Le jeu de ping

Année 2016-2017

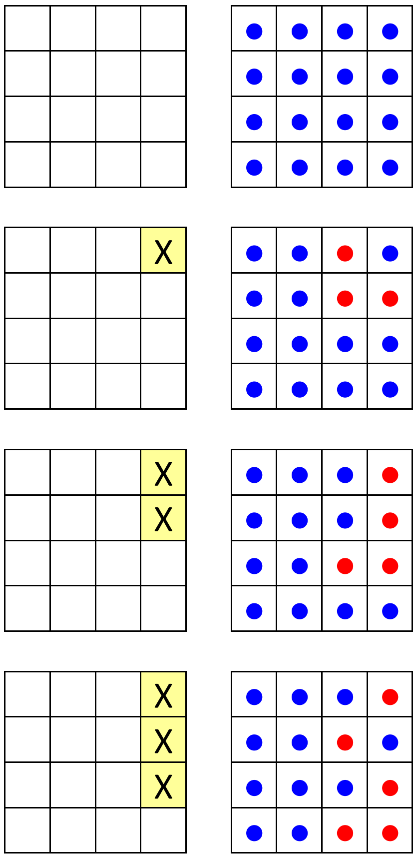
Auteurs : DELONGCHAMPS Julie (T^{ale} ES), NOIRET Brice (1ère S) et PÉTILLON Lucie (T^{ale} ES)
Établissement : Lycée Condorcet, Saint-Quentin (02).
Encadrés par : Fabien AOUSTIN.
Chercheur : Fabien DURAND, Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée, Université de Picardie Jules Verne.

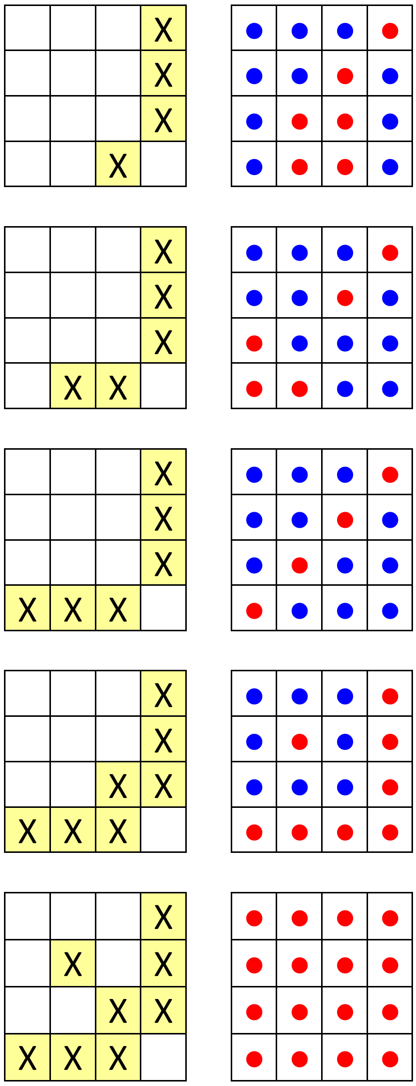
1) Présentation du jeu

Des pions bicolores à deux faces sont disposés sur un damier.
On souhaite tous les retourner en respectant la règle suivante :

- on choisit un pion ;
- on retourne tous les pions qui sont à côté.

Voici un exemple pour mieux comprendre.
À gauche, on note la case sélectionnée et à droite on indique l'état du plateau de jeu.





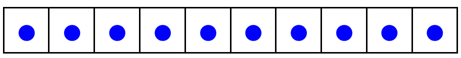
Nous nous sommes demandé s'il est toujours possible de gagner à ce jeu.

2) Quelques remarques

Quelques observations permettent de simplifier la recherche d'une solution à ce jeu.
Choisir deux fois la même case ne change rien.
L'ordre dans lequel les cases sont choisies ne change rien sur la situation finale.
Ce qui compte c'est le nombre de cases sélectionnées autour de chaque case : chaque case doit être entourée d'un nombre impair de cases sélectionnées.
Le jeu consiste donc maintenant à disposer des croix sur un damier de façon à ce que chaque case soit entourée d'un nombre ***impair*** de croix.

3) Le cas des bandes 1 × *n*

On souhaite retourner tous les pions sur une bande :



Après quelques essais à la main, nous avons trouvé des solutions dans les cas où la longueur de la bande est : 4, 6, 7, 8, 10...
Mais dans certaines situations (comme 5 ou 9 par exemple) nous ne trouvions pas de réponse.
En utilisant la méthode des croix, nous avons pu résoudre ce cas.

Pour que le premier pion soit retourné, il faut forcément sélectionner la deuxième case :

	X												

Il y a alors deux possibilités :
- Cas n° 1 : la première case est sélectionnée.
- Cas n° 2 : la première case n'est pas sélectionnée.

Étude du cas n° 1 :

X	X												

La deuxième case doit avoir un nombre impair de voisines sélectionnées (sinon le pion ne sera pas retourné). La troisième case est donc vide.

X	X	O											

La troisième case doit aussi avoir un nombre impair de voisines sélectionnées.
La quatrième case est donc vide.

X	X	O	O										

La quatrième case doit aussi avoir un nombre impair de voisines sélectionnées.
La cinquième case est donc sélectionnée.

X	X	O	O	X									

La cinquième case doit aussi avoir un nombre impair de voisines sélectionnées.
La sixième case est donc sélectionnée.

X	X	O	O	X	X								

En continuant ainsi, on constate que le cas n° 1 donne :

X	X	O	O	X	X	O	O	X	X	O	O	etc.

Étude du cas n° 2 :
Sur le même modèle, le cas n° 2 donne :

O	X	X	O	O	X	X	O	O	X	X	O	etc.

Revenons maintenant à la résolution du jeu pour une bande $1 \times n$.
► Si n est un multiple de 4, le jeu a une solution, le cas n° 1 convient :

O	X	X	O	O	X	X	O	O	X	X	O	O	X	X	O

► Si n est un multiple de 4 plus 3, le jeu a une solution, le cas n° 1 convient aussi :

O	X	X	O	O	X	X	O	O	X	X	O	O	X	X

► Si *n* est un multiple de 4 plus 2, le jeu a une solution, le cas n° 2 convient :

X	X	O	O	X	X	O	O	X	X	O	O	X	X

► Si *n* est un multiple de 4 plus 1, ni le cas n° 1, ni le cas n° 2 ne conviennent car la dernière case n'a pas un nombre impair de voisines sélectionnées :

O	X	X	O	O	X	X	O	O	X	X	O	O

X	X	O	O	X	X	O	O	X	X	O	O	X

Le jeu n'a donc pas de solution dans ce cas !

3) Le cas des bandes 2 × *n*

Dans cette situation, il y a toujours une solution. Il suffit de sélectionner toutes les cases !

X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X

4) Le cas des carrés *n* × *n*

4-a) Des cas déjà traités

On a déjà vu qu'il y a des solutions pour les carrés 2 × 2 et 4 × 4.

X	X
X	X

			X
	X		X
		X	X
X	X	X	

4-b) Le cas 3 × 3

Nous avons cherché une solution pour le carré 3 × 3, puis par élimination des différents cas possibles, nous en avons conclu que cette configuration n'avait pas de solution. On note les cases comme indiqué ci-dessous :

	1	2	3
A			
B			
C			

Commençons par le coin A1.

Rappelons que pour qu'un pion soit retourné, il lui faut un nombre impair de voisins sélectionnés : alors, pour que le pion en A1 soit retourné il lui faut soit 1, soit 3 voisins.
Avec un seul voisin (cas 1), il y a trois possibilités :

Cas 1.1

	X	
O	O	

Cas 1.2

	O	
O	X	

Cas 1.3

	O	
X	O	

Les cas 1.1 et 1.3 sont en fait identiques par symétrie.

Avec trois voisins (cas 2), il y a une seule possibilité :

Cas 2

	X	
X	X	

Pour simplifier la suite, mettons en vert les cases qui respectent la condition de parité : « un nombre impair de voisines sélectionnées » et en rouge celles qui ne la respectent pas.

Traitement du cas 1 :

► Analysons le cas 1.1 (qui englobe le cas 1.3 par symétrie).
Ici, pour que la case A2 respecte la condition de parité, on doit lui ajouter 1 ou 3 voisins. On obtient alors les cas suivants :

Cas 1.1.1

X	X	X
O	O	X

Cas 1.1.2

X	X	O
O	O	O

Cas 1.1.3

O	X	X
O	O	O

Cas 1.1.4

O	X	O
O	O	X

La case A2 respecte maintenant la condition. Si on s'intéresse à la case A3, on peut rejeter les cas 1.1.1 et 1.1.4 car la condition de parité n'est pas respectée.

Analysons maintenant le cas 1.1.2.
Pour que la case B1 vérifie la condition de parité, il faut lui ajouter un voisin.
Il y a deux solutions possibles :

Cas 1.1.2.1

X	X	O
O	O	O
X	O	

Cas 1.1.2.2

X	X	O
O	O	O
O	X	

Le cas 1.1.2.1 n'est pas envisageable car la case C1 ne respecte pas la condition de parité.
Le cas 1.1.2.2 n'est pas envisageable non plus car si on met une croix dans la case C3, la condition de parité ne sera pas respectée en B2 et si on met un rond en C3, la condition de parité ne sera pas respectée en C2.

Analysons maintenant le cas 1.1.3.

Ce cas est en fait identique au cas 1.1.2 par symétrie.

► Analysons maintenant le cas 1.2.
La situation est suivante :

	O	
O	X	

Pour que la case A2 respecte la condition de parité, on se doit de lui rajouter 0 ou 2 voisins.

On obtient alors les cas suivants :

Cas 1.2.1

X	O	X
O	X	O

Cas 1.2.2

O	O	X
O	X	X

Cas 1.2.3

X	O	O
O	X	X

Cas 1.2.4

O	O	O
O	X	O

On rejette les cas 1.2.2 et 1.2.3 car la condition de parité n'est pas respectée en A3.

Analysons maintenant le cas 1.2.1.
Pour que la case B1 vérifie la condition de parité, il faut lui ajouter un voisin. Il y a deux solutions possibles :

Cas 1.2.1.1

X	O	X
O	X	O
X	O	

Cas 1.2.1.2

X	O	X
O	X	O
O	X	

Le cas 1.2.1.1 n'est pas envisageable. En effet, si on met une croix en C3, la condition de parité n'est pas respectée en B2 et si on met un rond en C3, la condition de parité n'est pas vérifiée en B3.
Le cas 1.2.1.2 n'est pas envisageable non plus car la case C1 ne vérifie pas la condition de parité.

Analysons maintenant le cas 1.2.4.
Pour que la case B1 vérifie la condition de parité, il faut lui ajouter 0 ou 2 voisins. Il y a deux solutions possibles :

Cas 1.2.4.1

O	O	O
O	X	O
O	O	

Cas 1.2.4.2

O	O	O
O	X	O
X	X	

Le cas 1.2.4.1 n'est pas envisageable. En effet, si on met une croix en C3, la condition de parité n'est pas respectée en C2 et si on met un rond en C3, la condition de parité n'est pas vérifiée en B2.
Le cas 1.2.4.2 n'est pas envisageable non plus car la condition de parité n'est pas vérifiée en C1.

Traitement du cas 2 :
La situation actuelle est la suivante :

	X	
X	X	

Ici, pour que la case A2 respecte la condition de parité, on se doit de lui rajouter 1 ou 3 voisins.
On obtient alors les cas suivants :

Cas 2.1.1

X	X	O
X	X	O

Cas 2.1.2

O	X	X
X	X	O

Cas 2.1.3

O	X	O
X	X	X

Cas 2.2

X	X	X
X	X	X

Notre pion A2 respecte donc maintenant la condition. Si on s'intéresse maintenant au pion A3, on peut rejeter les cas 2.1.1 et 2.1.2 car la condition de parité n'est pas respectée.

Analysons maintenant le cas 2.1.3.
Pour que la case B1 vérifie la condition de parité, il faut lui ajouter un voisin.
Il y a deux solutions possibles :

Cas 2.1.3.1

O	X	O
X	X	X
X	O	

Cas 2.1.3.2

O	X	O
X	X	X
O	X	

Le cas 2.1.3.1 n'est pas envisageable car la case C1 ne vérifie pas la condition de parité.
Le cas 2.1.3.2 n'est pas envisageable non plus. En effet, si on met une croix en C3, la condition de parité n'est pas respectée en B3 et si on met un rond en C3, la condition de parité n'est pas vérifiée en B2.

Analysons maintenant le cas 2.2.
Pour que la case B1 vérifie la condition de parité, il faut lui ajouter 0 ou 2 voisins.

Cas 2.2.1

X	X	X
X	X	X
O	O	

Cas 2.2.2

X	X	X
X	X	X
X	X	

Le cas 2.2.1 n'est pas envisageable car la case C1 ne vérifie pas la condition de parité.
Le cas 2.2.2 n'est pas envisageable non plus. En effet, si on met une croix en C3, la condition de parité n'est pas respectée en B2 et si on met un rond en C3, la condition de parité n'est pas vérifiée en B3.

Conclusion :
Tous les cas on été envisagés et aucun ne convient.
Le jeu n'a donc pas de solution pour le carré 3 × 3.

4-c) Une conjecture

Après de longues recherches, nous n'avons pas trouvé de solution pour le carré 5 × 5.
Nous avons trouvé une solution pour le carré 6 × 6.

X					X
	X	X	X	X	
	X			X	
	X			X	
	X	X	X	X	
X					X

Nous avons donc émis la conjecture suivante :

Il y a une solution au cas n × n si n est pair.
Il n'y a pas de solution au cas n × n si n est impair.

Nous n'avons hélas pas réussi à la démontrer.

4-d) Des solutions pour 8 × 8 et 10 × 10

Nous avons limité les recherches à une solution symétrique, comme pour le carré 6 × 6.
Une fois la première ligne et la première colonne complétées, tout se remplit au fur et à mesure :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	X	O	O	O	O	X	X
2	X							
3	O							
4	O							
5	O							
6	O							
7	X							
8	X							

A	B	C	D	E	F	G	H
X	X	O	O	O	O	X	X
X	X						
O							
O							
O							
O							
X							
X							

A	B	C	D	E	F	G	H
X	X	O	O	O	O	X	X
X	X	O					
O							
O							
O							
O							
X							
X							

En effet, pour compléter la case B2, on compte les voisins de la case A1 : il y en a deux donc il faut en ajouter un troisième.
Ensuite, pour compléter la case C2, on compte les voisins de la case B1 : il y en a déjà trois donc il ne faut pas en ajouter.
Il suffit de continuer ainsi jusqu'à la dernière case puis de vérifier si les cases du bord ont bien aussi un nombre impair de voisines sélectionnées.

Cela limite les recherches et nous avons trouvé :

	X	X			X	X	
X	X		X	X		X	X
X		X			X		X
	X					X	
	X					X	
X		X			X		X
X	X		X	X		X	X
	X	X			X	X	

De même pour le carré 10 × 10, nous avons trouvé :

X		X	X	X	X	X	X		X
	X		X			X		X	
X			X	X	X	X			X
X	X	X					X	X	X
X		X		X	X		X		X
X		X		X	X		X		X
X	X	X					X	X	X
X			X	X	X	X			X
	X		X			X		X	
X		X	X	X	X	X	X		X

4-e) Avec un tableur

Ce que nous avons représenté jusqu'alors par une croix, nous le représenterons maintenant par un 1. Les cases non sélectionnées seront représentées par des 0.
Pour faciliter les calculs qui vont suivre, nous avons ajouté une plage de 0 en haut et à gauche du plateau de jeu car cela n'ajoute aucun voisin aux cases considérées. Nous avons alors commencé par remplir la première ligne et la première colonne de 0, que nous avons grisées pour être sûr de ne pas toucher à cette plage.
Ensuite, comme nous n'avons cherché que des configurations symétriques horizontalement, verticalement, et par rapport à la diagonale, nous avons remarqué que pour une ligne de *n* cases, il suffisait d'en compléter la moitié (*n*/2). Par exemple pour un carré de coté 10, on ne complète que les 5 premières cases de la deuxième ligne (la première étant la plage de 0). On pourra donc changer les valeurs pour les cases allant de B2 à F2. On les peint alors en bleu pour y voir plus clair.
Pour les autres cases du contour, puisque l'on a une symétrie verticale, on peut donc entrer dans G2 la formule « =F2 », dans la H2 « =E2 », etc.
On a aussi une symétrie diagonale donc on peut rentrer « =C2 » en B3, « =D2 » en B4, etc.
Du coup dans les cases allant de G2 à K2 et celles allant de B3 à B11, on ne doit plus rien saisir. On les peint en jaune pour y voir plus clair.
Comme on a dit qu'on pouvait ajouter une plage de 0 autour (car cela ne changerait rien au carré qui nous intéresse), on va colorier en vert une colonne à droite du carré, et une ligne en dessous. Notre but, vu qu'on a déjà la première ligne et la première colonne de 0, est de n'obtenir que des 0 dans les lignes vertes. Ainsi, on saura que les 100 cases du carré sont complétées correctement.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	
3	0	1											
4	0	0											
5	0	0											
6	0	1											
7	0	1											
8	0	0											
9	0	0											
10	0	1											
11	0	0											
12	0	0											
13	0												

Maintenant, pour que les cases soient correctement complétées, on va entrer une formule dans chacune des cases, ce qui fait que quand on va changer notre plage bleue, les cases du milieu (en blanc) vont changer en fonction des cases qui les entourent. La formule saisie en C3 et copiée jusqu'en L12 est la suivante :

« =SI(MOD(SOMME(B3;A3;A2;A1;B1;C1;C2);2)=0;1;0) ».

Voici quelques explications. Pour compléter la case C3, on compte le nombre de voisins de la case B2 : c'est la partie de la formule : SOMME(B3;A3;A2;A1;B1;C1;C2).

Ensuite, on veut savoir si ce nombre est pair ou impair. Pour ce faire, on calcule le reste dans la division de cette somme par 2. Si elle est paire on a 0, si elle est impaire on a 1. C'est la partie MOD de la formule.
Enfin, si ce reste est égal à 0 il faut écrire 1 en C3 et si ce reste est égal à 1, il faut écrire 0 en C3 (1).
Une fois la formule copiée jusqu'en L12, il n'y a plus qu'à essayer les différents cas possibles dans la ligne bleue. Comme il y a deux choix par case bleue, il y a en tout $2^5 = 32$ cas à essayer.
Une fois le bon « code » trouvé, les cases en vert se remplissent de 0 et on sait qu'on a trouvé une solution au jeu.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
3	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
4	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
5	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
6	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
7	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
8	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
9	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
10	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
11	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0											

Voici une solution pour le carré 10 × 10

Nous avons adapté notre méthode au carré 12 × 12. Il y avait 64 codes à essayer.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
3	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
4	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
6	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0
7	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
8	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
9	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
10	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
11	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
12	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
13	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
14	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
15	0													

Un exemple quand le « code » n'est pas bon.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0
3	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
4	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0
5	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
7	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
8	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
9	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
10	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
11	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0
12	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
13	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0													

Voici une solution pour le carré 12 × 12

Pour le carré 14 × 14, il y avait 7 cases bleues et donc 2^7 = 128 codes à essayer. Hélas, aucun ne fonctionne. Il n'y a donc pas de solution symétrique pour le carré 14 × 14.

5) D’autres idées

Nous avons essayé d’obtenir des solutions en collant des solutions plus petites.
Par exemple, à partir de la solution 4 × 4 :

			X	X			
	X		X	X		X	
		X	X	X	X		
X	X	X			X	X	X
X	X	X			X	X	X
		X	X	X	X		
	X		X	X		X	
			X	X			

Mais cela n’a pas marché... On voit par exemple que la case marquée d’une croix rouge a 6 voisines sélectionnées.

Nous avons aussi obtenu les résultats suivants :

n	2	4	6	8	10
Nombre de croix utilisées dans notre solution $n \times n$	4	8	16	32	60

Nous pensions trouver 64 croix pour notre solution 10 × 10 mais ce n’est finalement pas le cas.
D’ailleurs, pour notre solution 12 × 12, nous utilisons 84 croix (et non 128).

Note d’édition

(1) Ainsi, on remplit C3 de façon que B2 ait un nombre impair de voisins avec un 1.
Une fois la formule copiée sur toutes les cases du carré de diagonale C3-L12, toutes les cases du carré de diagonale 10 × 10 (de diagonale B2-K11) auront un nombre impair de voisins avec un 1, sauf que pour celles de la ligne 11 et de la colonne K on a ajouté des voisins fictifs ligne 12 et colonne L ; si par exemple la case K2 a un nombre pair de “vrais” voisins avec un 1 on trouvera un 1 en case L3, et si ce nombre est impair on y trouvera un 0 ; si on ne trouve que des 0 dans les cases vertes, ligne 12 et colonne L, toutes les cases du carré 10 × 10 ont un nombre impair de voisins avec un 1.