La Cigale et la Fourmi font des maths !
La Fourmi fait du rangement

Année 2013 - 2014

Noms et Prénoms des élèves, niveaux : **Elèves de 4ème et de 3ème**
Laëtitia COSTA, Morgane JACQUET, Thierry PROMP, Laura PAULUS, Otman KHELIFI, Sanna SYED, Alexandre SILVA.

Établissement : **Collège La Pyramide à LIEUSAINT et Robert BURON à NANDY.**

Enseignante : **M. CAMPESTRINI Hervé, Mme GUHEL Sylvie et Mme ENDERLIN**

Chercheuse avec université : **Mme Juliette BAVARD, IMJ Paris VI.**

Présentation du sujet :

Partie 1

Nous prenons comme point de départ la fable de Jean de La Fontaine, *La Cigale et la Fourmi*. Que s'est-il passé après cette célèbre dispute ?

Après le départ de la Cigale, la Fourmi, seule chez elle, commence à ranger ses grains. Elle les compte, puis décide de les disposer sur une ou plusieurs lignes de telle sorte que chaque ligne comporte le même nombre de grains.

Questions :

1) De combien de façons peut-elle faire son rangement (en fonction du nombre de grains) ?
Que remarque-t-on concernant les nombres de lignes possibles ?

2) Dans quels cas la Fourmi n'a-t-elle que deux dispositions possibles ?

Partie 2

La Fourmi trouve dans un coin de son grenier les «règles du carré magique ». Un carré magique d'ordre n est un tableau composé de n lignes et n colonnes, que l'on remplit avec les nombres de 1 à n^2, en respectant les règles suivantes :
- Dans chaque case du carré magique, il y a un nombre.
- Chaque nombre entre 1 et n^2 apparaît une fois dans le carré magique (mais pas plus).
- Pour un carré magique donné, la somme des nombres de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est toujours la même.

La Fourmi décide alors de ranger ses grains dans des carrés magiques : à chaque fois qu'un nombre est inscrit dans une case, elle mettra le même nombre de grains dans cette case.

Questions :

On nous demande donc d'aider la Fourmi à:
- Trouver tous les carrés magiques d'ordre 3
- Trouver tous les carrés magiques d'ordre 4
- Savoir combien de grains sont nécessaires pour remplir un carré magique d'ordre n

Résultats :

Partie 1

Soit n le nombre de grains.

1) Le nombre de rangements possibles correspond au nombre de diviseurs du nombre n.
   Pour chaque rangement, le nombre de lignes correspond à un des diviseurs de n.
2) Si n est un nombre premier alors il n'y a que deux rangements possibles.

Partie 2

Carrés magiques d'ordre 3 :

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Carrés magiques d'ordre 4 :

1	8	12	13
7	14	2	11
10	3	15	6
16	9	5	4

16	10	7	1
9	3	14	8
5	15	2	12
4	6	11	13

4	5	9	16
6	13	3	10
11	2	14	7
13	12	8	1

13	11	6	4
12	2	15	5
8	14	3	9
1	7	10	16

13	12	8	1
11	2	14	7
6	15	3	10
4	5	9	16

16	9	5	4
10	3	15	6
7	14	2	11
1	8	12	13

4	6	11	13
5	15	2	12
9	3	14	8
16	10	7	1

Nombre de grains nécessaires pour remplir un carré magique d'ordre n :

$$\mathbf{1+2+3+\cdots+\ n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}}$$

Nos recherches (Partie 1) : (1)

Quelques exemples pour comprendre notre sujet :

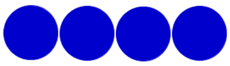
Les rangements possibles pour 2 grains :

ou

Les rangements possibles pour 3 grains :

ou

Les rangements possibles pour 4 grains :



ou

ou

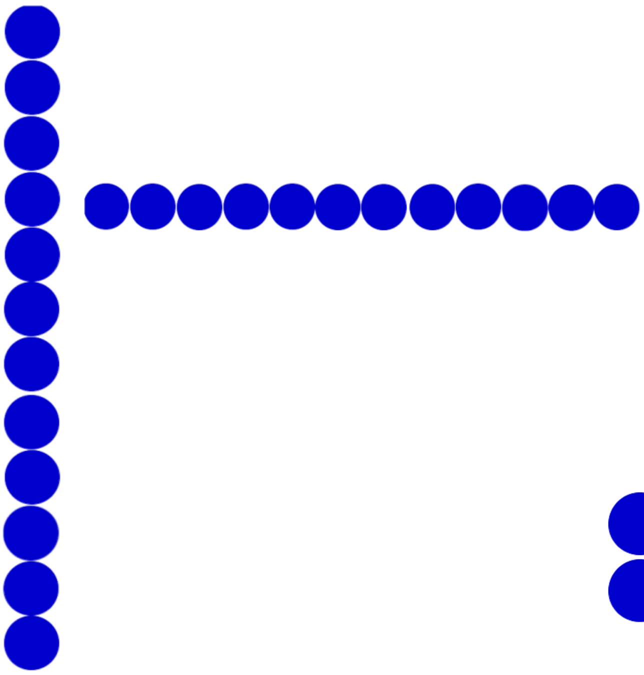
Question 1 : Comment trouver tous les rangements possibles avec un nombre de grains quelconque ?

Expliquons notre méthode avec un exemple.
Choisissons 12 grains.
Commençons par trouver tous les diviseurs de 12.

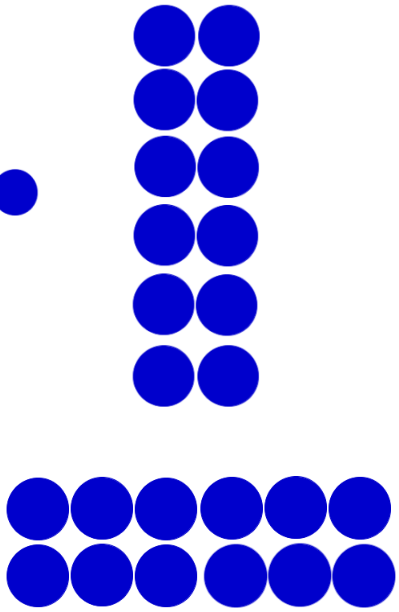
12 = 3 x 4 12 = 1 x 12 12 = 2 x 6

12 a donc 6 diviseurs : 3, 4, 1, 12, 2 et 6.
On en déduit alors qu'il y a 6 rangements possibles.
Les voici :

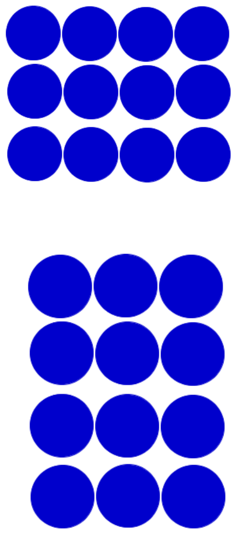
Rangements 1 x 12



Rangements 2 x 6



Rangements 3 x 4



Pour chaque possibilité, le nombre de ligne est un des diviseurs de 12.

Question 2 : Dans quel cas, n'y a-t-il que 2 possibilités de rangement ?

Il n'y a que 2 possibilités si le nombre de grains ne possède que 2 diviseurs. Ces nombres s'appellent **nombres premiers**.

Définition : Un nombre premier est un nombre entier qui a seulement deux diviseurs 1 et lui-même.

Exemple : 3 est un nombre premier car il ne peut être divisé que par 1 et 3.
6 n'est pas un nombre premier car il a plus de 2 diviseurs : 1, 2, 3 et 6.

Voici les nombres premiers parmi les 100 premiers nombres entiers : [(2)](#)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Nos recherches (Partie 2):

Carré d'ordre 3 :

Pour trouver la somme de chaque ligne et de chaque colonne, nous faisons le calcul suivant : (1+2+3+4+5+6+7+8+9)/3.
La somme des nombres de chaque ligne et colonne est donc 15.
Pour répartir les nombres de 1 à 9 dans le carré, il faut donc trouver combien de fois les nombres apparaissent dans des additions de 3 nombres différents dont le résultat sera 15. (Dans le carré d'ordre 3, il y aura 3 cases par ligne, colonne et diagonale donc on cherche toutes les sommes de 3 nombres différents de 1 à 9 dont le résultat sera 15).
Après plusieurs essais, voici les sommes de 3 nombres de 1 à 9 égales à 15 que nous avons trouvées :

. 1+5+9	. 2+5+8	. 3+5+7
. 1+6+8	. 2+6+7	. 4+5+6
. 2+4+9	. 3+4+8	

Les nombres 1, 3, 7 et 9 apparaissent 2 fois;
Les nombres 2, 4, 6, 8 apparaissent 3 fois;
Et le nombre 5 apparait 4 fois.

Lorsque l'on va remplir le carré magique d'ordre 3, les nombres apparaissant 2 fois seront sur les bords du carré mais pas dans les angles car ils seront placés de telle sorte qu'ils apparaissent sur une ligne et une colonne. Les nombres apparaissant 3 fois seront placés sur les angles du carré magique car ils apparaitront donc sur 1 diagonale, 1 ligne et 1 colonne. Et le nombre apparaissant 4 fois sera sur le centre du carré magique car il apparaîtra sur les 2 diagonales, 1 ligne et 1 colonne.
Voici donc le carré magique d'ordre 3 que l'on obtient:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Il existe aussi d'autres solutions de carré magique d'ordre 3 en tournant chaque côté vers la droite ou la gauche. On peut aussi utiliser la symétrie axiale par rapport à la diagonale passant par 5 (la case du milieu), inverser la première et la troisième ligne, ou inverser la première et la dernière colonne.

Pour le carré magique d'ordre 4:

Pour trouver la somme de chaque ligne, colonne et diagonale du carré magique d'ordre 4 , nous faisons le calcul suivant : (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16)/3.
La somme des nombres de chaque ligne, colonne et diagonale sera donc 34.
Après plusieurs essais, nous trouvons le carré magique d'ordre 4 suivant :

1	8	12	13
7	14	2	11
10	3	15	6
16	9	5	4

Il existe aussi plein d'autres carrés magiques d'ordre 4. Par exemple, on peut tourner le carré, on peut le faire à l'envers (la dernière ligne a la place de la première et l'avant dernière a la place de la seconde), etc....

Nombre de grains nécessaires pour remplir un carré magique d'ordre n :

Pour un carré d'ordre 3 :

Pour trouver le nombre de grains dans le carré, on ajoute les nombre de 1 à 3^2 avec les nombres de 3^2 à 1 :

$$\begin{array}{ll} & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \\ + & 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline = & 10+10+10+10+10+10+10+10+10 \qquad \text{soit } 9 \times 10 \end{array}$$

On remarque que $9x10=3^2(3^2+1)$

Vu qu'il y a deux lignes, on divise par deux le résultat : on obtient **$3^2(3^2+1)/2$**

Pour un carré d'ordre n:

$$\begin{array}{ll} & 1 \ + \ 2 \ + \ 3 \ ... \ + (n^2-2) + (n^2-1) + n^2 \\ + & n^2 + (n^2- 1) +(n^2-2)+...+ \ 3 \ + \ 2 \ + 1 \\ \hline = & (n^2+1)+(n^2+1)+(n^2+1)+...+(n^2+1)+(n^2+1)(n^2+1) \qquad \text{soit } (n^2+1) \times n^2 \end{array}$$

comme pour le carré d'ordre 3, on divise par deux le résultat et on obtient: **$n^2(n^2+1)/2$.**

Pour trouver le nombre de grains par ligne, colonne et diagonale, il suffit de diviser la formule par l'ordre du carré, on obtient donc la formule : **$n(n^2+1)/2$.**

Pour savoir combien de grains sont nécessaire pour remplir un carré magique d'ordre n :
Pour trouver la somme de chaque ligne colonne et diagonale, on utilise la formule suivante: $n(n^2+1)/2$.
Trouver le nombre de grains nécessaire pour remplir le carré magique d'ordre n revient à multiplier la somme magique par l'ordre du carré, donc on obtient la formule suivante: **$n^2(n^2+1)/2$.**
Cette formule revient aussi à ajouter tous les nombres de 1 à l'ordre du carré au carré.

Exemple: pour un carré d'ordre 5, on fait:
1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23+24+25 ce qui donne 325,
ou on applique la formule: $5^2(5^2+1)/2=325$.

Conclusion :

Partie 1

Pour conclure, quel que soit le nombre de grains on pourra toujours trouver le nombre de rangements possibles en connaissant les diviseurs de ce nombre.

Partie 2

Quel que soit l'ordre du carré magique utilisé, on pourra toujours déterminer le nombre de grains qu'il pourra contenir en appliquant la formule :

$$\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

Le carré d'ordre 3 a été plutôt facile à trouver, mais nous avons eu du mal pour celui d'ordre 4.
C'était un sujet intéressant et nous avons bien aimé cette année de « math-en-jeans ».

Notes d'édition :

(1) La plupart des résultats sont démontrés dans la partie 2 "Nos Recherches".
(2) Le crible d'Eratosthène est un moyen de trouver parmi les nombres allant de 1 à 100 ceux qui sont premiers.