Economie de bitume

Année 2013-2014

Laurent Cabrera 2nde, Carla Hérédia 1ère S, Priscilla Badier 1ère S au lycée Arago
Charles Hippolite, Rebaud Antoine, Tonnel Simon, 1ère S au lycée Lurçat

Encadrés par : Pascale Boulais, Marie Diumenge, Lycée Arago
et Martine Vergnac, Lycée Jean Lurçat

Etablissements : Lycées François Arago et Jean Lurçat de Perpignan

Chercheur : Robert Brouzet, Université Perpignan Via Domitia, Lamps

Enoncé du sujet :

Il s'agit de déterminer le réseau routier le plus économique en bitume, permettant de relier quatre maisons qui sont situées aux coins d'un carré de côté 1 kilomètre.

Cette recherche a été rédigée en deux parties.

Partie 1 : Atelier du lycée François Arago

Partie 2 : Atelier du lycée Jean Lurçat

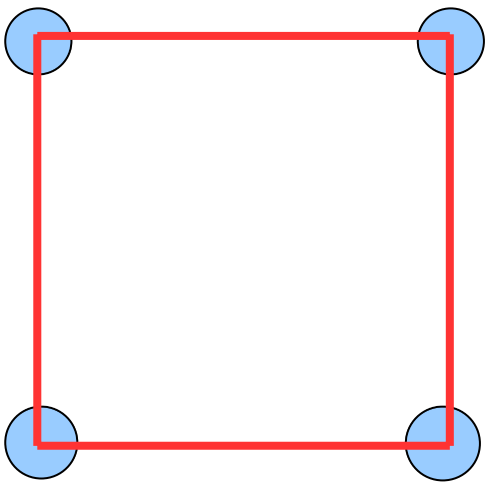
Partie 1 : Présentation et démarche

Notre démarche est passée par des essais divers, puis par une modélisation sur Geogebra. Nous avons enfin traité mathématiquement la solution qui nous paraissait la meilleure, nous n'avons pas pu démontrer qu'il n'en existait pas d'autres encore meilleures. Mais nous avons trouvé que cette preuve a été établie par Jakob Steiner.
Il s'agit dans ce problème de relier quatre maisons disposées aux quatre coins d'un carré par un chemin qui soit le plus court possible. Au premier abord, ce sujet semblait simple à réaliser mais à la fois compliqué. Il est difficile de croire que ce problème peut faire l'objet de recherches ou de calculs mathématiques.
Pourtant nous nous sommes très vite rendu compte que c'était plus difficile que ce que l'on ne pensait...

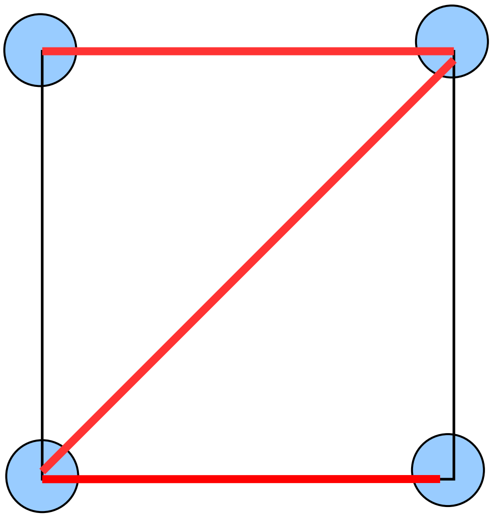
I/ La recherche :

1) Les premiers essais

Nous avons tout d'abord "jeté" nos idées sur du brouillon pour voir un peu vers quoi allions-nous partir...
Nous avons évidemment pensé au plus simple tracé possible :

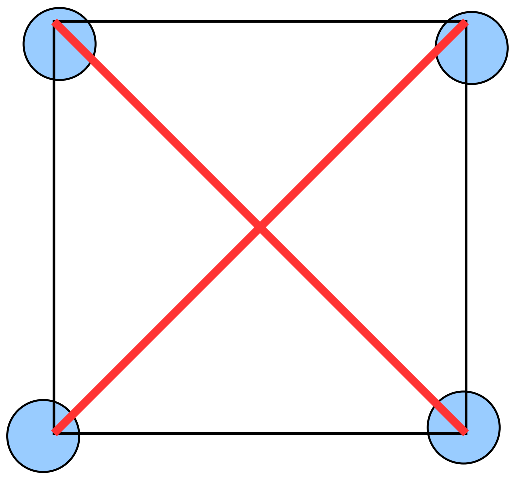


Le carré étant de 1km de côté, notre chemin était de 4km. Nous avons donc réfléchi à d'autres possibilités...



Ici le chemin fait 1+1+$\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41 km$

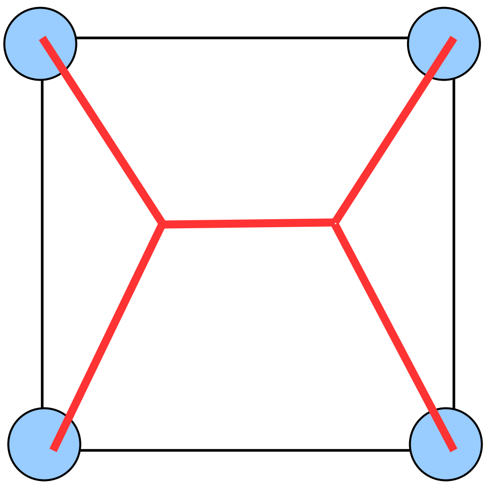
Puis nous avons pensé au chemin en forme de X :



Ce qui faisait alors $2\sqrt{2} \approx 2{,}8\ km$, cela nous paraissait être un bon résultat, mais nous avons creusé un peu plus pour voir s'il n'y avait pas d'autre solution.

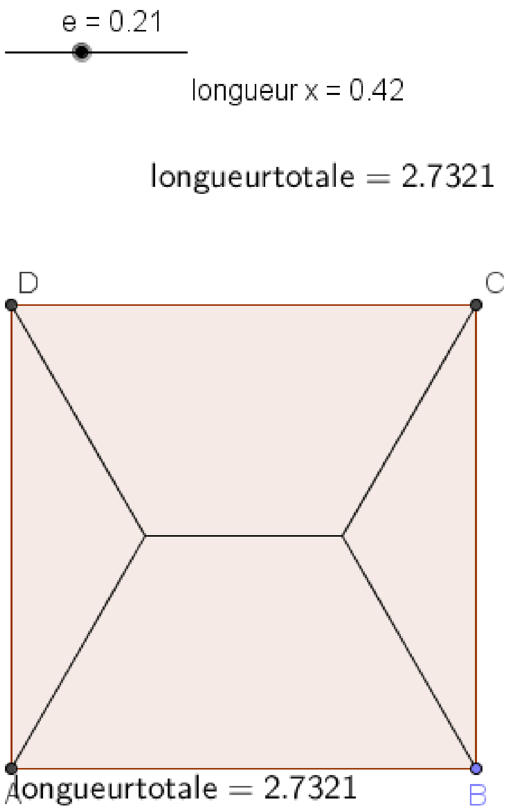
2) La voie vers la solution :

Nous avons pensé à relier les maisons avec une forme de X mais ayant un segment au milieu qui raccourcirait le chemin...



L'idée était celle là, mais nous ne savions pas quelle longueur devait faire le segment du milieu pour faire en sorte que le chemin soit le plus court possible...

Nous avons fait une conjecture avec Geogebra, mais nous ne savions pas comment la prouver :



(1)

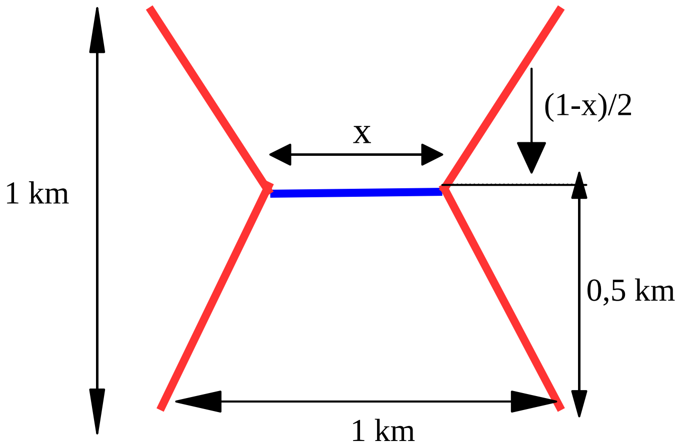
3) Les confrontations d'idée :

La confrontation d'idée est une étape importante dans l'avancée de nos recherches. En premier lieu chaque membre de notre trio, s'il avait une idée qui lui venait, pouvait la faire partager par mail ou sms et ainsi proposer une nouvelle piste...
Pour nous épauler, nous avions à nos côtés les professeurs de mathématiques, mais aussi l'enseignant-chercheur de l'université. En effet, il était présent à quelques séances, pour voir notre avancée dans la recherche et nous donner quelques indications (tout en se gardant bien de nous donner des indices).
Puis, nous nous sommes rendus au lycée Maillol à la rencontre d'autres lycéens participant également à l'atelier maths. Nous avons pu ainsi nous retrouver avec un groupe d'élèves (de première S du lycée Jean Lurçat) travaillant sur le même sujet que nous, pour pouvoir confronter nos idées, échanger sur le problème, le tout dans une ambiance conviviale autour d'un goûter.
Après la rencontre très utile avec les autres lycéens, nous avons beaucoup avancé sur nos recherches et avons approché la solution...

II/ La solution :

1) Calculs

Nous avons appelé la longueur du segment du milieu "x" et avons alors commencé à réaliser des calculs pour obtenir une fonction qui calculerait la longueur totale du chemin en fonction de "x".



La longueur d'un des 4 traits rouge est donc de $\sqrt{((\frac{1-x}{2})^2+(0,5^2))}$

2) Recherche sur le net

Après avoir trouvé cette solution, il nous a paru intelligent d'aller faire quelques recherches sur internet. Nous avons alors découvert que notre chemin consistant à relier 4 points de cette manière était la plus courte. Ce schéma, s'appelle en réalité l'arbre de Steiner. Nous avons donc validé notre hypothèse...

3) Calculs

Voici les calculs pour connaître la distance finale :

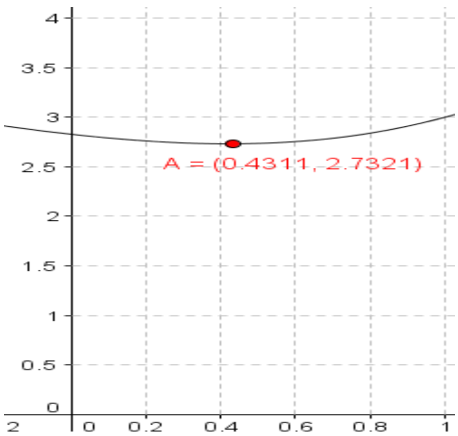
Distance totale :

$d(x) = x + 4 \times \sqrt{\frac{(1-x)^2+1}{4}}$

$d(x) = x + 2 \times \sqrt{(1-x)^2 + 1}$

$d(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$

Nous avons représenté la courbe :



Avec Géogebra nous avons cherché la valeur qui annule la dérivée

1	d(x) Dérivée, x: $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}+2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}$
2	d'(x)=0 NRésoudre: $\{x = 0.4226\}$
3	d'(x)=0 Résoudre: $\left\{x = \dfrac{-\sqrt{3}+3}{3}\right\}$

Nous en concluons que la valeur exacte que nous cherchons est donc celle-ci.
Il faudrait prouver que la dérivée change de signe.

La longueur de bitume est :1+

4	d((-sqrt(3) + 3) / 3) $\rightarrow\ \dfrac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}}$
5	(sqrt(3) + 3) / sqrt(3) $\approx\ 2.7321$

III/ La conclusion :

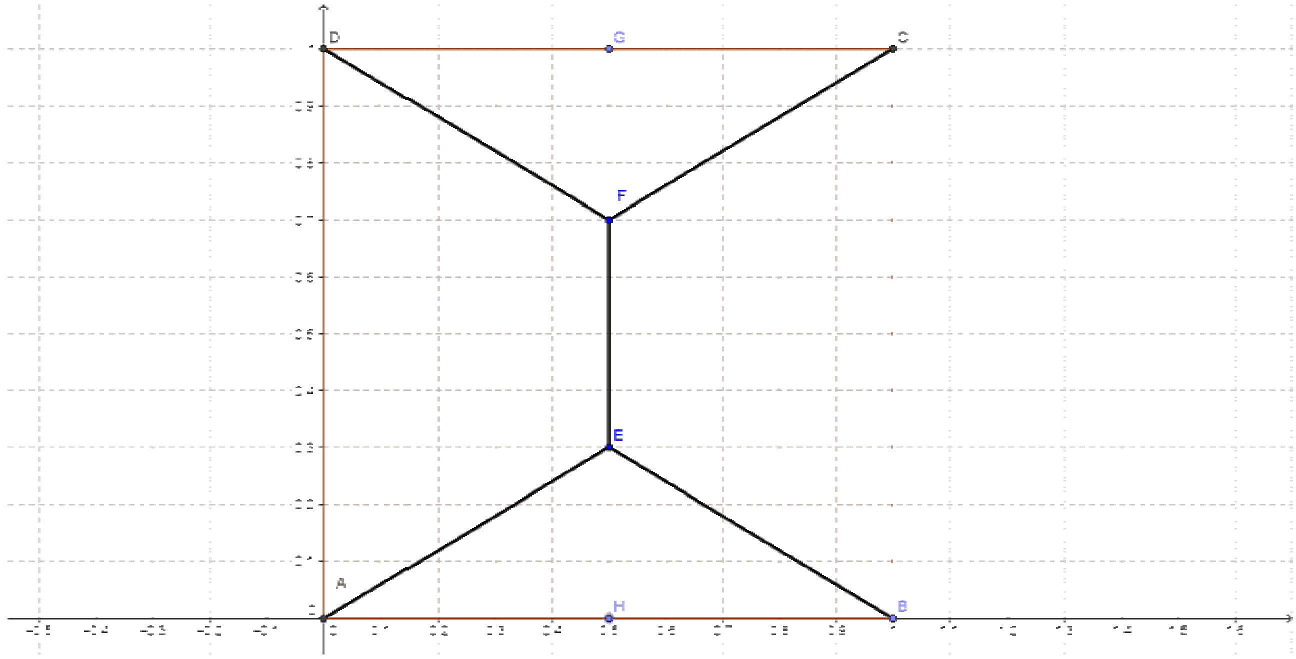
Cette longueur est la plus courte que nous ayons trouvée.
Notre recherche a été menée à l'aide de Géogébra et à l'aide d'outils de calcul formel. Nous n'avons pas réussi à déterminer cette valeur sans ces outils. C'est le travail qui a été mené par l'autre groupe dans la deuxième partie.

Partie 2: Démonstration de la valeur déterminée dans la partie 1

I/ Une démarche semblable

Notre première idée était de calculer la longueur des diagonales comme sur la figure de gauche. Cependant, en déplaçant le point d'intersection des droites, nous nous sommes aperçus que cette longueur n'était pas la longueur minimale. Nous avons réfléchi à un mélange entre notre première figure et la figure de droite.

En effet nous avons conjecturé que c'étaient les deux plus courts chemins que l'on pouvait réaliser simplement. En assemblant ces deux figures nous avons trouvé une troisième figure où le chemin paraissait plus court. Nous avons alors cherché où placer les points E et F.



II/ Une « mathématisation » du problème

Nous avons donc choisi pour
Les côtés du carré sont de 1 km.

On cherche la longueur BE et l'on sait que

D'après le théorème de Pythagore, on a :

Grâce à la symétrie de la figure : . Donc, la longueur totale en fonction de est :

Pour trouver la plus petite valeur possible du parcours, nous allons étudier les variations de .
Nous allons donc devoir dériver cette fonction.

On utilise le théorème suivant :

Où est la fonction suivante :

III/ Recherche du minimum

On calcule d'abord $u'(x)$:

$$u'(x) = -2 + 2x$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} + 1$$

Donc

$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+2}} + 1$$

Maintenant que nous avons trouvé la dérivée de $f(x)$, on va pouvoir étudier le signe de $f'(x)$.
Tout d'abord on simplifie $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+2}} + 1$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)+\sqrt{x^2-2x+2}}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

On appelle le numérateur $n(x)$ et le dénominateur $d(x)$

$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$; donc $x^2 - 2x + 2 \geq 1 > 0$

De plus : $\sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 0$; donc $d(x) > 0$

Par conséquent, on étudie le signe de $n(x)$ avec $x \in [0; 1]$

Donc de : $2(x-1) + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

On cherche $n(x) \geq 0$ donc : $2(x-1) + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \geq (2 - 2x)^2 \qquad \text{(2)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \geq 4 - 8x + 4x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 - (4 - 8x + 4x^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 6x - 2 \geq 0$$

Nous sommes en présence d'un polynôme du second degré.

$$\Delta = 6^2 + 4 \times (-3) \times (2)$$

$$\Delta = 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{12}}{-6} = \frac{-6+2\sqrt{3}}{-6} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \mathbf{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad et \quad 0 < x_1 < 1$$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{12}}{-6}$ $et\ x_2 > 1$ cela ne convient pas car $x_2 \notin [0;1]$ (3)

La solution est donc x_1

x	0	$1-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de $f(x)$	$\searrow$	$1+\sqrt{3}$ $\approx 2{,}73$	$\nearrow$

Pour conclure, pour que la longueur totale soit minimale dans cette configuration, il faut que $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ ce qui nous donne une longueur totale de $1 + \sqrt{3}$ soit 2,73 km environ.

$$HE = x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

IV/ Conclusion :

Nous avons démontré qu'il existait une longueur minimale de bitume dans la configuration ci-dessus et que cette longueur était la plus courte parmi toutes les configurations que nous avons testées, mais nous n'avons pas réussi à démontrer que cette configuration que nous avons déterminée est la meilleure possible.

Notes d'édition

(1) A quoi correspond la lettre « e » ?
(2) Cette inégalité est vraie car $2 - 2x \geq 0$.
(3) Attention, x_2 est négatif et non plus grand que 1.