Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

GIBERT Alexia, 2nde
HEMMERLE Lionel, 2nde
Lycée Guy Moquet, Chateaubriant
Année 2012-2013
MATh.en.JEANS

**Celui qui prend le dernier pion a gagné**

Le jeu des allumettes est une variante du jeu des bâtonnets de Fort Boyard, où on introduit plusieurs lignes.
On est devant une situation (avec un nombre de lignes et un nombre d'allumettes déterminés), on appelle "joueur 1" celui qui va jouer immédiatement, et "joueur 2" l'autre.
- Soit le joueur 1 est sûr de gagner, quoi que fasse le joueur 2 ; la situation est alors dite gagnante
- Soit le joueur 2 est sûr de gagner, quoi que fasse le joueur 1 ; la situation est alors dite perdante.

Nous avons cherché à savoir quelles situations étaient gagnantes, lesquelles étaient perdantes, et les différentes stratégies à adopter.
Nous sommes parvenus à trouver les solutions, et donc les stratégies à adopter, dans toutes les situations, lorsque nous pouvions enlever une, deux ou trois allumettes par tour.

Sujet encadré par David Gréau, professeur de mathématiques, et proposé par François Ducrot, chercheur à la faculté des sciences d'Angers

## Sommaire :

## I) But et règles du jeu

**But du jeu :**

Le jeu des allumettes se joue à deux. Le joueur qui a gagné est celui qui prend la dernière allumette du jeu.

**Règles du jeu :**

Les joueurs ont devant eux une ou plusieurs lignes d'un nombre quelconque d'allumettes et jouent tour à tour. Ils ont la possibilité de prendre une, deux, ou trois allumettes par tour. Ils ne peuvent jouer que dans une ligne d'allumettes à chaque tour, mais peuvent changer de ligne d'un tour sur l'autre.

## II) Une seule ligne

### A ) Cas simple

On dit que le cas est simple lorsque le nombre d'allumettes dans la ligne est un multiple de quatre.

Cette situation est perdante car :
-si le joueur 1 supprime une allumette, le joueur 2 supprime trois allumettes;
-si le joueur 1 supprime deux allumettes, le joueur 2 supprime deux allumettes;
-si le joueur 1 supprime trois allumettes, le joueur 2 supprime une allumette.

Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'allumettes sur la ligne. Le joueur 2 gagne donc forcément dans cette situation, en suivant cette stratégie.

À partir de cette stratégie, notre analyse des autres situations reposera sur le fait que nous répartissons chaque ligne en paquets de quatre, et que nous ne tenons alors compte que du nombre d'allumettes ne se trouvant pas dans ces paquets de quatre.

### B ) Cas complexe

On a un cas complexe si le nombre de bâtonnets dans la ligne n'est pas un multiple de quatre.

Cette situation est gagnante car :
Nous avons vu dans le II) A) qu'une fois qu'on avait une situation avec un nombre d'allumettes multiple de quatre, le joueur commençant à jouer sur ces groupes de quatre avait forcément perdu. Lorsque le nombre d'allumettes n'est pas un multiple de quatre, nous avons trois possibilités différentes :
-Une allumette reste en plus des groupes de quatre formés (exemple : il y a treize allumettes, nous avons donc trois groupes de quatre et une allumette en plus)
-Deux allumettes restent en plus des groupes de quatre formés (exemple : il y a dix allumettes, nous avons donc

deux groupes de quatre et deux allumettes en plus)

-Trois allumettes restent en plus des groupes de quatre formés (exemple : il y a dix-neuf allumettes, nous avons donc quatre groupes de quatre et trois allumettes en plus)

Dans ce cas là, le joueur 1 cherche à ramener à une situation gagnante, donc à une situation où après son tour il ne reste plus que des groupes de quatre. Il va donc enlever une, deux ou trois allumettes, en fonction de combien il y en a en plus des groupes de quatre. Il sera ainsi sûr de gagner étant donné qu'il ne restera plus que des groupes de quatre et que ce sera au joueur 2 de jouer.

### C) Conclusion

En conclusion, lorsque nous n'avons qu'une seule ligne d'allumettes :

- si la situation est un multiple de 4, la situation est perdante car quoi que fasse le joueur, il met son adversaire devant une situation avec un nombre d'allumettes non multiple de quatre.
- si la situation n'est pas un multiple de quatre, la situation est gagnante car le joueur a toujours une solution pour mettre son adversaire devant un nombre d'allumettes multiple de quatre.

## III) Plusieurs lignes

### A) Définition

-$n_1$ désigne le nombre de lignes comprenant une allumette en plus des groupes de quatre ;

-$n_2$ désigne le nombre de lignes comprenant deux allumettes en plus des groupes de quatre ;

-$n_3$ désigne le nombre de lignes comprenant trois allumettes en plus des groupes de quatre.

### B) Dans le cas où $n_1$, $n_2$ et $n_3$ sont pairs

Cette situation est perdante car :

Dans cette situation, le nombre de lignes ayant une allumette en plus des groupes de quatre est pair, ainsi que le nombre de lignes en ayant deux, et celui en ayant trois. On peut donc regrouper les lignes deux par deux, afin d'obtenir des situations symétriques entre les deux lignes. À partir de cette situation, le joueur 2 est sûr de gagner s'il joue en symétrie par rapport au joueur 1 (donc s'il joue dans une ligne ayant le même nombre d'allumettes en plus que celle du joueur 1, et s'il enlève le même nombre d'allumettes que l'autre joueur à chaque tour).

Remarque : Ce principe est valable même si le nombre de paquets de quatre n'est pas égal dans les deux lignes, étant donné qu'on sait comment les éliminer en étant le joueur 2. Seules les allumettes en plus des groupes de quatre comptent donc. (1)

## C) Dans le cas où $n_1$, $n_2$ et $n_3$ sont impairs

Cette situation est perdante car :

Ici, le nombre de lignes ayant une allumette en plus des groupes de quatre est impair, ainsi que le nombre de lignes en ayant deux, et celui en ayant trois.

Dans cette situation, peu importe ce que jouera le joueur 1, le joueur 2 pourra toujours ramener à une situation symétrique. (2)

Il n'aura alors plus qu'à jouer en symétrie par rapport au joueur 1, et sera sûr de gagner.

## D) Dans le cas où un des $n_i$ est impair

Cette situation est gagnante car :

Dans cette situation, où un des $n_i$ est impair, les deux autres $n_i$ sont pairs. On peut donc y jouer en symétrie. On cherche alors à savoir comment ramener le $n_i$ impair à une situation que l'on sait résoudre, c'est à dire à une situation symétrique ou à une situation où il n'y a que des groupes de quatre. Le plus simple va être de ramener à une situation symétrique. En effet, le joueur 1 va pouvoir y arriver facilement, en supprimant les allumettes qui dépassent dans une de ces lignes. Ainsi, $n_i$ (3) sera pair, et on pourra jouer en symétrie. Le joueur 1 gagnera donc forcément, car ce sera au tour du joueur 2.

→ Exemple : Si $n_1$ et $n_2$ sont pairs, et $n_3$ est impair : le joueur 1 va enlever trois allumettes dans une des lignes ayant trois allumettes en plus des groupes de quatre. Cette ligne sera alors composée uniquement de groupes de quatre, et le nombre $n_3$ restant sera pair. Ce sera alors au joueur 2 de jouer, et le joueur 1 pourra jouer en symétrie par rapport à lui ou bien supprimer les groupes de quatre.

## E) Dans le cas où deux des $n_i$ sont impairs

Cette situation est gagnante car :

Nous sommes dans une situation où un des $n_i$ est pair. On peut donc y jouer en symétrie. Les deux autres $n_i$ sont impairs. On cherche comment ramener à une situation symétrique. Le joueur 1 pourra y parvenir, en transformant une des lignes appartenant à un $n_i$ impair.

→ Exemple : Si $n_1$ et $n_2$ sont impairs, et $n_3$ est pair : Le joueur 1 va enlever une allumette dans une ligne comportant deux allumettes en plus. Ainsi cette ligne ne fera plus partie des $n_2$ mais des $n_1$, et on pourra jouer en symétrie dans chacun des groupes étant donné qu'ils seront devenus pairs. Ce sera alors au tour du joueur 2, qui va forcément perdre si le joueur 1 suit la stratégie de la symétrie.

### F) Conclusion

En conclusion, lorsque nous avons plusieurs lignes d'allumettes :

- si les trois nombres $n_1$, $n_2$, $n_3$ sont tous pairs, ou tous impairs, alors la situation est perdante,
- si un ou deux de ces nombres exactement est impair, alors la situation est gagnante

## IV) Conclusion générale

Nous sommes donc parvenus à trouver l'ensemble des solutions lorsque les joueurs peuvent prendre une, deux ou trois allumettes.

Nous nous sommes donc ensuite demandé si nos solutions étaient également valables pour une variante des règles consistant à pouvoir prendre plus de trois allumettes par tour.

Nous avons ainsi pu constater que les cas simples fonctionnent, seulement le nombre d'allumettes par paquets varie selon le nombre maximal d'allumettes que l'on peut prendre.

Par exemple, si l'on peut prendre jusqu'à six allumettes, on devra faire des paquets de sept, selon le même principe que les paquets de quatre expliqué ici. Les cas simples seront donc, si on peut prendre jusqu'à six allumettes, lorsque le nombre d'allumettes est un multiple de sept.

Nous avons ensuite constaté que le principe de la symétrie marche exactement de la même façon, quel que soit le nombre d'allumettes que l'on est autorisé à prendre.

**Notes d'édition**

(1) Le joueur 2 doit parfois jouer sur la même ligne que le joueur 1 : il doit alors garder en tête de bien se ramener à un cas où tous les $n_{ii}$ sont pairs. Ainsi, s'il ne reste que deux lignes, une avec 1 allumette et l'autre avec 5 allumettes et que le joueur 1 prend 2 allumettes de la deuxième ligne, le joueur 2 devra lui aussi en prendre 2 sur cette même ligne.

(2) Quel que soit le coup du joueur 1, il modifie la parité d'un seul ou de deux des nombres ni. On est lors ramené à l'un des cas D ou E décrits dans la suite de l'article.

(3) Le $n_i$ en question est celui qui est initialement impair.