Jeu de type Morpion

2020 – 2021

Par Lou-Rose Vigreux (classe de seconde)

Professeurs : *Jérôme Carbini* et *Christophe Lebeaud*

Établissement : *Lycée les Catalins, Montélimar*

Chercheur : *Sylvain Gravier (Université Grenoble-Alpes)*

Sommaire :

I. Présentation du sujet

a. Les règles et le but du jeu

Le *Jeu de Type Morpion* est un jeu un peu différent du *Morpion* classique. Les règles et le but du jeu varient sur plusieurs points.

Nous disposons de deux joueurs : le joueur bleu et le joueur rouge. Chaque joueur possède un nombre illimité de pions de sa couleur. Les deux joueurs jouent sur une forme de quadrillage définie avant le début de la partie.

Le but du jeu est différent selon le joueur :

- *Le joueur bleu :* doit aligner trois pions bleus consécutifs de manière verticale ou horizontale. S'il y parvient, il gagne la partie.
- *Le joueur rouge :* doit empêcher le joueur bleu d'aligner ses trois pions. Si le joueur bleu ne parvient pas à aligner trois pions bleus consécutifs, le joueur rouge gagne.

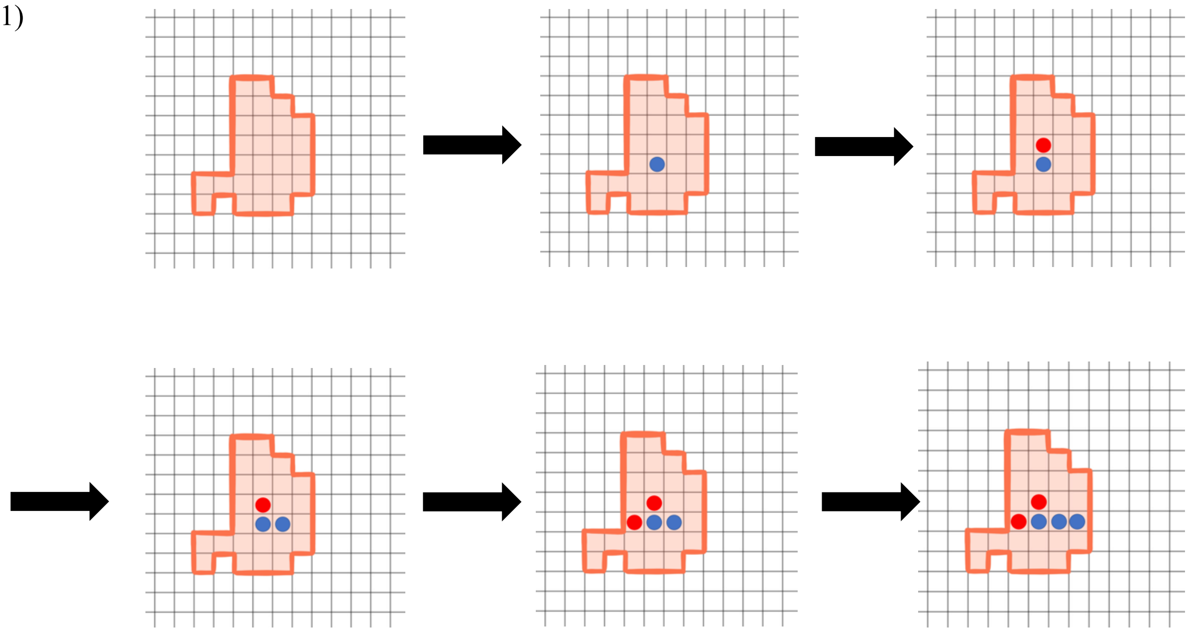
Le joueur bleu commence toujours. Les joueurs jouent tour à tour. Le nombre de coups joués n'est pas limité, si ce n'est par le nombre de cases du quadrillage. L'alignement en diagonale n'est pas reconnu. Le joueur rouge ne cherche pas à aligner ses pions, il doit seulement empêcher le joueur bleu de le faire. Nous considérons que les deux joueurs jouent parfaitement bien.

À noter : Une partie ne peut donc pas se terminer avec « égalité » car il y a toujours un gagnant.

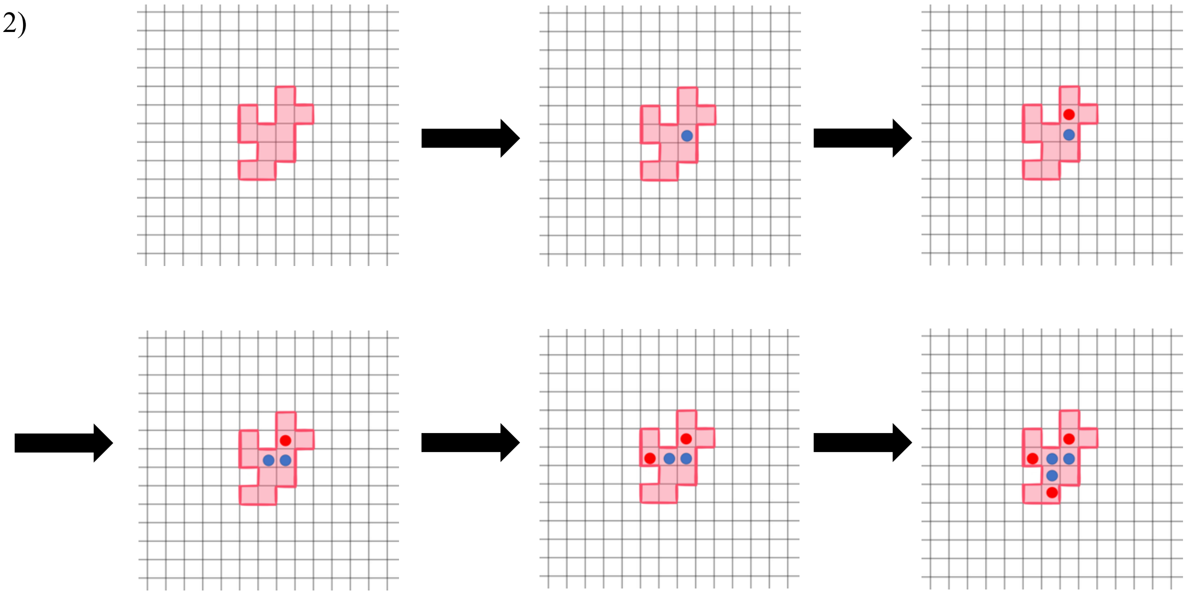
b. Deux parties types

Pour mieux appréhender le jeu et nous amener à notre problématique, je vous propose deux parties types :

1)



2)



La première partie est donc gagnante pour le joueur bleu car il est parvenu à aligner trois pions de manière consécutive (elle est perdante pour le joueur rouge). La seconde partie est perdante pour le joueur bleu car il n'est pas parvenu à aligner trois pions consécutifs (elle est gagnante pour le joueur rouge) (1).

c. Notre problématique

Après avoir joué de nombreuses fois (comme montré précédemment), plusieurs interrogations se sont manifestées :

- Pourquoi le joueur bleu a-t-il ou n'a-t-il pas gagné ? En dehors du fait qu'il soit parvenu ou qu'il ne soit pas parvenu à aligner ses trois pions, comment se fait-il que cet alignement ait été ou n'ait pas été possible ?

- Comment pourrions-nous savoir si une figure est gagnante pour le joueur bleu avant de commencer la partie ?

Je suis donc parvenue à la problématique suivante :

Pouvons-nous déterminer avec certitude, en regardant seulement la forme du quadrillage, si le joueur bleu peut gagner ? Si oui, comment ?

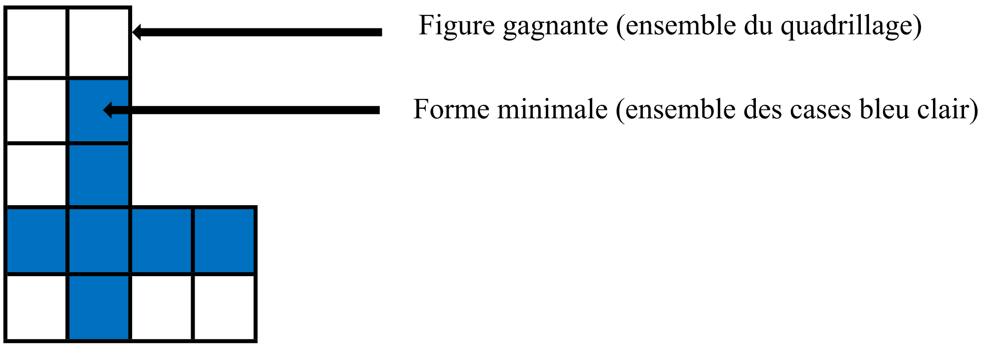
Pour tenter de répondre à celle-ci, nous avons voulu respecter l'ordre chronologique de nos recherches tout en essayant de garder un lien logique entre les différentes parties. Ainsi, pour faciliter la compréhension de notre exposé, nous avons dû échanger l'ordre de certains éléments, ne respectant plus intégralement l'ordre des découvertes.

d. Un point de vocabulaire

Figure gagnante : Forme de quadrillage dans lequel le joueur bleu gagne forcément (en considérant que les deux joueurs jouent parfaitement bien).

Forme minimale : Figure gagnante qui ne l'est plus dès lors que l'on retire une case de son quadrillage (2).

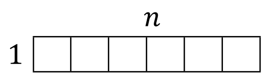
Configuration gagnante : Configuration présente à l'intérieur d'une forme minimale. Elle correspond à la disposition des pions bleus sur les cases, lorsque le joueur gagne inévitablement à son prochain coup (peu importe où le joueur rouge joue, en considérant que les deux joueurs jouent parfaitement bien). Une configuration gagnante libère donc deux possibilités de coups gagnants pour joueur bleu.



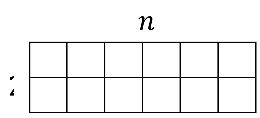
II. Les figures régulières

Pour commencer nos recherches et pour déterminer des figures gagnantes, nous avons décidé de travailler avec des formes dites régulières, plus précisément avec des rectangles et carrés.

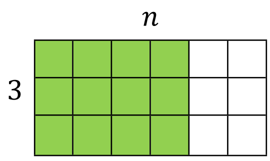
a. Les rectangles



Nous avons voulu éliminer toutes les figures non-gagnantes. Il est évidemment impossible pour le joueur bleu d'aligner trois pions dans un rectangle de 1 *par* n. L'explication plus rigoureuse, trouvée à ce stade de nos recherches, sera abordée plus tard dans notre exposé (3).

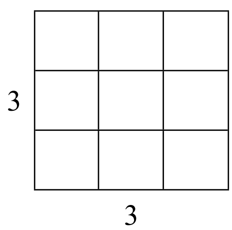


Nous avons ensuite travaillé sur le 2 *par* n. Nos nombreuses parties jouées nous ont permis de conjecturer que le rectangle 2 *par* n n'est pas une figure gagnante. Cette conjecture s'est révélée vraie.



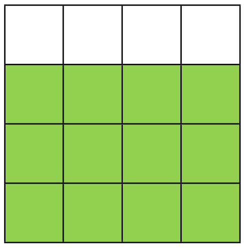
Nous avons poursuivi nos recherches avec le rectangle de 3 *par* n. Suite à de nombreuses parties, nous nous sommes aperçus que n'importe quel rectangle avec une largeur $l \geq 3$ et une longueur $L \geq 4$ était une figure gagnante (4).

b. Les carrés



Nos recherches se sont ensuite portées sur les carrés. Nous avons donc commencé avec le carré 3 *par* 3, celui du *Morpion* classique. Nous avons conjecturé que le carré 3 *par* 3 n'était pas une figure gagnante.

4



4

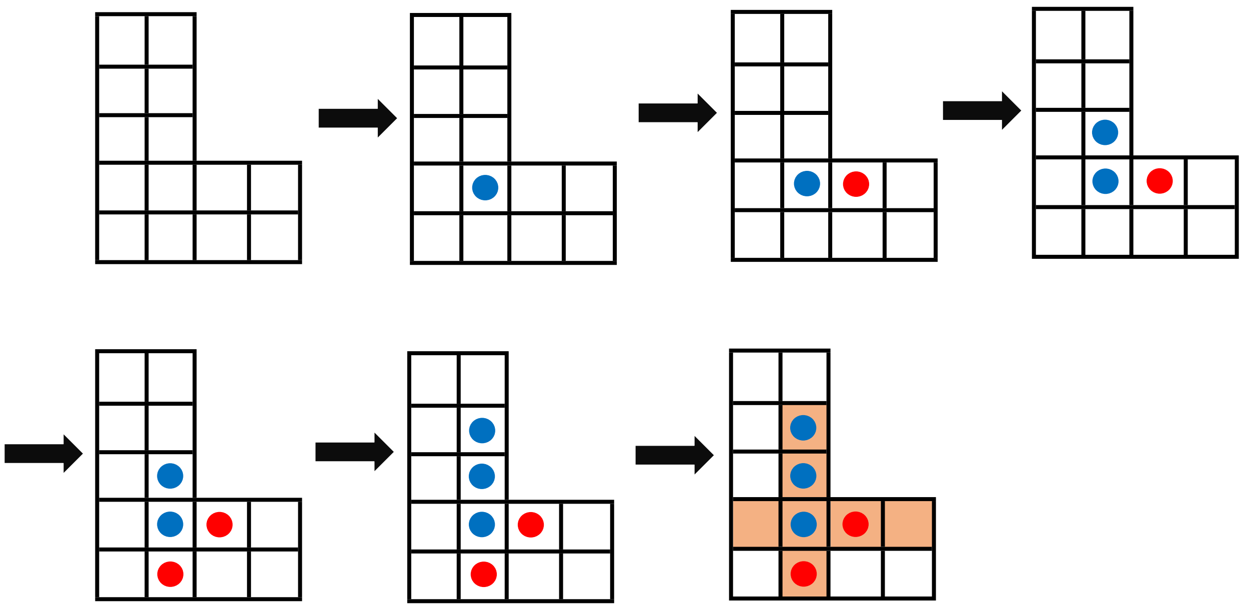
Les parties jouées avec le carré 4 *par* 4 nous ont amenées à conclure ceci : le carré 4 *par* 4 est une figure gagnante, ce qui est logique car on retrouve le rectangle 3 *par* 4. Il possède donc une largeur $l \geq 3$ et une longueur $L \geq 4$.

III. Les figures irrégulières

Nous avons déterminé trois types de figures irrégulières : les figures irrégulières pleines, les figures à trous et les escaliers. Ce que nous définissons comme figures irrégulières sont toutes les figures qui ne sont pas des quadrilatères pleins.

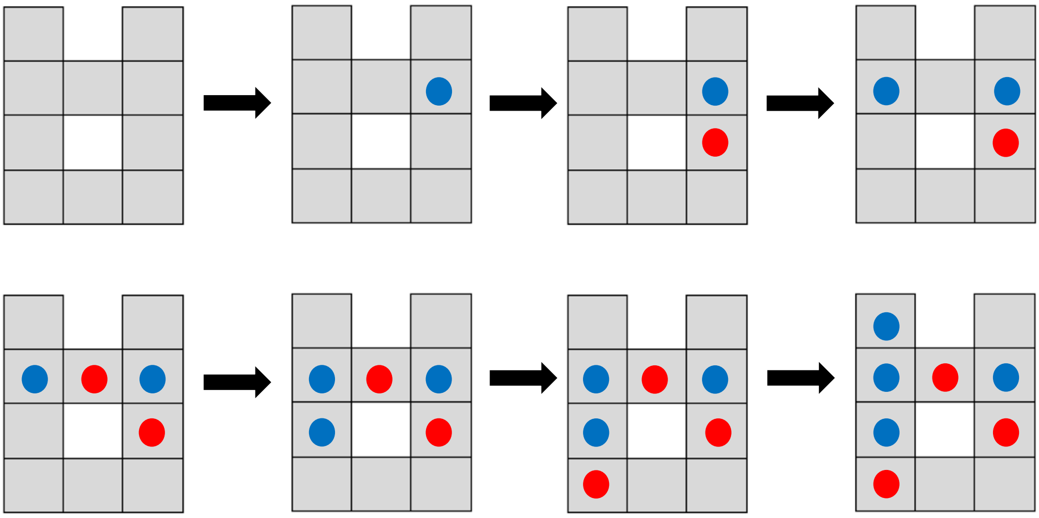
a. Les figures irrégulières pleines

Voici, ci-après, l'exemple d'une figure irrégulière pleine et gagnante. Nous avons décidé de jouer dans ce genre de figure afin de déterminer toutes les cases qui sont nécessaires à la victoire du joueur bleu (lorsque la figure était gagnante).

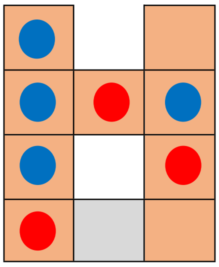


Nous avons donc pu déterminer les cases qui étaient nécessaire à la victoire du joueur bleu (représentées ci-dessus en orange). L'ensemble de ces cases forme une forme minimale.

b. Les figures à trous

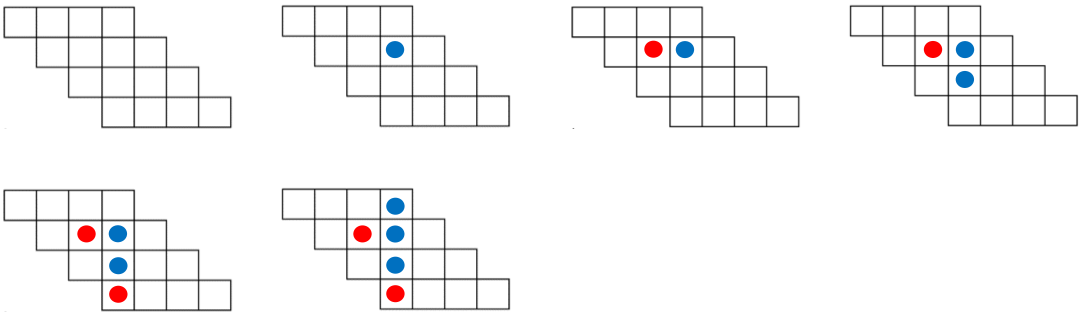


J'ai choisi l'exemple de la figure gagnante à trous (ci-dessus) pour illustrer de nouveau la recherche des cases qui sont nécessaires à la victoire. Voici les cases qui forment la forme minimale :

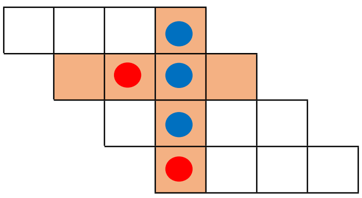


c. Les escaliers

Enfin, nous avons travaillé avec les figures dites « escaliers ». Voici l'exemple du jeu dans un escalier gagnant :



Nous avons ainsi pu distinguer cette forme minimale (la même que celle du premier type de figures irrégulières), qui regroupe toutes les cases nécessaires à la victoire :



IV. Les conditions gagnantes

a. Les conditions évidentes

Condition nécessaire n°1 : Pour être gagnante, une figure doit au moins posséder trois cases consécutives de manière verticale ou horizontale. (*Attention :* Cela ne signifie pas que toutes les figures possédants trois cases consécutives sont gagnantes).

Condition nécessaire n°2 : Pour que le joueur bleu puisse aligner trois pions il faut que la figure ait au moins cinq cases ; trois cases pour les coups du joueur bleu et deux cases pour les coups du joueur rouge.
(*Attention :* Cela ne signifie pas que toutes les figures ayant cinq cases sont gagnantes mais seulement que toutes les figures gagnantes ont au moins cinq cases).

Condition suffisante n°3 : La première façon de déterminer si une figure est gagnante serait alors de savoir si la figure contient au moins un rectangle plein d'une largeur $l \geq 3$ et une longueur $L \geq 4$ (5).

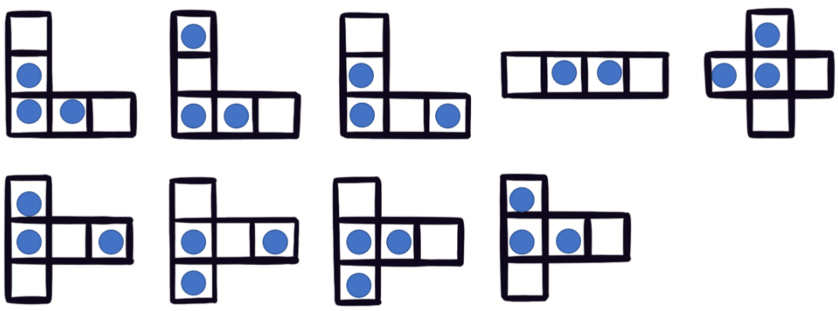
b. Les configurations gagnantes

Pour mieux comprendre la victoire du joueur bleu dans les formes dites « minimales » (partie développée juste après) et nous amener à une possible élaboration d'un théorème, nous avons voulu nous intéresser à l'emplacement des pions dans ces formes et aux configurations qui permettent sa victoire.

Nous avons donc appelé « configuration gagnante » une disposition de pions bleus dans une forme donnée offrant au joueur bleu la possibilité de gagner d'au moins deux manières différentes (permettant la victoire de celui-ci, peu importe où le joueur rouge joue lors de son tour).

Nous avons donc remarqué que le schéma de disposition ayant une double possibilité de victoire revenait constamment dans une figure gagnante. Nous avons alors décidé d'utiliser le nom de ***Fourchette*** pour nommer ce genre de configurations.

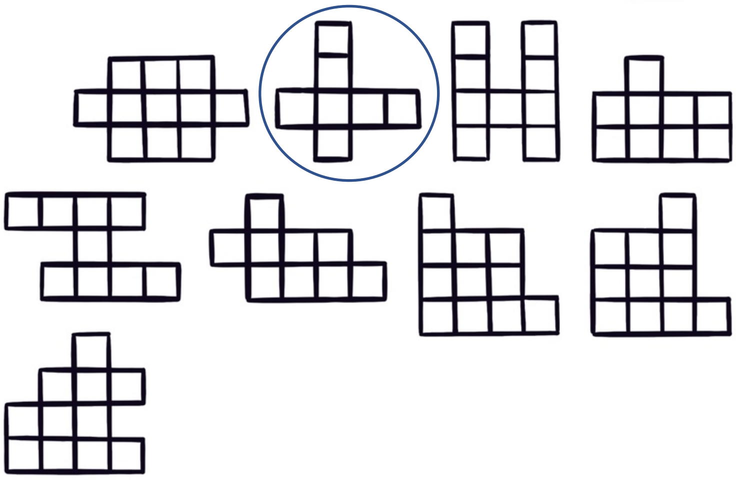
Voici des configurations gagnantes :



c. Les formes minimales

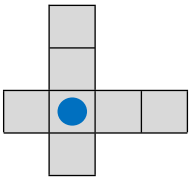
D'après notre définition, une forme minimale doit s'auto-suffire. Cela signifie qu'à sa seule présence à l'intérieur d'une figure, la victoire est assurée pour le joueur bleu. Elle offre de manière sûre (si les joueurs jouent correctement) un aboutissement en *Fourchette* pour le joueur bleu. Les autres cases de la figure gagnante ne participant pas à la victoire, le jeu peut se dérouler seulement dans la forme minimale. Si l'une des cases d'une forme minimale est supprimée, alors la figure n'est plus gagnante pour le joueur bleu.

Nous avons donc pu lister l'ensemble des formes minimales que nous avions trouvées :

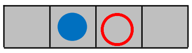


Les démonstrations montrant que ces formes sont minimales sont longues à écrire (6). Pour comprendre néanmoins le principe, voici la démonstration pour la forme entourée :

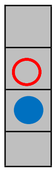
1) La forme est bien une figure gagnante :



Pour gagner, le joueur bleu doit jouer à l'intersection des deux alignements de quatre cases. En effet, en jouant ainsi le joueur rouge ne pourra pas casser tous les alignements de trois. Cela permet au joueur bleu d'arriver à un coup en *Fourchette*.
On peut décomposer cette forme de la manière suivante :

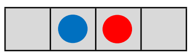


et

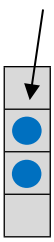


Le joueur rouge doit jouer dans l'une des deux cases (avec le rond rouge creux) pour casser un possible alignement de trois et un coup en *Fourchette*. Mais comme il ne peut jouer qu'un pion à la fois, il restera forcément une possibilité de *Fourchette* au joueur bleu.

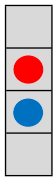
a) Admettons que le joueur rouge joue ici :



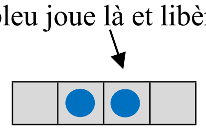
Le joueur bleu joue là et libère deux possibilités de coups gagnants, il gagne.



b) Admettons que le joueur rouge joue ici :



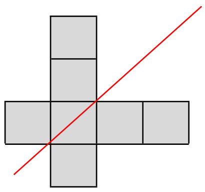
Le joueur bleu joue là et libère deux possibilités de coups gagnants, il gagne.



Lorsque le joueur bleu commence à l'intersection (et que les deux joueurs jouent parfaitement bien), le forme est forcément gagnante pour le joueur bleu.

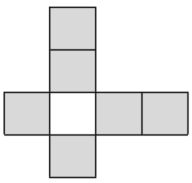
2) La forme est bien minimale :

Nous pouvons « découper » cette forme en deux parties selon l'axe de symétrie (en rouge). C'est pour cela qu'il sera suffisant d'illustrer la nécessité de seulement 4 cases car cette nécessité s'applique aux cases symétriques de celles illustrées.



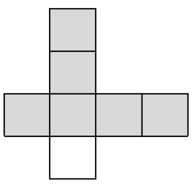
Raisonnons par l'absurde, supposons que l'on élève une case :

<u>Cas n°1 :</u>



Nous décidons d'enlever une case représentée en blanc dans la forme à gauche. D'après notre **condition n°1**, affirmant que pour parvenir à aligner trois pions bleus (et amener à une victoire), une figure doit posséder au moins trois cases consécutives. Or, cette forme ne possède plus trois cases consécutives de manière horizontale ou verticale, elle n'est donc plus gagnante ni minimale. Cette case est alors nécessaire à la victoire du joueur bleu et ne peut donc pas être retirée.

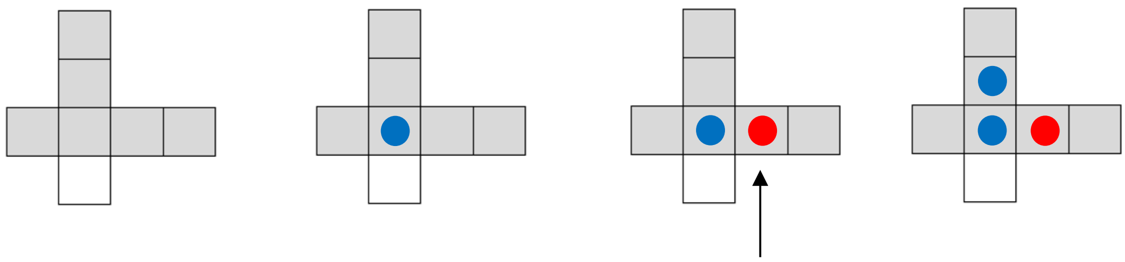
<u>Cas n°2 :</u>



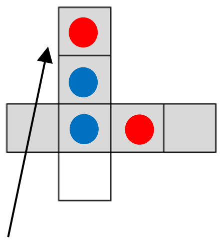
Ensuite, nous enlevons la case représentée en blanc à gauche. Nous ne pouvons pas supprimer cette case car sans sa présence le coup de *la Fourchette* n'est plus possible.

En effet, la stratégie du joueur rouge est de casser tout alignement de trois cases. Dans cette figure, le joueur rouge pourra toujours disposer un pion de manière à rompre un alignement.

Voici la partie expliquant cela :

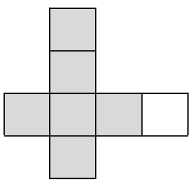


Le joueur rouge joue ici pour couper un alignement de trois cases et pour éviter que le joueur bleu parvienne à un coup en *Fourchette*.



Le joueur rouge joue ici pour casser le dernier alignement de trois pions bleus possible.

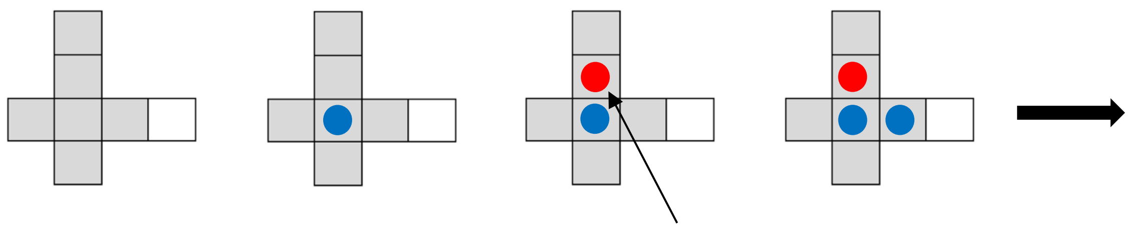
Cas n°3 :



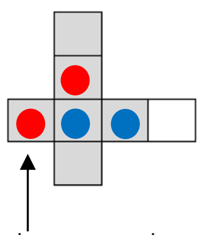
Cette case fonctionne de la même manière que la précédente, sans elle l'alignement de trois pions bleus n'est pas possible.

La stratégie du joueur rouge reste la même, son but est de casser tout alignement de trois cases. Dans cette figure, le joueur rouge pourra toujours disposer un pion de manière à rompre un alignement.

Voici la partie illustrant cela :

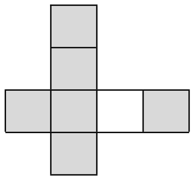


Le joueur rouge joue ici pour couper un alignement de trois cases et pour éviter que le joueur bleu parvienne à un coup en *Fourchette*.

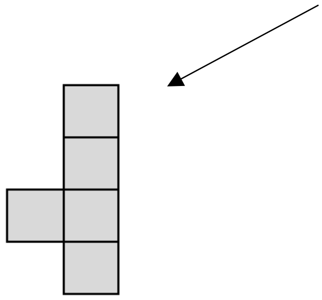


Le joueur rouge joue là pour casser le dernier alignement de trois pions bleus possible.

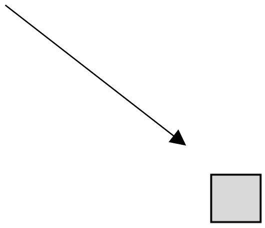
Cas n°4 :



Nous pouvons découper la figure (ci-dessus) en deux :



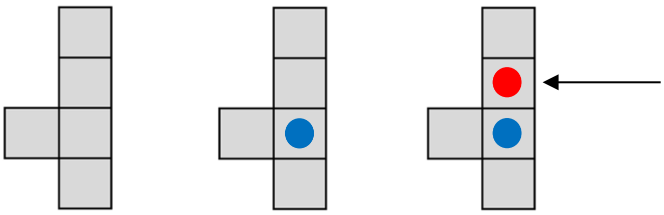
Sous-figure n°1



Sous-figure n°2

Il est évident que la *sous-figure n°2* n'est pas gagnante car elle ne possède qu'une seule case pour aligner trois pions bleus. Elle ne répond donc ni à la **condition n°1** ni à la **condition n°2**. La *sous-figure n°1* n'est pas gagnante également car elle ne permet pas de coup en *Fourchette*. Dans cette figure, le joueur rouge pourra toujours disposer un pion de manière à rompre un alignement.

Voici le début d'une partie dans *sous-figure n°1* :



Le joueur rouge joue ici car il coupe le seul alignement possible de trois cases et rend impossible le coup en *Fourchette*.

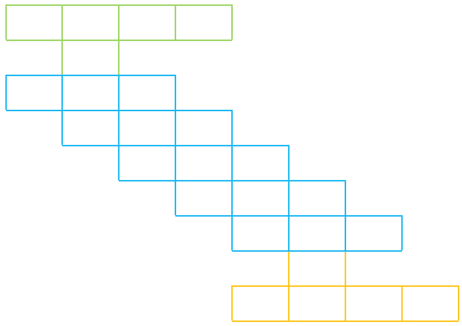
Il n'y a plus trois cases consécutives pour le joueur bleu, il ne peut donc plus gagner.

Chaque forme minimale listée précédemment peut être prouvée réellement minimale par une démonstration similaire à celle-ci.

Condition suffisante n°4 : Les formes minimales sont présentes dans des figures gagnantes, elles témoignent de la victoire certaine du joueur bleu. Le fait de trouver une forme minimale (*se référer à la liste p.9*) dans une figure permet donc d'affirmer que cette figure est gagnante.

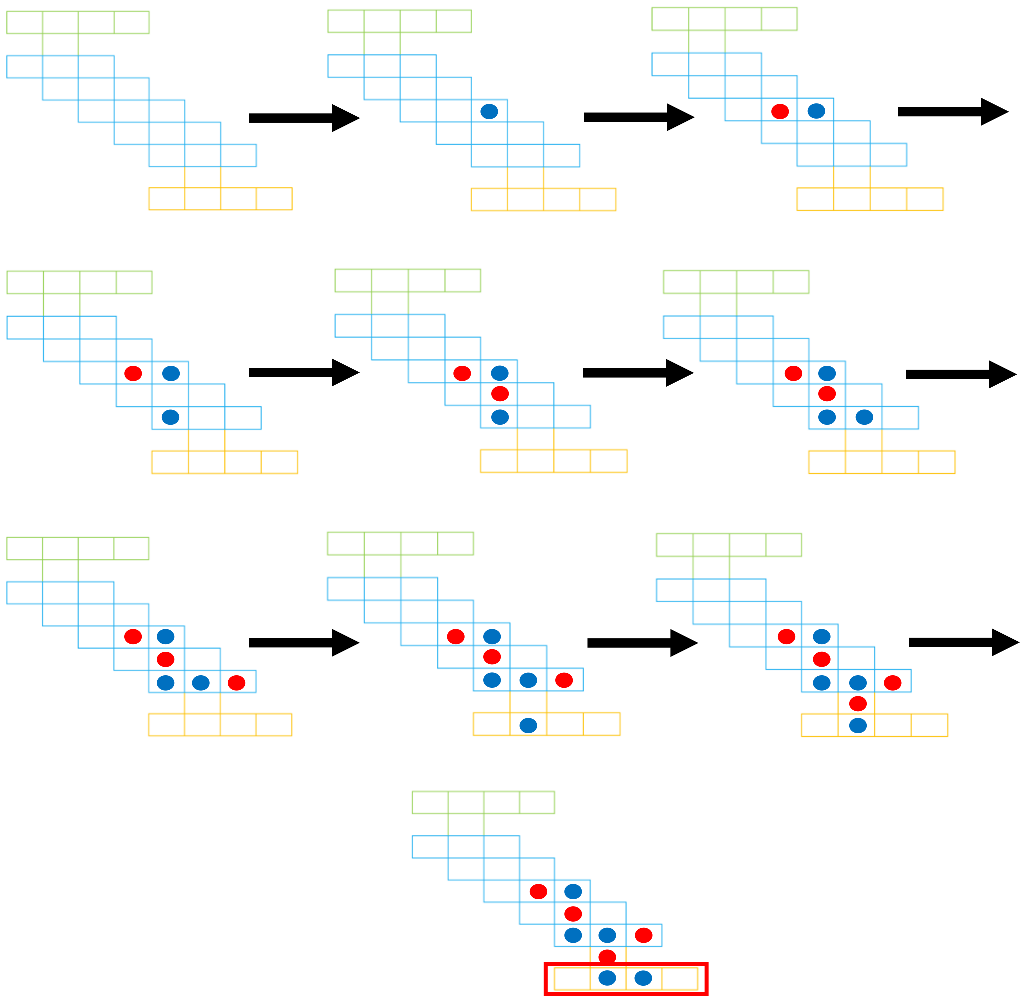
Cependant, nous ne savions pas si toutes les formes minimales avaient été listées, ni même s'il en existait un nombre fini. Nous avons étudié d'autres types de figures qui nous laissaient penser que d'autres formes pourraient permettre une victoire.

Nous avons donc continué nos recherches, en commençant par étudier plus précisément les escaliers. Nous avons notamment travaillé sur l'escalier *3 par 3* avec 2 cases en commun sur chaque marche. Cet escalier semblant perdant (d'après notre conjecture basée sur les nombreuses parties jouées et sur le manque de formes minimales listées), nous avons voulu le rendre gagnant en y ajoutant une forme différente des formes minimales listées précédemment à son extrémité. Nous nous sommes aperçus que la figure devenait gagnante si l'on ajoutait cette forme aux deux extrémités. (Il est impératif d'ajouter les formes supplémentaires aux deux extrémités afin que la figure reste gagnante pour le joueur bleu peu importe si le joueur rouge décide de se positionner au-dessus ou à la même hauteur ou en-dessous du premier pion du joueur bleu). Ainsi, nous pouvions découper notre figure en trois parties : ***la forme supplémentaire A***, ***la partie escalier*** (ce que nous appellerons par la suite ***chaîne de forçage***) et ***la forme supplémentaire A'***.



Forme supplémentaire A *Forme supplémentaire A'* *Partie escalier*

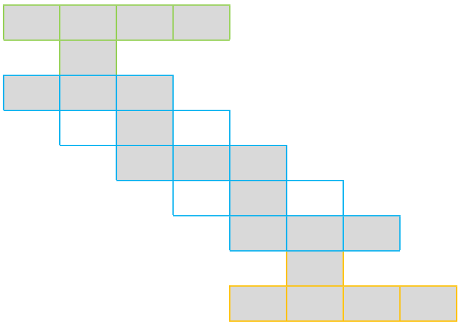
Voici la partie se déroulant dans cette figure (jusqu'au coup de *la Fourchette* en rouge) :



La configuration gagnante se trouve dans la *forme supplémentaire A'*. Nous constatons aussi que pour arriver à cette configuration gagnante nous avons dû utiliser une **chaîne de forçage**, obligeant le joueur rouge à jouer sur certaines cases. En réfléchissant et en jouant bien, le joueur bleu parvient au coup de *la Fourchette* à la fin de la partie.

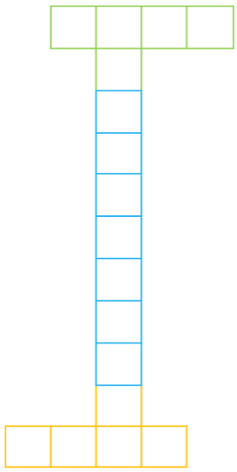
La technique à adopter pour gagner à coup sûr dans les figures qui possèdent cette forme supplémentaire est de commencer dans une case qui se trouve à $1 + 2n$ cases de la forme supplémentaire. (*Attention :* dans l'exemple précédent cette règle n'a pas été respectée, cependant la figure reste gagnante grâce à sa chaîne de forçage qui n'est pas minimale)

Nous nous sommes aperçus que certaines cases pouvaient être supprimées (représentées en blanc ci-dessous), tout en laissant la figure gagnante.



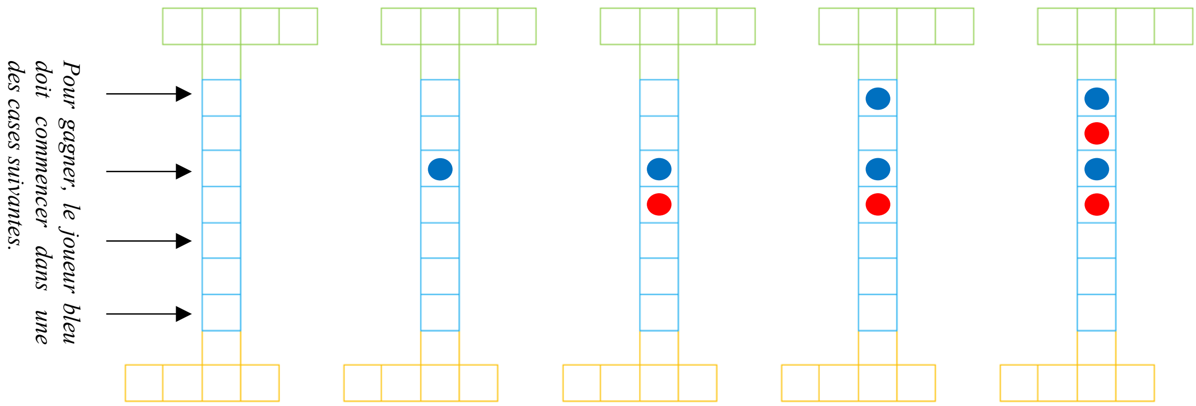
Nous avons donc décidé de travailler dans une figure composée seulement de sa propre forme minimale qui suivrait le même schéma que la figure précédente, prouvant ainsi que le nombre de formes minimales n'est pas fini car la chaîne de forçage pourrait s'allonger à l'infini.

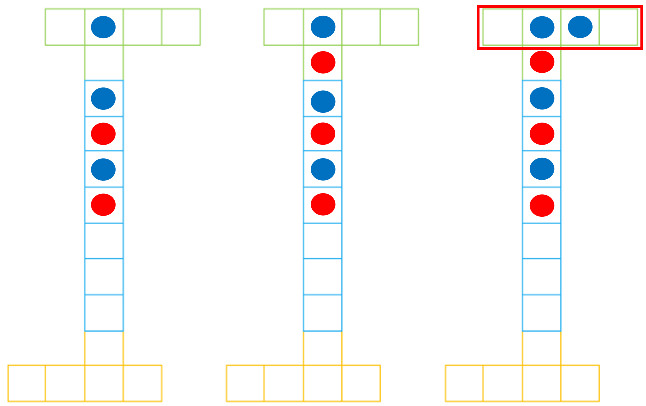
Voici une figure formée seulement de sa forme minimale :



Dans cette forme minimale on peut reconnaître les trois différentes parties mentionnées avant : ***la forme supplémentaire A*** (en vert), ***la chaîne de forçage*** (en bleu) et ***la forme supplémentaire A'*** (en orange). Le jeu se déroule lui aussi dans le même principe : en forçant le joueur rouge à jouer à certains endroits le joueur bleu parvient à effectuer un coup en *Fourchette* dans l'une des formes supplémentaires. En vue de la disposition et de l'orientation des formes supplémentaires, le joueur bleu doit impérativement commencer dans une case se trouvant à un nombre impair de cases des formes supplémentaires (pour que le pion du joueur bleu puisse se placer sur l'une des lignes de quatre cases consécutives dans une des formes supplémentaires).

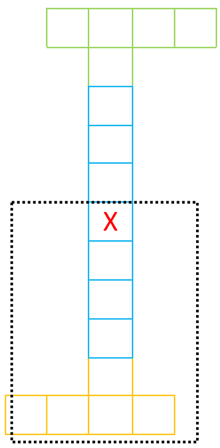
Voici une partie se déroulant dans cette forme minimale :





-> La partie se finit bien avec le coup de *la Fourchette*.

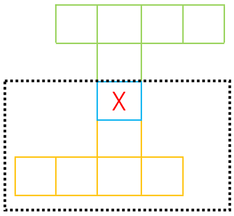
Afin de poursuivre notre raisonnement, il est nécessaire d'avoir la certitude que cette forme est bien minimale. Pour répondre à cette interrogation, voici la démonstration prouvant bien que cette forme est une forme minimale :



Nous pouvons observer que le quadrillage de cette figure s'est formé en symétrie centrale (le centre de symétrie est représenté en rouge). Il nous est donc suffisant de démontrer la nécessité des cases présentes dans le rectangle.

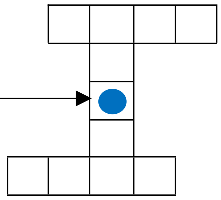
Nous pouvons encore limiter le nombre de cases à étudier en réduisant la longueur de la chaîne de forçage (elle doit être composée de $1 + 2n$ cases, ici $n = 3$). Nous choisissons donc $n = 0$ (7).

Voici donc la forme à étudier et la partie (en pointillés) où chaque case doit être montrée nécessaire :



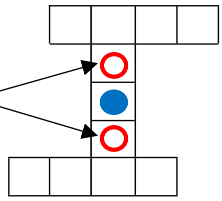
1) La forme est bien une figure gagnante (8) :

Pour commencer, joueur bleu joue ici.

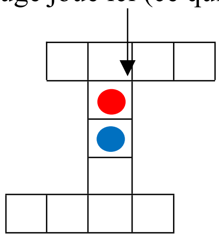


Le joueur rouge va devoir jouer dans une case adjacente. En effet, si le joueur rouge joue à une distance > 1 le joueur bleu pourra mettre en place un coup en *Fourchette*.

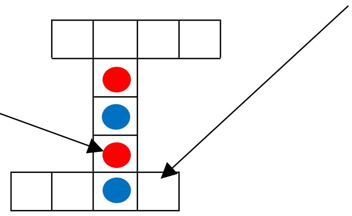
Le joueur rouge joue donc sur l'une des deux cases.



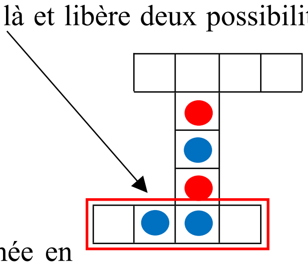
Supposons que le joueur rouge joue ici (ce qui est symétrique par rapport à l'autre possibilité) :



Pour parvenir à l'alignement de quatre cases et à un coup en *Fourchette* le joueur bleu joue ici, forçant ainsi le joueur rouge à jouer sur cette case :



Ainsi, le joueur bleu joue là et libère deux possibilités de coups gagnants. Il effectue le coup en *Fourchette* et gagne.



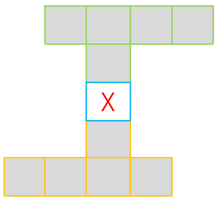
Comme la forme est formée en symétrie centrale, cette fin de partie fonctionne aussi si le joueur rouge avait joué dans la case symétrique à celle qu'il a choisi, lors de son deuxième coup.

La forme est donc bien gagnante pour le joueur bleu.

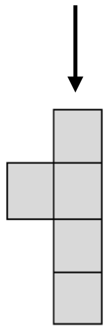
2) La forme est bien minimale :

Raisonnons par l'absurde, supposons que l'on enlève une case.

Cas n°1 (9) :



Pour commencer, nous avons décidé de supprimer la case centrale de la forme. Nous obtenons alors deux *sous-formes* identiques :

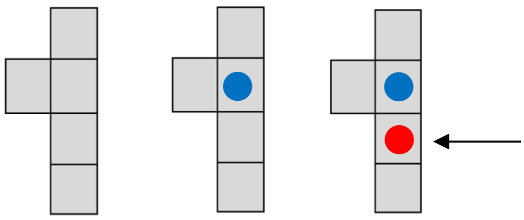


Or, dans cette *sous-forme* le coup en *Fourchette* n'est pas possible.

Le joueur rouge a toujours la même stratégie : casser tout alignement de trois cases permettant au joueur bleu d'aligner ses trois

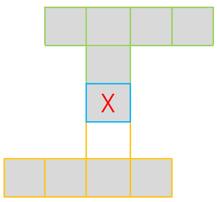
Dans cette figure, le joueur rouge pourra toujours disposer un pion de manière à rompre tout alignement.

Voici la partie illustrant ce fait :

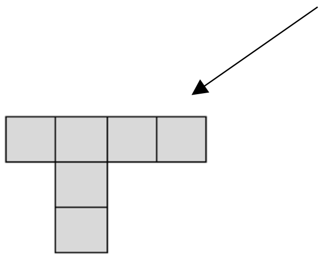


Le joueur rouge joue ici car il coupe le seul alignement possible de trois cases et rend impossible le coup en *Fourchette*.

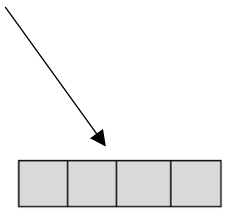
Cas n°2 :



Ici, nous avons décidé de supprimer la case représentée en blanc. Nous distinguons donc deux *sous-formes* :



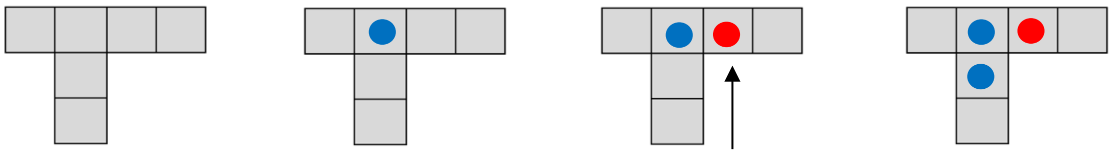
Sous-forme n°1



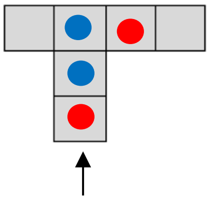
Sous-forme n°2

D'après notre **condition n°2**, la *sous-forme n°2* ne peut pas être gagnante car elle ne possède pas cinq cases. La *sous-forme n°1* n'offre pas la possibilité de coup en *Fourchette* pour le joueur bleu, le joueur rouge peut toujours couper les alignements de trois.

Voici la partie illustrant la situation :

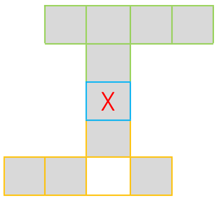


Le joueur rouge joue ici pour couper un alignement de trois cases et pour éviter que le joueur bleu parvienne à un coup en *Fourchette*.

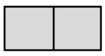


Le joueur rouge joue là pour casser le dernier alignement de trois pions bleus possible.

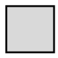
<u>Cas n°3 :</u>



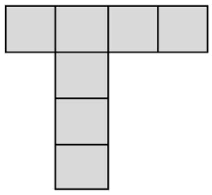
Lorsque nous supprimons la case représentée en blanc, nous constatons que la forme peut être découpée en trois *sous-parties* distinctes :



Sous-forme n°1



Sous-forme n°2

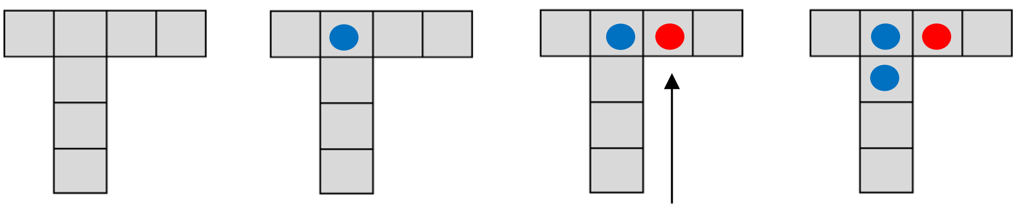


Sous-forme n°3

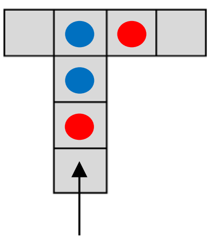
La *sous-forme n°1* et la *sous-forme n°2* ne sont pas gagnantes d'après la **condition n°1** et la **condition n°2** car elles ne possèdent ni trois cases consécutives ni cinq cases au total. La *sous-forme n°3* n'est pas gagnante également, elle ne permet pas de coup en *Fourchette*.

La stratégie du joueur rouge ne change pas et dans cette figure, il peut toujours couper les possibles alignements de trois.

Voici une partie se déroulant dans la *sous-forme n°3* :

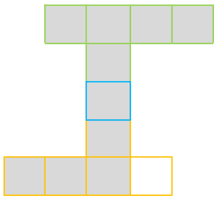


Le joueur rouge joue dans cette case pour couper un alignement de trois cases et pour éviter que le joueur bleu parvienne à un coup en *Fourchette*.



Le joueur rouge joue là pour casser le dernier alignement de trois pions bleus possible.

Cas n°4 :

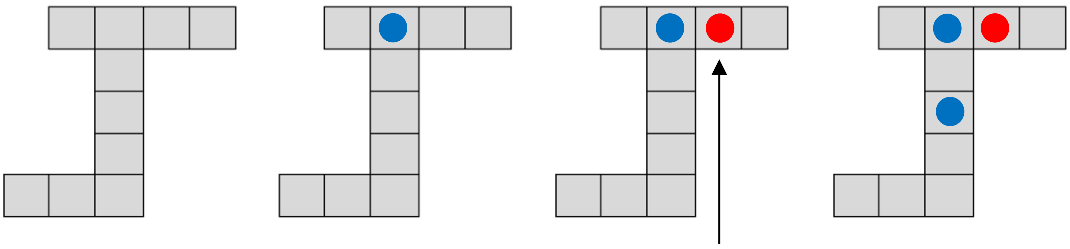


La forme n’est plus gagnante lorsqu’on enlève cette case car le joueur rouge peut toujours couper les alignements de trois du joueur bleu.

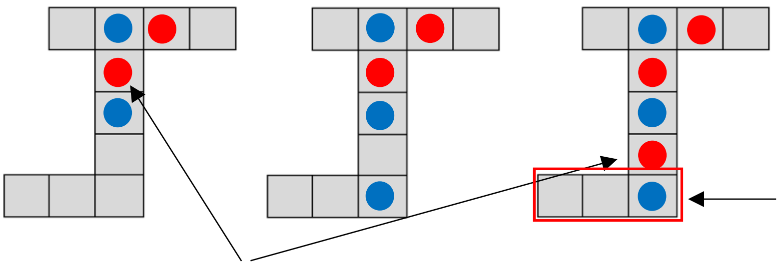
Le joueur bleu ne doit pas commencer au milieu de la chaîne de forçage (ni dans la ***forme supplémentaire A’***) car il n’y a pas quatre cases consécutives dans les deux formes supplémentaires. Il n’y a qu’une seule possibilité de coup en *Fourchette*. Il suffirait donc au joueur rouge de jouer du côté opposé aux trois cases consécutives pour bloquer le joueur bleu, qui ne pourrait plus effectuer un coup en *Fourchette* et le joueur rouge pourra casser l’alignement de trois lors de son tour dans la ***forme supplémentaire A’***.

Le joueur bleu est donc obligé de commencer dans la ***forme supplémentaire A***. Pour avoir plus de possibilité, il joue à l’intersection des deux alignements de quatre cases.

Voici une partie dans cette forme :



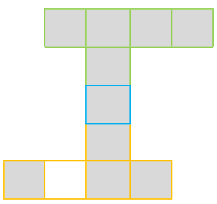
Le joueur rouge joue dans cette case pour couper un alignement de trois cases et pour éviter que le joueur bleu parvienne à un coup en *Fourchette*.



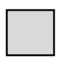
Enfin, le joueur rouge pourra forcément casser le dernier alignement de trois à son prochain coup car il reste deux cases libres.

Le joueur rouge joue ici car le joueur bleu le force de jouer ainsi, le joueur rouge doit empêcher les alignements de trois.

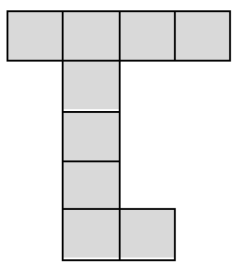
Cas n°5 (10):



Lorsque nous supprimons la case (en blanc), nous pouvons distinguer deux *sous-formes* :



Sous-forme n°1

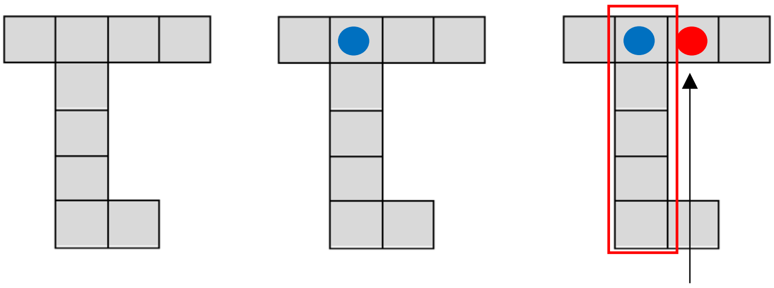


Sous-forme n°2

D’après la **condition n°1** et la **condition n°2**, la *sous-forme n°1* n’est pas gagnante car elle ne possède qu’une seule case. La *sous-forme n°2* n’est pas gagnante car le joueur rouge pourra toujours casser les alignements de trois.

Le joueur bleu ne doit pas commencer au milieu de la chaîne de forçage (ni dans la ***forme supplémentaire A’***) car il n’y a pas quatre cases consécutives dans les deux formes supplémentaires. Il n’y a qu’une seule possibilité de coup en *Fourchette*. Il suffirait donc au joueur rouge de jouer du côté opposé aux deux cases consécutives pour bloquer le joueur bleu, qui ne pourrait plus aligner ses trois pions car il n’y aurait plus trois cases consécutives.

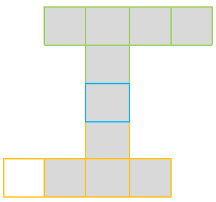
Le joueur bleu est donc obligé de commencer dans la ***forme supplémentaire A***. Pour avoir plus de possibilités, il joue à l’intersection des deux alignements de quatre cases.



Le joueur rouge joue dans cette case pour couper un alignement de trois cases et pour éviter que le joueur bleu parvienne à un coup en *Fourchette*.

À partir de ce moment, le joueur rouge pourra toujours casser les alignements de trois pions et le coup en *Fourchette* n’est plus possible. Le joueur bleu ne peut plus libérer deux possibilités de coups gagnants. Le jeu se déroulant dès lors est semblable à celui se déroulant dans le *1 par n* qui, comme nous l’avions dit au début de notre exposé, n’est pas une figure gagnante.

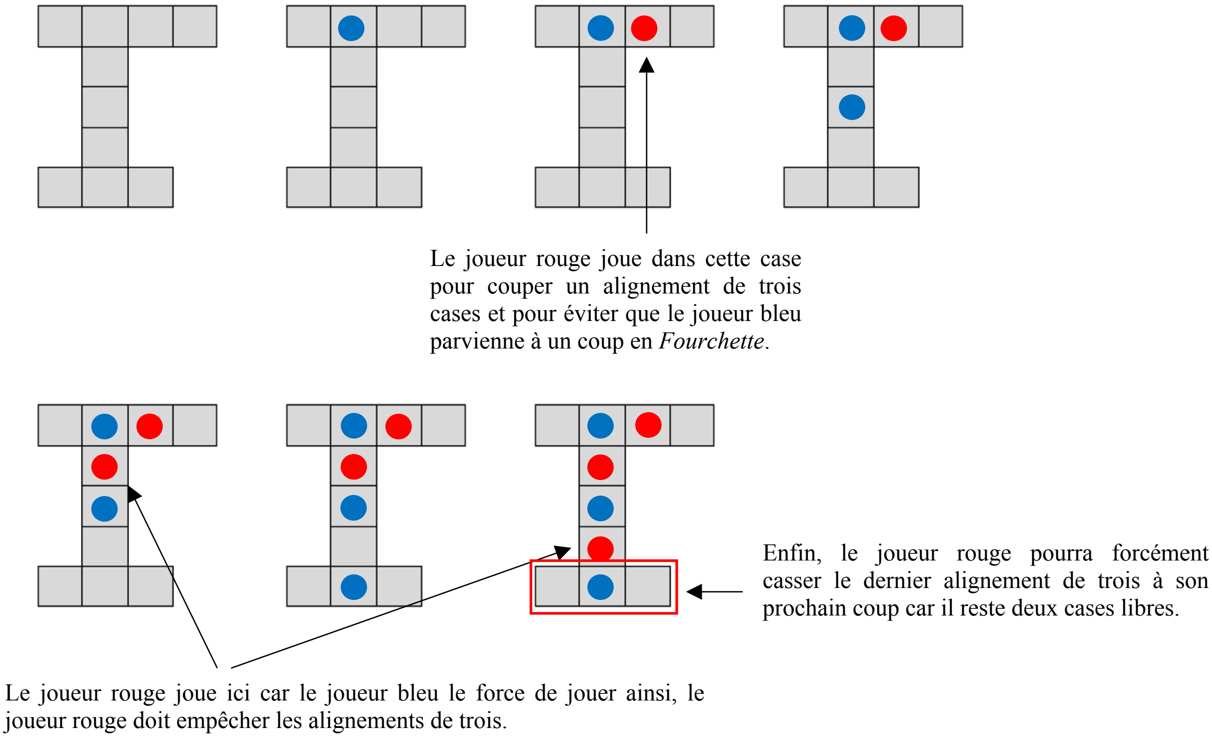
<u>Cas n°6 :</u>



La forme n’est plus gagnante lorsqu’on supprime cette case car le joueur pourra toujours casser les alignements de trois.

Le joueur bleu ne doit pas commencer au milieu de la chaîne de forçage (ni dans la ***forme supplémentaire A’***) car il n’y a pas quatre cases consécutives dans les deux formes supplémentaires. Il n’y a qu’une seule possibilité de coup en *Fourchette*. Il suffirait donc au joueur rouge de jouer du côté opposé aux trois cases consécutives pour bloquer le joueur bleu, qui ne pourrait plus effectuer un coup en *Fourchette* et le joueur rouge pourra casser l’alignement de trois lors de son tour dans la ***forme supplémentaire A’***.

Le joueur bleu est donc obligé de commencer dans la ***forme supplémentaire A***. Pour avoir plus de possibilités, il joue à l’intersection des deux alignements de quatre cases.



On peut donc affirmer, en vue de la démonstration, que cette forme est bien minimale. Nous savons aussi que la *chaîne de forçage* est et doit être composée d'un nombre de $1+2n$ cases. Une chaîne de forçage est donc formée d'un nombre de cases impair. En sachant que n est défini sur $\mathbb{N}$, le nombre de formes minimales se révèle être non fini car la chaîne de forçage peut s'allonger indéfiniment tout en conservant la nécessité de chaque case (à chaque fois nous pouvons ajouter $+2n$).

V. Conclusion

a. Réponse à notre problématique

Pour rappel, notre problématique est la suivante : *Pouvons-nous déterminer avec certitude, en regardant seulement la forme du quadrillage, si le joueur bleu peut gagner ? Si oui, comment ?*

Nous avons tenté de nous rapprocher le plus possible d'une réponse tranchée, sans parvenir à un réel théorème.

En effet, nous avons pu déterminer certaines conditions et délimiter quelques pistes, notamment celle des formes minimales.

1) Les éléments qui permettent d'affirmer qu'une figure est gagnante sont :

- Le fait qu'elle possède dans son quadrillage un rectangle d'une largeur $l \geq 3$ et longueur $L \geq 4$.
- Le fait qu'elle possède dans son quadrillage une forme minimale listée page 8.

Cependant, nous nous sommes rendu compte que d'autres figures qui ne respectaient pas ces critères étaient gagnantes. C'est le cas des figures possédant des formes minimales en chaînes de forçage. Nous avons trouvé qu'il y avait une infinité de formes minimales (de n'importe quelle taille).

2) Il existe aussi des éléments qui permettent d'affirmer qu'une figure n'est pas gagnante :

- Le fait qu'elle ne possède pas trois cases consécutives (de manière horizontale ou verticale).
- Le fait qu'elle possède moins de cinq cases.

b. Ouvertures possibles

Ce sujet étant très vaste, nous avons dû nous concentrer sur certains aspects de notre réponse (en l'occurrence les formes minimales) et avons dû laisser certains autres aspects de côté.

Un point à éclaircir serait le lien entre les formes minimales de première génération et les formes minimales en chaînes de forçage. Par exemples, est-ce que chaque forme minimale en chaîne de forçage a une forme minimale de première génération correspondante ?

Une question se pose pour permettre de reconnaître les formes minimales en chaînes de forçage du premier coup d'œil : « Pourrions-nous lister toutes les formes supplémentaires permettant la victoire dans une forme en chaînes de forçage ? » Cela permettrait de faciliter la reconnaissance de ce genre de formes minimales.

VI. Remerciements

Je souhaite remercier Jérôme Carbini et Christophe Lebeaud, mes deux professeurs qui animent l'atelier MATh.en.JEANS avec beaucoup d'intérêt et de bienveillance. Sans eux, la rédaction de mon article n'aurait pas été possible.

Je remercie le chercheur Sylvain Gravier pour nous avoir offert des sujets très intéressants, sur lesquels nous avons travaillé tout au long de l'année avec beaucoup de plaisir.

Je remercie aussi mes camarades de l'atelier MATh.en.JEANS qui ont pu apporter un regard extérieur sur mon travail, ils m'ont été d'une aide précieuse.

Je souhaite remercier le lycée des Catalins où les séances ont pu avoir lieu.

Enfin, je remercie l'association MATh.en.JEANS qui nous offre l'opportunité de toucher au monde de la recherche et d'appréhender les mathématiques différemment.

Notes d'édition

(1) Nous ne savons pas encore ici si les deux joueurs ont joué parfaitement bien. Le joueur rouge pouvait-il gagner dans la première partie ?

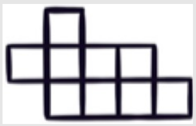
(2) Ces formes sont étudiées au IV-c (page 8), où plusieurs exemples sont donnés.

(3) On ne trouve pas l'explication dans la suite mais le lecteur peut se convaincre rapidement de ce fait : il suffit pour le joueur rouge de jouer à juste à droite du joueur bleu si c'est possible, juste à gauche sinon et n'importe ou ailleurs si les deux cases sont déjà prises.
De même pour les rectangles 2 par n, le joueur rouge peut appliquer cette stratégie sur chacune des lignes.

(4) Cela sera montré indirectement plus loin : un rectangle de largeur ≥ 3 et de longueur ≥ 4 contient la forme étudiée au III-b et il suffit donc au joueur bleu de jouer à l'intérieur de cette forme en appliquant la même stratégie.

(5) Plus généralement, une figure qui contient une figure gagnante est elle-même gagnante. Cela est généralisé dans la condition suffisante n°4 (page 11).

(6) Le lecteur est donc invité à vérifier que ce sont bien des formes minimales, sauf pour la forme entourée qui est étudiée en détail. Il semble tout de même que l'une d'elles n'est pas une figure gagnante :



(7) Pour une démonstration complète, il faudrait expliquer comment faire dans le cas $n > 0$ ce qui se comprend assez facilement à partir de la preuve pour $n = 0$.

(8) La stratégie a déjà été donnée dans le cas plus général d'une chaîne de forçage de longueur impaire quelconque.

(9) Pour ce cas et le cas n°2, on peut remarquer que les sous-formes obtenues sont contenues strictement dans la forme minimale étudiée au IV-c, donc elles ne peuvent pas être des figures gagnantes.

(10) Les cas n°5 et 6 se traitent de même que le cas n°4.