Les carrés magiques

Année 2015 – 2016

Emma BERNHEIM, Audran BILLION, Lenny HOARAU, Rayan LIMAM, Tomas LORY, Jade TORRES en classe de 6ème LSF, Marc BEAUCHAMP en classe de 5ème LSF

Encadrés par Gwenn LY

Établissements : Collège André Malraux, Ramonville Saint Agne, classes bilingues LSF

Chercheur Chercheuse : Emily BURGUNDER, Université Paul Sabatier,Toulouse

Présentation du sujet

Le Sujet

Marie organise un jeu pour l'anniversaire de son papa qui a 65 ans.
Elle distribue à chaque invité un tableau carré avec 25 cases.
Règles du jeu :
- remplir le tableau avec les nombres de 1 à 25
- la somme de chaque ligne vaut 65
- la somme de chaque colonne vaut 65
- la somme de chaque diagonale vaut 65.

Ce serait formidable si chaque invité obtenait un tableau différent !

Les questions posées

Est-ce que un tel tableau qui a la somme de ses lignes, de ses colonnes, de ses diagonales toutes égales existe ?
Si un tel tableau existe, est-il unique ou y en a-t-il plusieurs ?
Pourquoi Marie a-t-elle choisi 65 comme somme magique ? Pouvait-elle choisir une autre valeur ?
Pour un tableau 3x3, ou 4x4 , ou 5x5, y a-t-il plusieurs valeurs possibles pour la somme magique ?
Comment calculer une somme magique ?

Début de l'article

Conjectures et résultats :

La somme magique d'un tableau est unique :

-pour le carré 3x3, la somme magique est 15.

- pour le carré 4x4 la somme magique est 34

Pour le tableau 3x3 il existe exactement 8 carrés magiques

Pour le carré 4x4 il existe beaucoup de décompositions de 34 qui permettront de construire beaucoup de carrés différents. Nous n'avons pas trouvé combien il y avait de carrés différents.

I Le carré 3x3

Un carré magique 3x3 a 9 cases, on le remplit avec les nombres entiers de 1 à 9.

1) Calcul de la somme magique

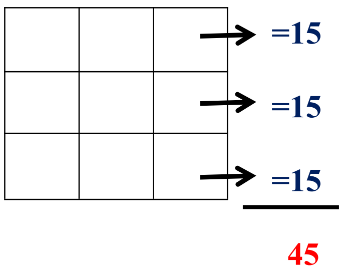
1+ 2+3+4+5+6+7+8+9=45

Il y a 3 lignes.

Il faut que la somme soit la même sur chaque ligne.

$45 \div 3 = 15$

La somme magique est 15.



2) Décompositions de 15 en sommes de trois entiers distincts

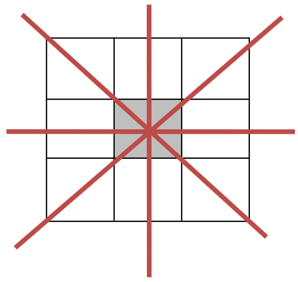
1+5+ 9=15 1+6+8=15	2+4+9=15 2+5+8=15 2+6 +7=15	3+4+8=15 3+5+7=15	4+5+6=15

Il y a huit décompositions de 15.

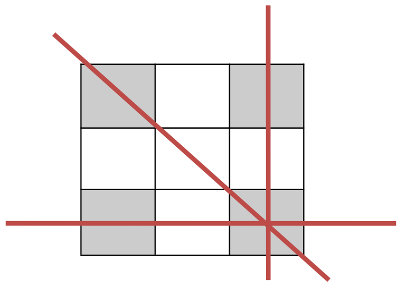
nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
utilisé combien de fois ?	2	3	2	3	4	3	2	3	2

Remarques :

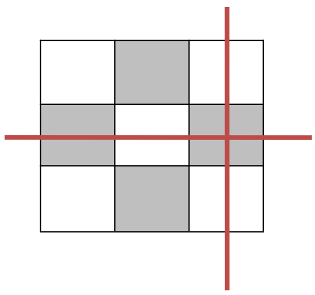
- Le nombre 5 est utilisé quatre fois. Il devra être placé dans la case du milieu du tableau car cette case intervient dans quatre sommes.



- Les nombres 2,4, 6 et 8 sont utilisés trois fois. Ils devront être placés dans un coin du tableau car un coin intervient dans trois sommes.



- Les nombres 1,3,7 et 9 sont utilisés deux fois. Ils devront être placés dans une des cases grises du tableau (voir dessous) car une case grise intervient dans deux sommes.



3) <u>Construction d'un carré magique</u>

On place le 5 dans la case du milieu, le 4 dans un coin et le 9 dans une case grise.

4	**9**	
	5	

Puis on complète le tableau pour que la somme de chaque ligne, chaque colonne, chaque diagonale soit égale à 15.

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

4) Construction des autres carrés magiques

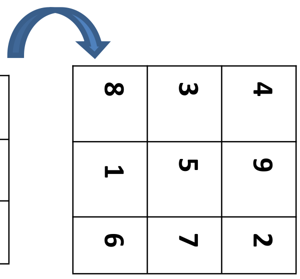
Pour construire d'autres carrés magiques, nous avons utilisé neuf cubes que nous avons assemblés et déplacés.

1	2	3	4	5	6	7	8	9

a) On effectue trois quarts de tour successifs

Premier quart de tour :

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

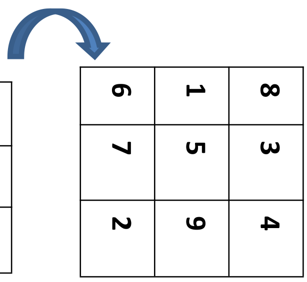


8	**3**	**4**
1	**5**	**9**
6	**7**	**2**

On vérifie qu'on obtient un nouveau carré magique.

Second quart de tour :

8	**3**	**4**
1	**5**	**9**
6	**7**	**2**



6	**1**	**8**
7	**5**	**3**
2	**9**	**4**

On vérifie qu'on obtient un nouveau carré magique.

Troisième quart de tour :

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

On vérifie qu'on obtient un nouveau carré magique.

b) On permute la 1ere et la 3° colonne

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4
3
8

9
5
1

2
7
6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

On vérifie qu'on obtient un nouveau carré magique.

c) On permute la 1ere et la 3° ligne

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4	9	2

3	5	7

8	1	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

On vérifie qu'on obtient un nouveau carré magique.

d) On effectue une symétrie par rapport à la première diagonale

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4	3	8
9	5	1
2	7	6

On vérifie qu'on obtient un nouveau carré magique.

e) On effectue une symétrie par rapport à la deuxième diagonale

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

On vérifie qu'on obtient un nouveau carré magique.

Il existe donc huit carrés magiques 3x3 différents.(1)

II Le carré 4 x 4

Un carré magique a 16 cases, on le remplit avec les nombres entiers de 1 à 16.

1) **Calcul de la somme magique**

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16=136

Il y a 4 lignes.

Il faut que la somme soit la même sur chaque ligne.

La somme magique est 34.

				→ =34
				→ =34
				→ =34
				→ =34

136

2) **Décompositions de 34 en sommes de quatre entiers distincts.**(2)

Il existe un grand nombre de décompositions de 34.

Pour les découvrir, nous avons travaillé avec le jeu MAGIX 34 qui est un carré magique déjà construit.

Nous avons aussi découvert que ces décompositions sont associées à des quadrilatères particuliers.

Voici des exemples :

a) **Rectangle**

Décomposition : 13+3+6+12=34

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

b) Carré

Décomposition : 10+11+7+6=34

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

c) Losange

Décomposition : 1+10+16+7=34

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

d) Trapèze

Décomposition : 10+11+9+4=34

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

e) Parallélogramme

Décomposition : 2+16+15+1=34

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

Notes d'édition

(1) Ce qui précède montre qu'il existe au moins huit carrés magiques de somme 15.

(2) Cette partie est intéressante mais se borne à des constats.