Géométrie Tropicale

Santoline GRASSART et Marion VERDIER

Collège Jean Jaurès à Vieux-Condé (59)
Enseignant : Nicolas Van Lancker
Chercheur : Michaël Balan (LAMAV EA 4015,
Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis)

Sujet

Cette année, notre chercheur, Michaël Balan, de l'Université de Valenciennes, nous a proposé de travailler sur la géométrie tropicale. Cette géométrie tropicale a été inventée par le mathématicien brésilien Imre Simon. Elle est encore étudiée actuellement pour une utilisation en cristallographie ou en biologie.

Pour pouvoir l'étudier, notre chercheur a défini l'addition tropicale et la multiplication tropicale. Il nous a demandé de réfléchir aux propriétés de ces opérations. Ensuite, il nous a demandé de travailler sur les droites et les cercles en géométrie tropicale, qu'on va définir grâce à leur équation.

[Note: les nombres utilisés dans l'article sont les nombres réels]

Mots-clés

GÉOMÉTRIE TROPICALE, MIN, PLUS, ADDITION, MINIMUM, ÉQUATION, DROITE, CERCLE

I - Les opérations tropicales.

1) L'addition

Définition : *Pour calculer l'addition tropicale de deux nombres, nous devons prendre le plus petit des deux.*

On écrira l'addition tropicale $\oplus$.
Exemples : $2 \oplus 3 = 2$ ou $3 \oplus (-5) = (-5)$

Nous allons voir si l'addition tropicale a les mêmes propriétés que l'addition traditionnelle.

Propriété. *L'addition tropicale est commutative, autrement dit pour deux nombres a et b, on a :*

$$a \oplus b = b \oplus a$$

Preuve : en effet, si $a \leq b$: $a \oplus b = a$ et $b \oplus a = a$. Si $b \leq a$: $a \oplus b = b$ et $b \oplus a = b$ donc on a toujours $a \oplus b = b \oplus a$.

Propriété. *L'addition tropicale est associative, autrement dit, pour trois nombres a, b et c, on a :*

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$$

Pour le démontrer, il faut étudier tous les cas suivants :

$a \leq b \leq c$; $a \leq c \leq b$; $b \leq a \leq c$;
$b \leq c \leq a$; $c \leq a \leq b$; $c \leq b \leq a$.

On les a tous fait, ils fonctionnent tous de la même façon. On va donc écrire seulement le premier cas : $a \leq b \leq c$.

On s'occupe d'abord de $a \oplus (b \oplus c)$

$b \oplus c = b$ donc $a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b = a$

On s'occupe ensuite de $(a \oplus b) \oplus c$

$(a \oplus b) = a$ donc $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus c = a$

Finalement, on a bien $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$.

Et ça fonctionne comme cela dans les 5 autres cas.

Propriété. *L'addition tropicale n'a pas de neutre.*

Remarque : pour l'addition normale, le neutre est zéro car 5+ 0 = 5 ; -3 + 0 = -3 ... Le nombre zéro « ne sert à rien » pour l'addition normale.

Démontrons que l'addition tropicale n'a pas de neutre.

Comme l'addition tropicale consiste à prendre le plus petit des deux nombres, le neutre de cette addition doit être plus grand que n'importe quel autre nombre (ou plutôt n'importe quel nombre doit toujours être plus petit que le neutre). Il n'existe pas de nombre plus grand que tous les autres donc l'addition tropicale n'a pas de neutre.

Propriété. *Il n'existe pas de soustraction tropicale.*

? En effet, la soustraction est l'opération qui annule l'addition, ce qui permet de revenir au neutre. Mais comme il n'y a pas de neutre pour l'addition tropicale, on ne peut pas définir de soustraction tropicale.

2) La multiplication tropicale

Définition. *Pour calculer la multiplication tropicale de deux nombres, nous devons les ajouter (comme dans une addition traditionnelle).*

On notera la multiplication tropicale $\otimes$

Exemples : $2 \otimes 5 = 2 + 5 = 7$; $4 \otimes (-2) = 4 + (-2) = 2$.

Comme la multiplication tropicale est une addition traditionnelle, les propriétés de l'addition traditionnelle sont les propriétés de la multiplication tropicale donc :

Propriétés. *La multiplication tropicale est commutative, associative et possède un élément neutre qui est zéro.*

Comme la multiplication tropicale possède un élément neutre, on peut définir la division tropicale.

Définition. *Pour calculer la division tropicale de deux nombres, nous devons les soustraire (comme dans une soustraction traditionnelle).*

On notera la division tropicale

Exemples : 2   5= 2 - 5 = -3 ; 4   (-2)= 4 - (-2) = 6.

3) Propriétés des deux opérations prises en même temps

En 4[e], on a appris la distributivité de la multiplication traditionnelle par rapport à l'addition traditionnelle : pour n'importe quels nombres a, b, c , on a

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Que se passe-t-il en géométrie tropicale?

Propriété. *La multiplication tropicale est distributive par rapport à l'addition tropicale.*

Démonstration. On doit montrer que $a \otimes (b + c) = (a \otimes b) + (a \otimes c)$ en détaillant les 6 cas suivants :

Premier cas $a \leq b \leq c$;

$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b = a + b$

et d'autre part

$(a \otimes b) \oplus (a \otimes c) = (a + b) \oplus (a + c) = a + b.$

Deuxième cas $a \leq c \leq b$;

$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes c = a + c$

et d'autre part

$(a \otimes b) \oplus (a \otimes c) = (a + b) \oplus (a + c) = a + c.$

[...] [les autres cas sont analogues puisque $a \otimes (b \oplus c)$ vaut $a + b$ *si* $b \leq c$ et $a + c$ si $c \leq b$.]

Par le même genre de calculs, en étudiant tous les cas, on a montré que :

Propriété. *Quels que soient a, b, c et d, quatre nombres quelconques* :

$$(a \oplus b) \otimes (c \oplus d) = (a \otimes c) \oplus (a \otimes d) \oplus (b \otimes c) \oplus (b \otimes d)$$

4) Les identités remarquables

Comme la soustraction tropicale n'existe pas, on ne va s'intéresser qu'à la première identité remarquable.

On a :

$(a \oplus b) \otimes (a \oplus b) = a \otimes a$ si $a \leq b$

$(a \oplus b) \otimes (a \oplus b) = b \otimes b$ si $b \leq a$

Donc $(a \oplus b) \otimes (a \oplus b)$ vaut le plus petit des deux nombres : $a \otimes a$ ou $b \otimes b$.

On en déduit que $(a \oplus b) \otimes (a \oplus b)$ est une addition tropicale entre $a \otimes a$ *et* $b \otimes b$, c'est-à-dire :

Propriété. *Pour tous nombres a et b quelconques,*

$$(a \oplus b) \otimes (a \oplus b) = (a \otimes a) \oplus (b \otimes b)$$

Remarque. Il n'y a qu'une seule identité remarquable en géométrie tropicale et qui est plus facile puisqu'elle n'a pas le double produit.

II - Les droites en géométrie tropicale

1) Dessin d'une droite tropicale

Après que nous avons travaillé sur les équations de droite du type $a \times x + b \times y = c$ dans un repère orthonormé, M. Balan nous a demandé d'étudier *les équations tropicales*.

On choisit trois nombres quelconques a, b, et c.

Définition. Dans un repère orthonormé, un point de coordonnées $(x ; y)$ appartient à une *droite tropicale* s'il vérifie l'une [au moins] des trois inéquations suivantes :

$x \otimes a = y \otimes b \leq c$
$x \otimes a = c \leq y \otimes b$
$y \otimes b = c \leq x \otimes a$

Nous avons donc cherché à représenter cette droite tropicale sur un graphique.

Pour cela nous avons traduit l'équation d'une droite tropicale à l'aide des opérations habituelles, ce qui donne :

$x + a = y + b \leq c$
$x + a = c \leq y + b$
$y + b = c \leq x + a$

Propriété. *Toutes les droites tropicales sont formées de 3 demi-droites :*

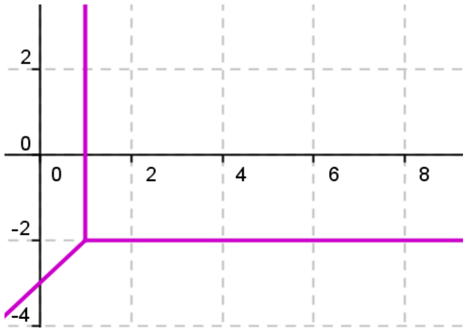
- *une première qui part vers le nord*
- *une seconde qui part vers le sud-ouest*
- *une troisième qui part vers l'est*

Ces trois demi-droites se coupent en un point [elles ont même origine] que nous avons appelé le « point triple »

Exemple : On va tracer la droite tropicale d'équation

$x + 2 = y + 5 \leq 3$
$x + 2 = 3 \leq y + 5$
$y + 5 = 3 \leq x + 2$

Cela donne le graphique suivant :



Nous avons montré que toutes les droites tropicales ont cette forme là.

• Le « point triple » appartient aux trois demi-droites car c'est le moment où $x + a = y + b = c$. Il a donc pour coordonnées $(c - a\,;c - b)$.

• La première équation ($x + a = y + b \leq c$) donne une demi-droite d'équation $y = x + (a - b)$ pour tous les nombres x plus petits que $c - a$. C'est une demi-droite qui part du point triple vers le sud-ouest (de la forme $y = x +$ *un décalage* [*négatif*]...).

• La deuxième équation ($x + a = c \leq y + b$) donne une demi-droite d'équation $x = c - a$ pour tous les nombres y plus grands que $c - b$. C'est une demi-droite verticale qui part du point triple vers le nord.

• La troisième équation ($y + b = c \leq x + a$) donne une demi-droite d'équation $y = c - b$ pour tous les nombres x plus grands que $c - a$. C'est une demi-droite horizontale qui part du point triple vers l'est.

2) Intersection de droites tropicales

Notre chercheur nous a alors demandé de réfléchir à l'intersection des droites tropicales.

En géométrie euclidienne, deux droites sont soit parallèles (aucun point d'intersection), soit confondues (une infinité de points d'intersection), soit sécantes en un seul point.

Et en géométrie tropicale ?

Nous avons donc pris six nombres quelconques (a, b, c, d, e et f) et nous avons étudié les deux droites tropicales d'équation :

$$\begin{cases} x \otimes a = y \otimes b \leq c \\ x \otimes a = c \leq y \otimes b \\ y \otimes b = c \leq x \otimes a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x \otimes d = y \otimes e \leq f \\ x \otimes d = f \leq y \otimes e \\ y \otimes e = f \leq x \otimes d \end{cases}$$

On peut simplifier les deux équations :

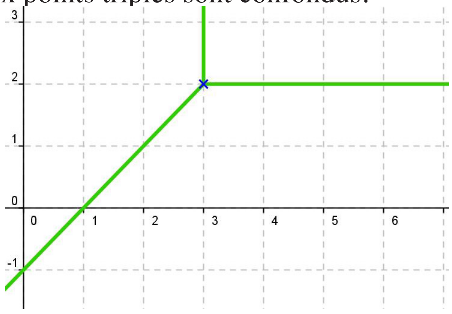
$$\begin{cases} x + a = y + b \leq c \\ x + a = c \leq y + b \\ y + b = c \leq x + a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + d = y + e \leq f \\ x + d = f \leq y + e \\ y + e = f \leq x + d \end{cases}$$

On cherche la position des points triples. En effet, les deux droites tropicales sont formées de demi-droites 2 à 2 parallèles. C'est donc ces points triples qui vont nous permettre de conclure sur le nombre de points d'intersection. Les coordonnées du point triple de la première droite tropicale sont $(c - a\,;c - b)$. Les coordonnées du point triple de la seconde droite tropicale sont $(f - d\,;f - e)$.

Regardons les différentes positions des points triples. Pour chacune des illustrations, la première droite sera représentée en gris et la seconde en noir.

1er cas : $c - a = f - d$ et $c - b = f - e$

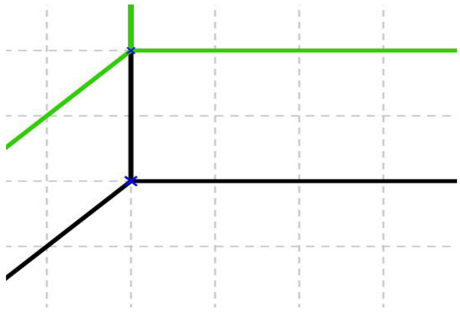
Les deux points triples sont confondus.



Les deux droites tropicales sont confondues

2e cas : $c - a = f - d$ et $c - b = f - e$

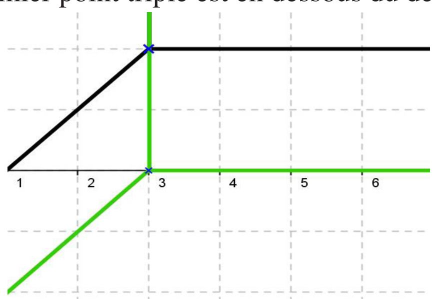
Le premier point est au dessus du deuxième.



Les demi-droites verticales sont en partie superposées : il y a une infinité de points d'intersection.

3e cas : $c - a = f - d$ et $c - b < f - e$

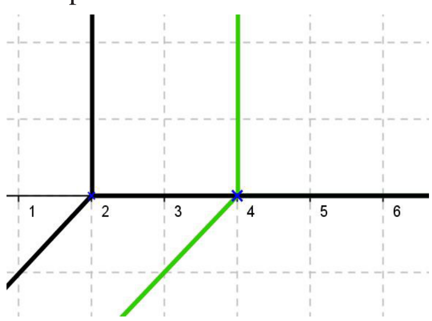
Le premier point triple est en dessous du deuxième.



Les demi-droites verticales sont en partie superposées : il y a une infinité de points d'intersection.

4e cas : $c - a > f - d$ et $c - b = f - e$

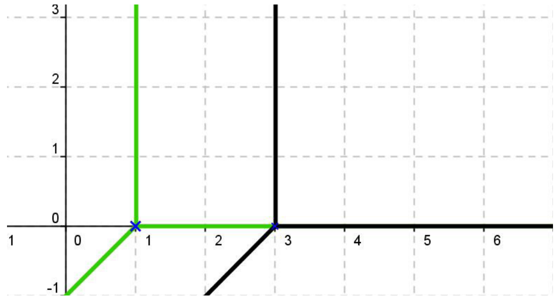
Le premier point est à la droite du deuxième point triple.



Les demi-droites horizontales sont en partie superposées : il y a une infinité de points d'intersection.

5e cas : $c - a < f - d$ et $c - b = f - e$

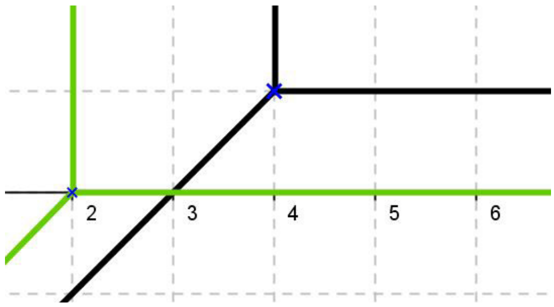
Le premier point triple est à la gauche du deuxième point triple



Les demi-droites horizontales sont en partie superposées : il y a une infinité de points d'intersection.

6e cas : $c - a < f - d$ et $c - b < f - e$

Le premier point triple est en dessous et à gauche du second second point triple

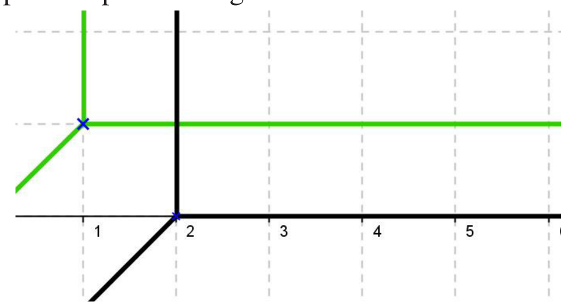


Sur l'exemple, il y a un seul point d'intersection.

Dans ce sixième cas, en fonction des valeurs de a, b, c , d, e et f, les deux demi-droites de direction sud-ouest peuvent aussi être en partie superposées.

7e cas : $c - a < f - d$ et $c - b > f - e$

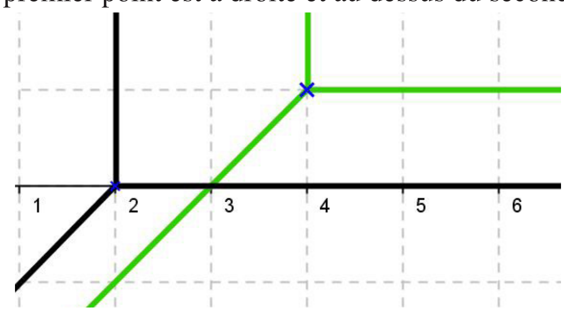
Le premier point est à gauche et au dessus du second.



Les deux droites ont un seul point d'intersection.

8e cas : $c - a > f - d$ et $c - b > f - e$

Le premier point est à droite et au dessus du second.

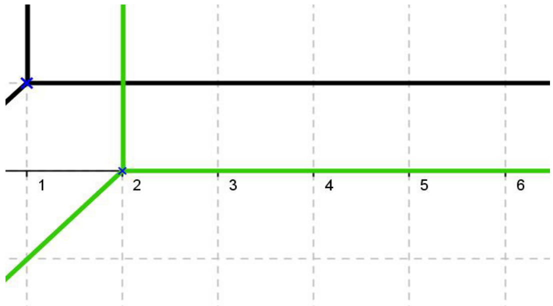


Sur l'exemple, il y a un seul point d'intersection.

Dans ce huitième cas, en fonction des valeurs de a, b, c , d, e et f, les deux demi-droites de direction sud-ouest peuvent aussi être en partie superposées.

9e cas : $c - a > f - d$ et $c - b > f - e$

Le premier point triple se trouve à droite et en dessous du second.



Les deux droites ont un seul point d'intersection.

Propriété. *Deux droites tropicales ont soit un seul soit une infinité de points d'intersection.*

Remarque : contrairement aux droites en géométrie euclidienne, *deux droites tropicales ont toujours au moins un point d'intersection.*

III - Cercles tropicaux

Notre chercheur nous a alors proposé de réfléchir à la forme des cercles en géométrie tropicale. En nous inspirant de l'équation cartésienne des cercles et de la transposition de l'équation de droite en géométrie tropicale, nous avons défini les cercles tropicaux.

Définition : En géométrie tropicale, *les cercles* sont l'ensemble des points $(x\,;y)$ tels qu'ils vérifient l'une [au moins] des trois inéquations :

$$(x\text{-}a) \otimes (x\text{-}a) = (y\text{-}b) \otimes (y\text{-}b) \leq c \otimes c$$
$$(x\text{-}a) \otimes (x\text{-}a) = c \otimes c \leq (y\text{-}b) \otimes (y\text{-}b)$$
$$(y\text{-}b) \otimes (y\text{-}b) = c \otimes c \leq (x\text{-}a) \otimes (x\text{-}a)$$

On peut simplifier ces équations avec les opérations usuelles :

$$2 \times (x\text{-}a) = 2 \times (y\text{-}b) \leq 2 \times c$$
$$2 \times (x\text{-}a) = 2 \times c \leq 2 \times (y\text{-}b)$$
$$2 \times (y\text{-}b) = 2 \times c \leq 2 \times (x\text{-}a)$$

On retrouve une équation proche de celle des droites tropicales. On a alors montré les mêmes propriétés.

Propriété. *Tous les cercles tropicaux sont formées de 3 demi-droites :*

- *une première qui part vers le nord*
- *une seconde qui part vers le sud-ouest*
- *une troisième qui part vers l'est*

Ces trois demi-droites se coupent en un point [elles ont même origine] que nous avons appelé le « point triple »

Notre chercheur nous a lors appris qu'il n'existe pas de cercle en géométrie tropicale puisque ce sont des droites. [Note : en divisant par 2 chaque terme des inéquations de cercle, on retrouve des inéquations de droites]

***