La Danse des Planètes

Année 2018-2019

Clara Kiesele, Jeanne Ricardo, Gaëlle Audéoud et Léo Thiébaud

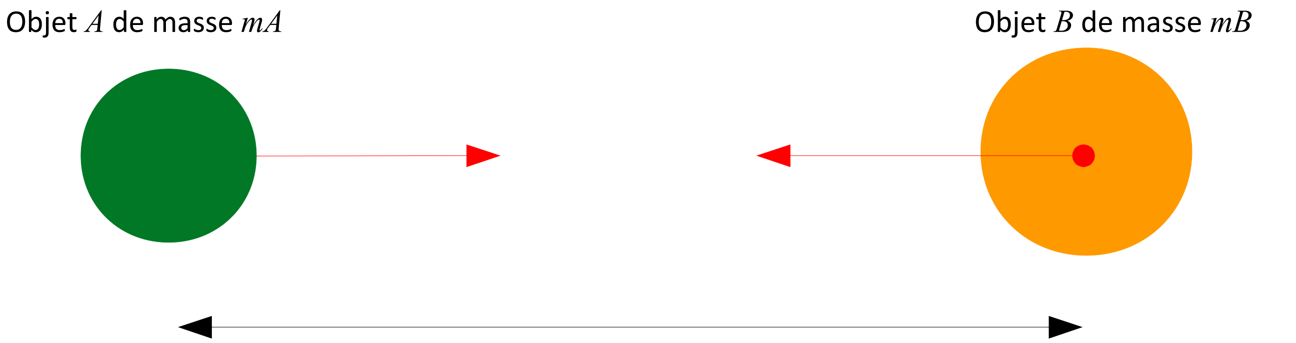
Encadrés par Marie Diumenge, Anne Lazo et Christelle Quéru
Lycée François Arago de Perpignan
Chercheur : Robert Brouzet (Université de Perpignan)

La loi de gravitation universelle

La loi de gravitation universelle a été découverte par Isaac Newton dans la seconde moitié du XVIIe siècle. Elle explique la gravitation comme une force responsable de l'attirance de tous les corps de l'univers.

G est la constante universelle de gravitation.
Le corps orange et le corps vert s'attirent mutuellement avec une force de même valeur

$$F_{A/B}=F_{B/A}=\frac{G\times mA\times mB}{d^2}$$



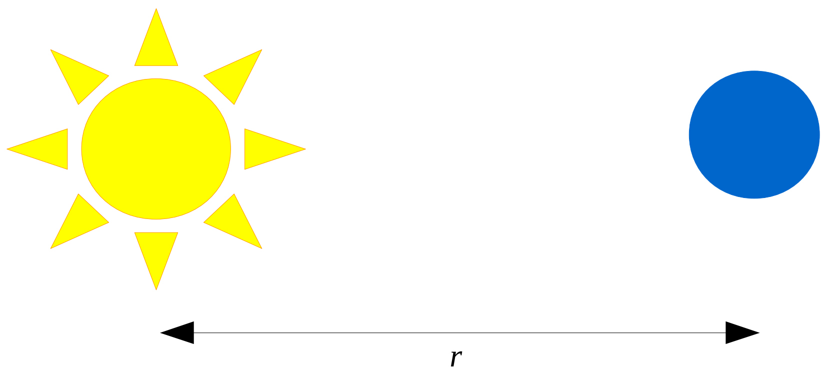
Centres séparés par une distance d

Notre problème

Mais imaginons maintenant que cette loi vienne à être soudainement changée. Quelle serait alors la conséquence sur la trajectoire des planètes ?
Au travers de ce projet nous avons donc joué au "et si ?" et étudié les conséquences du changement de la puissance de d sur la trajectoire des planètes.

Stratégie

Pour résoudre ce problème il nous a d'abord fallu le modéliser, c'est à dire choisir une représentation de la situation. Un modèle simplifie la réalité. Ici nous n'avons gardé qu'une planète qui tourne autour d'un soleil, et rien d'autre. Nous avons donc un problème à 2 corps et une seule force : la loi de gravitation universelle.



Centres séparés par une distance r

1 – Démonstration préliminaire : le mouvement est plan.

2 – Trouver la valeur de l'accélération grâce au principe fondamental de la dynamique.

3 – Trouver la valeur de l'accélération grâce à la position de la planète.

4 – Exploitation de l'accélération pour déterminer d'un système d'équations.

5 – Exploitation du système jusqu'à l'obtention d'une équation différentielle.

6 – Résolution de l'équation différentielle.

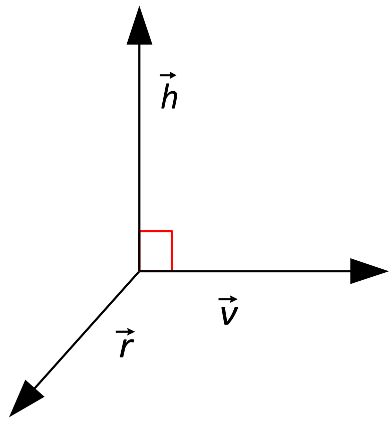
7 – Une autre approche : l'approche énergétique.

Pour mener à bien nos recherches, nous avons utilisé différents outils mathématiques et physiques. C'est au fil de notre travail que nous les avons découvert et introduit : nous avons par exemple utilisé le repère polaire parce que le repère cartésien ne nous suffisait pas. Nous avons utilisé des connaissances de Terminale et nous avons été aidés par un professeur d'université et des professeurs de mathématiques de notre lycée pour les outils hors programme dont nous avions besoin comme les propriétés du produit vectoriel ou une méthode de résolution d'équations différentielles.

Le fil directeur de nos recherches était de trouver, en partant de la force de gravitation universelle, une équation (polaire) de la trajectoire de la planète.

1- Démonstration : le mouvement est plan

$\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{v}$



$\vec{r}$ est le vecteur rayon qui varie en fonction du temps t (1)
$\vec{v}$ est le vecteur vitesse en fonction du temps

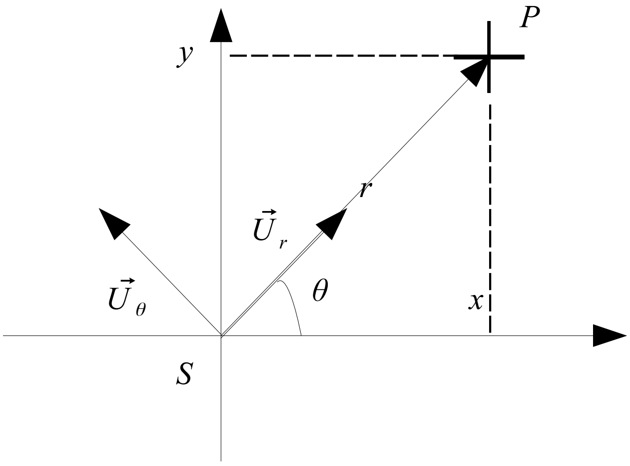
On utilise la propriété du produit vectoriel suivante : Le vecteur qui résulte du produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal au plan de ces deux vecteurs.

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{r}$$
$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{a} \wedge \vec{r}$$

Le produit vectoriel de vecteurs colinéaires est le vecteur nul : $\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{0} + \vec{0}$ (2)

La dérivée est nulle, donc $\vec{h}$ est une constante, le vecteur $\vec{r}$ en fonction de t varie donc dans un plan orthogonal à $\vec{h}$ passant par S (le Soleil) : le mouvement est plan ce qui simplifie beaucoup nos calculs.

2- L'accélération par le calcul



r et θ varient : ce sont des fonctions du temps. On utilise les relations de trigonométrie pour trouver x et y.

$$x = r\cos(\theta) \qquad\qquad y = r\sin(\theta)$$

On dérive par rapport au temps pour trouver la vitesse et l'accélération (3).

$$\vec{SP}\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \qquad\qquad \vec{v}\begin{cases} v_x = \dot{x} = \dot{r}\cos(\theta) + r\dot{\theta}\,(-\sin(\theta)) \\ v_y = \dot{y} = \dot{r}\sin(\theta) + r\dot{\theta}\cos(\theta) \end{cases}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = \ddot{x} = \ddot{r}\cos(\theta) - \dot{r}\,\dot{\theta}\sin(\theta) - \dot{r}\,\dot{\theta}\sin(\theta) - r\,\ddot{\theta}\sin(\theta) - r\,\dot{\theta}^2\cos(\theta) \\ a_y = \ddot{y} = \ddot{r}\sin(\theta) + \dot{r}\,\dot{\theta}\cos(\theta) + \dot{r}\,\dot{\theta}\cos(\theta) + r\,\ddot{\theta}\cos(\theta) - r\,\dot{\theta}^2\sin(\theta) \end{cases}$$

On simplifie cette expression grâce aux vecteurs du repère $\vec{U}_r$ et $\vec{U}_\theta$

$$\vec{U}_r\begin{cases} \cos(\theta)\vec{i} \\ \sin(\theta)\vec{j} \end{cases} \qquad\qquad \vec{U}_\theta\begin{cases} -\sin(\theta)\vec{i} \\ \cos(\theta)\vec{j} \end{cases}$$

On obtient :

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\vec{U}_r + (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + \ddot{\theta})\vec{U}_\theta}$$

3- L'accélération grâce au principe fondamental de la dynamique

$$\sum \overrightarrow{\text{forces}} = m \cdot \vec{a}$$

Il n'y a qu'une seule force dans la situation choisie $\frac{-mMG}{r^2}\vec{U}_r = m\,\vec{a}$, d'où $\vec{a} = \frac{-mMG}{r^2 \times m}\vec{U}_r$,

$$\vec{a} = \frac{-GM}{r^2}\vec{U}_r,$$

Le vecteur représentant la force d'attraction à pour origine la Terre et est dirigé vers le Soleil, il est colinéaire à $\vec{U}_r$.

On changera plus loin l'exposant ; on laisse pour l'instant r^2.

4- Exploitation de l'accélération et détermination d'un système

On a $\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{U}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+\ddot{\theta})\vec{U}_\theta$ et $\vec{a}=-\frac{G\cdot M}{r^2}\vec{U}_r$

On voit que la composante en $\vec{U}_\theta$ est absente de l'expression de l'accélération du haut, on peut déterminer le système suivant

$$\begin{cases}(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{U}_\theta=\vec{0}\\ (\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{U}_r=\frac{-MG}{r^2}\vec{U}_r\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0\\ \ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\frac{-MG}{r^2}\end{cases}$$

5-Le système : la première équation :

$$\mathbf{2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0}$$

On remarque que

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=2\dot{r}r\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta} \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=r(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})$$

Or $2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0$ donc pour tout $r\neq 0$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=0$$

Si $r^2\dot{\theta}$ se dérive en 0, c'est qu'il s'agit d'une constante : $r^2\dot{\theta}=c$ (4). On a donc

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt}=\frac{c}{r^2}}$$

Éliminer le temps

Notre but est de trouver r en fonction de θ. Mais r et θ sont des fonctions du temps, il nous faut donc l'éliminer des équations. On utilise la relation suivante :

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}$$

On pose $u=\frac{1}{r}$ d'où $\frac{d\theta}{dt}=cu^2$,

$$\frac{dr}{dt}=\frac{d(1/u)}{d\theta}\times cu^2=\frac{-\frac{du}{d\theta}}{u^2}\times cu^2=-c\frac{du}{d\theta}$$

et
$$\frac{d^2r}{dt^2}=-c\frac{d^2u}{d\theta^2}\times\frac{d\theta}{dt}=-c^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

La deuxième équation

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{-MG}{r^2}$$

$$c^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{u} c^2 u^4 = MGu^2$$

On obtient une équation différentielle. On changera ici la puissance de r dans le terme de droite.

6- Résolution d'une équation différentielle

L'exploitation du résultat obtenu va nous mener à une équation différentielle de ce type, différente selon la puissance de r choisie (5).

$$au'' + bu' + cu = 0$$

Pour résoudre ce type d'équation différentielle, on résout l'équation du second degré à coefficients identiques $ax^2 + bx + c = 0$.

le cas réel : r²

L'équation s'écrit $c^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{u} c^2 u^4 = MGu^2$ soit $c^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + uc^2 = MG$, ou

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{MG}{c^2}$$

On doit donc résoudre :

$$\boxed{u'' + u = \frac{MG}{c^2}}$$

$\frac{MG}{c^2}$ est une constante.

On va résoudre la forme simplifiée $u'' + u = 0$

Dont le polynôme correspondant est : $x^2 + 1 = 0$

$\Delta = -4 < 0$, les solutions du polynôme sont complexes.

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

$$x_1 = -i \qquad x_2 = i$$

Les solutions de u sont donc

$$u_1 = e^{(-i\theta)} \qquad u_2 = e^{(i\theta)}$$

On peut combiner ces solutions :

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 = a_1 e^{-i\theta} + a_2 e^{i\theta}$$

On passe à la forme trigonométrique :

$$u(\theta) = a_1(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) + a_2(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

$$u(\theta) = a\cos(\theta) + b\sin(\theta) \qquad (a, b \text{ dans } \mathbb{R})$$

$\frac{MG}{c^2}$ étant aussi une solution particulière, on peut la rajouter :

$$u(\theta) = a\cos(\theta) + b\sin(\theta) + \frac{MG}{c^2}$$

On utilise les relations de trigonométrie (plus une constante inconnue à déterminer) :

$$u(\theta) = \frac{MG}{c^2} + \alpha\cos(\theta - \theta_0)$$

$u = \frac{1}{r}$ on a donc $$r(\theta) = \frac{1}{\frac{MG}{c^2} + \alpha \cos(\theta - \theta_0)}$$

On cherche la constante α grâce aux conditions initiales (6)

$$r_0 = r(\theta_0) = \frac{1}{\frac{MG}{c^2} + \alpha \cos(\theta_0 - \theta_0)} = \frac{1}{\frac{MG}{c^2} + \alpha} \quad \text{car} \quad \cos(0) = 1.$$

D'où $\frac{1}{r_0} = \frac{MG}{c^2} + \alpha$ et $\alpha = \frac{1}{r_0} - \frac{MG}{c^2}$, une constante.

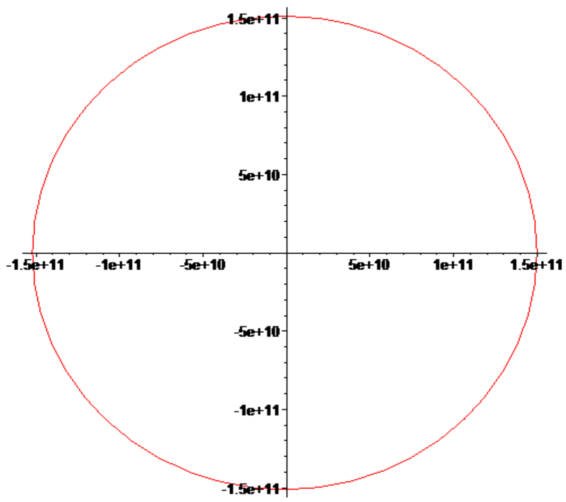
On obtient finalement

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{MG}{c^2} + (\frac{1}{r_0} - \frac{MG}{c^2}) \cos(\theta - \theta_0)}$$

$$r(\theta) = \frac{\frac{c^2}{MG}}{1 + \left(\frac{c^2}{MGr_0} - 1\right) \cos(\theta - \theta_0)}$$

M est la masse du soleil.
G est la constante universelle de gravitation.
r_0 est la distance initiale. On choisit l'actuelle distance Terre-Soleil (7).
θ_0 est l'angle initial. On choisit 0.
v_0 est la vitesse initiale. On choisit l'actuelle vitesse de la Terre.

Le chercheur qui supervise notre atelier nous a expliqué que c, la constante trouvée plus tôt, avait pour valeur absolue $|c| = r^2 \dot{\theta} = v_0 r_0$.
(Lien avec la deuxième loi de Kepler, la loi des aires : les aires balayées par un "rayon vecteur" en des temps égaux sont égales.)



Remarque : la trajectoire de la planète ne dépend pas de sa masse.

On obtient une trajectoire qui semble correspondre à la réalité : une ellipse aux foyers très proches (8).

Généralisation

Force en $1/r^p$:

$$c^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - c^2 u^3 = MG\, u^p$$
$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{MG}{c^2} u^{(p-2)}$$

Le cas r^3

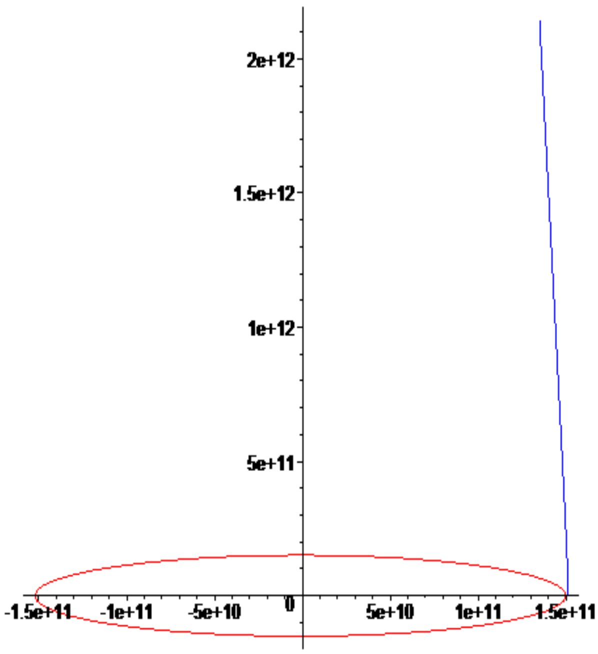
Avec sensiblement la même méthode que pour r^2 on trouve notamment la solution (9) :

$$u = a\cos\left(\sqrt{1-\frac{MG}{c^2}}\,\theta\right) + b\sin\left(\sqrt{1-\frac{MG}{c^2}}\,\theta\right)$$
$$u = \alpha\cos\left(\sqrt{1-\frac{MG}{c^2}}(\theta-\theta_0)\right)$$
$$r(\theta) = \frac{1}{\alpha\cos\left(\sqrt{1-\frac{MG}{c^2}}(\theta-\theta_0)\right)}$$

On trouve la constante α grâce aux conditions initiales :

$$r_0 = r(\theta_0) = \frac{1}{\alpha} \quad \text{car} \quad \cos(0)=1, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{1}{r_0}$$

Et ainsi :
$$r(\theta) = \frac{r_0}{\cos\left(\sqrt{1-\frac{MG}{c^2}}(\theta-\theta_0)\right)}$$



Ici on a en rouge la trajectoire en r^2. Si elle est écrasée c'est qu'on a étiré l'axe des ordonnées. Si la loi de gravitation changeait soudainement, la Terre suivrait la trajectoire bleue et partirait dans l'espace quasiment en ligne droite !

Les autres solutions

$$c^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - c^2 u^3 = MG\, u^p$$

On remarque que dans notre équation différentielle, suivant la puissance de u choisie, la simplification par u n'est pas toujours possible. On obtient en fait des équations différentielles qu'on ne sait pas résoudre pour les puissances autres que 2 ou 3.

7 - Une autre approche : l'approche énergétique

Pour les résoudre, nous avons tenté l'approche énergétique. Il n'y a pas de frottement, seulement deux corps et une force : le système est isolé et l'énergie mécanique (10) de la Terre se conserve, c'est une constante.

$E_m = E_c + E_p$, avec $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ et $E_p = \frac{-G\,M\,m}{r}$

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G\,M\,m}{r}$$

On se souvient des coordonnées du vecteur vitesse dans la base polaire (11), on retrouve

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{G\,M\,m}{r}$$

$\dot{r} = -c \frac{du}{d\theta}$ $\quad \dot{\theta} = cu^2$

$$E_m = \frac{1}{2} m c^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2} m c^2 u^2 - G\,M\,m\,u$$

On dérive chaque membre de l'égalité :

$$0 = m c^2 u'' u' + m c^2 u' u - G\,M\,m u'$$

$$u'' + u = \frac{GM}{c^2}$$

On retombe sur la même équation qu'avec l'approche mécanique donc les même solutions. Nous avons fait de même avec les cas $1/r$ et $1/r^3$, on retrouve les même solutions et donc les même problèmes.

Notes sur notre collaboration avec nos partenaires roumains

Nous avions cette année encore des correspondants roumains qui travaillaient sur les sujets avec nous. Cependant des cafouillages liés au fait que notre sujet s'est précisé lors des premières semaines on fait que nous n'avons en fait pas travaillé sur la même chose.
Ils ont eux travaillé sur "Quelles seraient les conséquences sur les trajectoires des planètes du système solaire si on retirait soudainement le soleil ?". Leur travail n'est donc pas présenté ici mais nous vous invitons à vous intéresser à leur impressionnants programme informatiques.

Un projet qui nous a fait voyager

L'atelier nous a mené cette année au Congrès Maths en Jeans de Marseille, puis à Béziers pour une présentation des projets de la région Occitanie au concours C génial où nous avons gagné le prix «Coup de cœur femmes ingénieures » . Nous avons aussi participé au congrès Maths en Jeans de Iași, en Roumanie et à la fête des Maths de Paris.

Notes d'édition

(1) Le Soleil est pris comme origine du repère (la masse du Soleil étant énormément plus grande que celle de la planète, on peut considérer qu'il est fixe). $\vec{r}$ est le vecteur le joignant à la planète, et $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ est le vecteur vitesse de la planète.

(2) Le vecteur accélération $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ est colinéaire à la force de gravitation (voir paragraphe 3), dirigée vers le Soleil, donc $\vec{a}\wedge\vec{r}=\vec{0}$.

(3) Les dérivées première et seconde de x par rapport au temps sont notées soit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ soit avec des points : $\dot{x}, \ddot{x}$ (*notation de Newton*). De même pour y, r et θ .
Le calcul qui suit montre aussi que $\vec{v}=\dot{r}\vec{U}_r+r\dot{\theta}\vec{U}_\theta$ (cela sera utilisé plus loin).

(4) $r^2\dot{\theta}$ est la *vitesse aréolaire*, c'est-à-dire la dérivée par rapport au temps de l'aire balayée par le rayon vecteur. On retrouve ici la deuxième loi de Kepler, à savoir que cette vitesse est constante (en des temps égaux le rayon vecteur balaie des aires égales) ; on voit aussi que cela ne résulte que du fait que "la composante en $\vec{U}_\theta$ est absente de l'expression de l'accélération", autrement dit que l'accélération est colinéaire au rayon vecteur (l'accélération est centrale).

(5) Les dérivées par rapport à θ sont notées $u'=\frac{du}{d\theta}$, $u''=\frac{d^2u}{d\theta^2}$ (ce qui les distingue des dérivées par rapport à t).
On va appliquer ici la méthode classique de résolution des équations différentielles de ce type. Si vous ne la connaissez pas, vous pouvez directement vérifier que les solutions données plus bas conviennent.

(6) Il ne s'agit pas vraiment des conditions initiales : le temps n'intervient pas ici. θ_0 est l'angle θ pour lequel $\cos(\theta-\theta_0)=1$. On peut toujours supposer que $\alpha\geq 0$ quitte à changer θ_0 en $\theta_0+\pi$ et α en $-\alpha$. Alors θ_0 est l'angle pour lequel le rayon est minimal (*angle du périhélie*).

(7) Voir la note ci-dessus. Avec le choix $\alpha\geq 0$, r_0 est la distance du Soleil au périhélie. De même v_0 est la vitesse de la planète au périhélie. En ce point $\dot{r}=0$, d'où $\vec{v}=r_0\dot{\theta}\vec{U}_\theta$ (voir note 3) et $v_0=|r_0\dot{\theta}|$, ce qui explique la valeur de la constante c trouvée un peu plus bas.

(8) La valeur $1{,}5\times10^{11}$ sur l'échelle est la distance approximative de la Terre au Soleil exprimée en mètres. Mais la formule trouvée pour le rayon est plus générale. On peut noter que si $\frac{c^2}{MGr_0}-1\geq 1$ il y a des valeurs de θ pour lesquelles le dénominateur s'annule : c'est le cas où la "planète" s'échappe à l'infini avec une trajectoire parabolique ou hyperbolique. Dans le cas contraire, l'équation liant r à θ est celle d'une ellipse. Par ailleurs, le fait que la trajectoire de la planète ne dépend pas de sa masse est vrai tant que cette masse est petite par rapport à celle du Soleil et qu'on peut donc supposer que le Soleil est fixe.

(9) La solution donnée ici est pour le cas $1-\frac{MG}{c^2}>0$.

(10) Il s'agit de la somme de l'énergie cinétique $E_c=\frac{1}{2}mv^2$ et de l'énergie potentielle E_p. L'énergie potentielle est, pour simplifier, l'opposée de l'énergie qu'il faudrait dépenser pour amener la planète à l'infini.

(11) D'après le calcul des coordonnées de $\vec{v}$ paragraphe 2 (voir note 3), on a $\vec{v}=\dot{r}\vec{U}_r+r\dot{\theta}\vec{U}_\theta$.