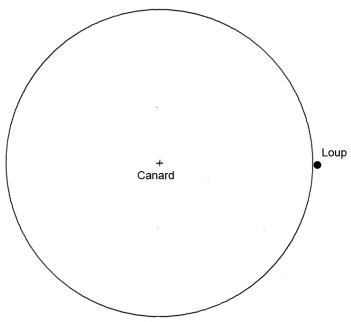
Le canard et le loup

SOUABNI Mehdi, VARTORE Louis,
GOYET Thomas, CAMPARGUE Gabriel

élèves de 3ème, 2nde et TaleS, Cité Scolaire Internationale Europole, Grenoble (38)
Enseignantes : Mme GUIOL, Mme DUMAS
Chercheur : Romain JOLY



Sujet

Un canard se trouve au centre d'une mare circulaire et un loup au bord. Le canard ne peut s'envoler que du bord de la mare et le loup ne sait pas nager. Les deux animaux se déplacent toujours à vitesse constante car ils ne se fatiguent jamais.

Quel est le plus grand rapport (vitesse loup/vitesse canard) pour lequel le canard atteint le bord de la mare avant le loup ?

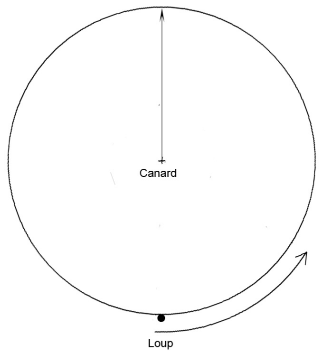
Mots-clés

CANARD, LOUP, JEU, DIFFÉRENTIEL, POURSUITE, STRATÉGIE, CERCLE, VITESSE

Nous avons réfléchi en utilisant des moyens de recherche de plus en plus avancés : une solution à partir des connaissances d'un élève de troisième, une deuxième d'un élève de première et une dernière d'un élève de terminale. Dans toute la suite avec V_L : vitesse du loup et V_C : vitesse du canard.

Le canard novice

Pour un canard en troisième



On sait que le rapport périmètre d'un cercle/rayon du même cercle) est de 2π. Donc si le canard décide de partir dans la direction opposée par rapport au loup, il arrivera au bord de la mare avant le loup pour

$$\frac{V_L}{V_C} < \pi$$

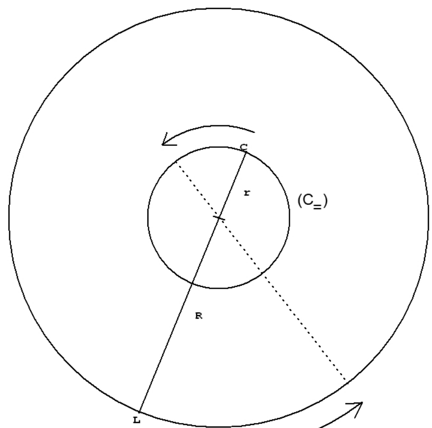
[Inégalité obtenue en comparant les temps de parcours, c'est à dire les rapports distance /vitesse : un demi-périmètre à vitesse V_L vs un rayon à vitesse V_C]

Le canard malin

Pour un canard en première

Le canard va utiliser une technique qui lui permettra d'échapper au loup même si $V_L / V_C > \pi$.

Le canard va partir du centre de la mare jusqu'à ce qu'il soit tout juste à l'intérieur du cercle [noté $(C_=)$] *sur lequel les deux animaux ont la même vitesse angulaire*.



Il fera alors une spirale qui se rapprochera de ce cercle — pendant ce temps, puisque la vitesse angulaire du canard sera un peu plus grande que celle du loup, le canard pourra se placer à l'opposé du loup par rapport au centre de la mare — *jusqu'à se trouver aussi proche que voulu du cercle* $(C_=)$*, à l'opposé du loup*. Le canard ira alors tout droit vers le point du bord de la mare le plus proche de lui. Il aura gagné ainsi par rapport à la situation de départ une distance égale au rayon de $(C_=)$.

[**Théorème.**] *Pour que le canard [malin] gagne, le rapport des vitesse doit être inférieur à* $\pi + 1$.

$$\frac{V_L}{V_C} < \pi + 1$$

Preuve. Notons [...] ω la vitesse angulaire commune du loup et du canard (en radians). Alors $V_L = \omega R$ et $V_C = \omega r$ [où R est le rayon de la mare et r celui du cercle $(C_=)$]. Donc

$$\frac{V_L}{V_C} = \frac{R}{r} \qquad (1)$$

[A partir de la situation d'opposition] le loup doit parcourir un demi-périmètre πR alors que le canard n'a plus qu'à parcourir la distance $R - r$. [En comparant les temps de parcours, c'est à dire les rapports distance / vitesse, on voit que] le canard s'en sort si

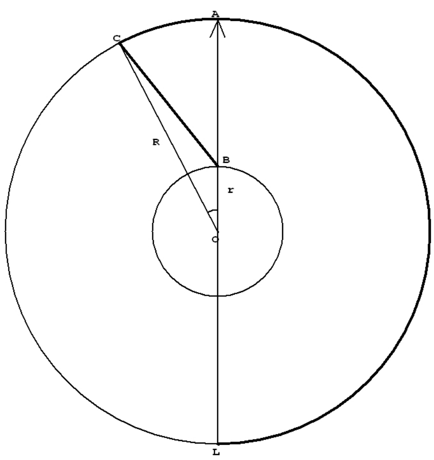
$$\frac{R - r}{V_C} < \frac{\pi R}{V_L}$$ ce qui donne [après calculs]

$$\frac{V_L}{V_C} < \pi + 1. \qquad \text{[CQFD]}$$

Le super canard

Pour un canard en terminale

Une fois sur le cercle de rayon r, plutôt que de continuer tout droit à l'opposé du loup (vers le point A), le canard peut dévier légèrement pour gagner encore un peu de temps ...



S'il dévie en direction du point C, le canard aura à parcourir la distance BC. Les formules d'Al-Kashi dans le triangle OBC donnent :

$$BC^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha \quad (\text{avec } \alpha = \widehat{BOC})$$

Le loup devra parcourir la distance $(\pi + \alpha)$ R. [Non, il va avoir intérêt à changer de sens ! En fait le canard ne peut se mettre à dévier que lorsque le loup s'est déjà engagé dans une direction. Et il ne doit pas trop dévier sinon, comme indiqué par les auteurs un peu plus loin, le loup va changer de sens.
Les calculs proposés ici pour la stratégie du «super canard» se placent dans un modèle simplifié qui néglige les interactions entre Loup et Canard. Il faudrait que les calculs tiennent compte des positions réelles pour voir si les approximations faites sont valides.
On pourrait par exemple reprendre les mêmes calculs mais en remplaçant les positions B et L du canard et du loup par les positions B' et L' qu'ils atteindraient en suivant la stratégie «maline», après un certain laps de temps].

Le canard sera sauf si le temps qu'il met à parcourir la distance BC est plus petit que celui que le loup met à parcourir $(\pi + \alpha)$ R. On obtient donc l'inégalité :

$$\frac{(\pi+\alpha)R}{V_L} > \frac{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\alpha}}{V_C} \qquad (2)$$

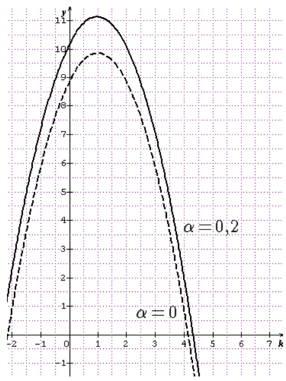
Si l'on note k le rapport $\frac{V_L}{V_C}$, en tenant compte de la relation (1) qui lie les rayons R et r, on obtient après simplification :

$$(\pi+\alpha)^2 - k^2 - 1 + 2k\cos\alpha > 0.$$

Pour chaque angle α, on peut tracer la courbe de la fonction de k correspondante (c'est une parabole tournée vers le bas), et déterminer ainsi le(s) ratio des vitesses pour le(s)quel(s) le canard peut s'en sortir vivant.

Pour $\alpha = 0$, on retrouve le ratio maximal $\pi + 1$.

Pour α un peu plus grand, on s'aperçoit que le ratio peut être choisi [un peu] plus grand que $\pi + 1$.



Il faut bien entendu se limiter à de petites valeurs de α, sans quoi le loup aura intérêt à changer de sens pour rattraper le canard...

Conclusion

Nous ne savons pas encore s'il existe une solution admettant un rapport (V_L / V_C) plus élevé, mais d'après nos recherches, nous avons trouvé un rapport bien supérieur au rapport π auquel nous avions instinctivement pensé à l'origine.

***