous avons alors trouvé 62 possibilités pour S_{Est}.

En tout, il y a donc 34 × 62 = 2108 solutions à 24 côtés pour notre problème.

5-d) Nombre de solutions à 32 côtés :

Nous avons modifié nos deux algorithmes précédents en ajoutant quatre boucles pour (pour 25, 27, 29 et 31 d'une part et pour 26, 28, 30 et 32 d'autre part).
Nous avons alors trouvé 346 possibilités pour S_{Nord} et 657 pour S_{Est}.
Au total, il y a donc 346 × 657 = 227 322 solutions à 32 côtés pour notre problème !

6) D'autres questions :

On pourrait se demander s'il y a une formule qui donne directement le nombre de solutions sans utiliser l'algorithme que nous avons écrit car il faut de plus en plus de boucles pour.
Parmi ces solutions, on pourrait chercher s'il y en a pour lesquelles le petit bonhomme ne repasse pas deux fois au même endroit.

Notes d'édition

(1) Cette valeur est bien la plus grande possible car le premier déplacement vers le Nord est toujours de 1.

(2) Et toute disposition vers l'Est à 4 termes s'obtient ainsi puisque, en enlevant 1 à chaque terme on obtient 4 termes impairs dont la somme vaut 36 – 4 = 32.