La numération des Shadoks

Année 2014 - 2015

Elèves : DUCHENE Quentin, 1ère S ; FAGUET Colin, 2nde ; MARIN Pauline, Terminale S ; PILLOT Camille, 1ère S ; RUEST Margaux, Terminale S ; RUEST Victoria, Terminale S ; SCHNEIDER Ludivine, Terminale S ; SUPERNAT Loïc, 2nde.

Établissement : Lycée Ernest Bichat de Lunéville

Enseignantes : BOUVART-LAMBOIS Geneviève ; FABRY Christine

Chercheur : STEF André, IECL Nancy

Présentation du sujet

Les Shadoks sont des êtres qui ressemblent à des oiseaux. Un beau jour, ils ont besoin de se compter, seulement ils ne connaissent que quatre mots : GA, BU, ZO et MEU.

Nous avons donc essayé de comprendre comment ces êtres peuvent compter et calculer avec seulement quatre symboles.

Annonce des conjectures et résultats obtenus

- Les Shadoks peuvent additionner, soustraire, multiplier et diviser.
- Tous les shadokaux sont des décimaux mais tous les décimaux ne sont pas shadokaux.
- Il est possible de passer de la base 10 aux shadoks et réciproquement.
- Il existe une relation entre base 10, base 4 (shadoks) et base 16 (bibi-binaire).

La numération shadok

I/ Présentation du système

Pour se compter les shadoks utilisent quatre mots :

- Lorsqu'il n'y a rien, ils disent GA
- Lorsqu'il y a , ils disent BU shadok
- Lorsqu'il y a , ils disent ZO shadoks
- Lorsqu'il y a , ils disent MEU shadoks
- Lorsqu'il y a , comment dire… ? Ils ont pris BU poubelle dans laquelle ils ont mis ces shadoks. Ils obtenaient alors BU poubelle et GA shadok soit BU GA.
- Lorsqu'il y a , il y a donc BU poubelle et BU shadok à côté de la poubelle soit BU BU. Ils continuent ainsi BU ZO, BU MEU, ZO GA… jusqu'à avoir MEU MEU.

Si BU shadok se rajoute, on a BU nouvelle poubelle mais comment l'ajouter aux MEU autres… ? Ils prennent BU grande poubelle, dans laquelle ils mettent ces poubelles. Ils ont alors BU grande poubelle, GA poubelle et GA shadok, soit BU GA GA.
Et ils continuent ainsi jusqu'à l'infini ! (1)

II/ Les opérations de base

1) L'addition

Nous avons étudié l'addition des Shadoks. Bien qu'ils ne puissent pas prononcer le « plus », nous avons décidé de l'ajouter.

Premièrement nous avons procédé par traduction, c'est-à-dire que nous traduisons le premier chiffre Shadok en chiffre arabe, nous faisons de même avec le second, nous additionnons les deux nombres en écriture arabe et traduisons le résultat en Shadok.

Exemple : BU + MEU → 1 + 3 = 4 → BU GA

Puis, nous nous sommes demandé s'il était possible d'additionner deux nombres en écriture Shadok directement sans passer par « notre » écriture. C'est en effet possible ; il suffit de raisonner en Shadok. Dans ce cas on apprend par cœur les additions de base comme BU + BU =ZO. Puis on applique les mêmes règles que dans notre système de numération.

Exemple : MEU + ZO = BU BU

Puis nous avons réalisé une table d'addition permettant d'effectuer ces additions « simples » plus facilement.

+	GA	BU	ZO	MEU
GA	GA	BU	ZO	MEU
BU	BU	ZO	MEU	BU GA
ZO	ZO	MEU	BU GA	BU BU
MEU	MEU	BU GA	BU BU	BU ZO

Puis nous avons tenté une addition avec retenue en nombre Shadock. Le processus est le même sauf que lorsque la somme est supérieure à MEU, on pose dans ce cas une retenue de BU au dessus de la colonne suivante. (Voir exemple ci-dessous)

MEU MEU + ZO MEU = ?

	MEU	MEU	
+	ZO	MEU	MEU +MEU = BU ZO
	BU ZO	ZO	MEU+ ZO +BU (retenue) =BU ZO

MEU MEU + ZO MEU = BU ZO ZO

2) *La soustraction*

Nous avons ensuite travaillé sur la soustraction avec des nombres en base Shadok. Nous avons déjà vu que deux méthodes existaient pour faire une soustraction : la méthode qui consiste à ajouter un nombre en bas et celle qui consiste à retirer un nombre en haut. Premièrement, nous avons voulu traduire les nombres qui étaient en base Shadok en base 10, mais notre chercheur nous a conseillé de ne le faire qu'à la fin pour ne pas gâcher le suspens. On a donc procédé à la 1ère méthode tout en restant en base Shadok :

MEU BU – BU ZO = ?

Dans cette méthode, nous ajoutons BU poubelle à droite et nous ajoutons aussi BU poubelle dans la partie inférieure de gauche.

On obtient donc l'opération suivante : MEU (BU BU) – ZO (ZO). (2) On effectue donc BU BU – ZO = MEU et MEU – ZO = BU. Le résultat est BU MEU.

La deuxième méthode consiste à enlever BU poubelle de la partie supérieure gauche pour l'ajouter à la partie supérieure droite. On obtient donc

MEU BU – BU ZO → ZO (BU BU) - BU (ZO) = BU MEU.

Table de soustraction :

Nous avons établi une table de soustraction pour les petits nombres (de Ga à Meu).

-	Ga	Bu	Zo	Meu
Ga	Ga			
Bu	Bu	Ga		
Zo	Zo	Bu	Ga	
Meu	Meu	Zo	Bu	Ga

On observe dans ce tableau que les différences négatives ne sont pas affichées. En effet, nous avons décidé de ne pas aborder ce problème.

3) *La multiplication*

Pour la multiplication, nous avons gardé le même principe d'opération « posée », en traduisant les nombres en base 10 tout d'abord, pour comprendre le fonctionnement puis en calculant directement. Ainsi, voici un exemple d'une multiplication en shadok :

			poubelles	*shadoks*
	+ BU	+ BU	BU	ZO
		X	ZO	MEU
		BU	GA	**ZO**
+		MEU	**GA**	**GA**
	BU	GA	GA	ZO

MEU× ZO=BU ZO, donc on écrit le nombre de shadoks : ZO et on ajoute BU poubelle dans la colonne des poubelles.*

MEU× BU=MEU, auquel on ajoute la retenue : MEU+BU = BU GA. Donc le résultat de la première ligne est : BU GA ZO.

Pour la deuxième ligne, comme on multiplie des poubelles par des shadoks, le nombre de shadoks sera **GA** et on trouvera le nombre de poubelles.

ZO×ZO = BU GA, on écrit GA et on retient BU grande poubelle.*

ZO×BU = ZO, auquel on ajoute la retenue : ZO+BU = MEU donc on écrit MEU.

On additionne ensuite ces 2 résultats : BU GA ZO + MEU GA GA = BU GA GA ZO

Nous avons ensuite fait une table de multiplication, tout comme il en existe en base 10 :

×	GA	BU	ZO	MEU
GA	GA	GA	GA	GA
BU	GA	BU	ZO	MEU
ZO	GA	ZO	BU GA	BU ZO
MEU	GA	MEU	BU ZO	ZO BU

4) *Traduction*

Nous allons maintenant comprendre les techniques de traduction qui existent. Tout d'abord, voyons celle permettant de passer du shadok à la base 10 :
La technique consiste à multiplier chaque chiffre shadok par la puissance de 4 correspondant à son rang n. En effet, un shadok correspond à une unité en décimal, une poubelle à 4 unités, une grande poubelle correspond à 4 poubelles de 4 shadoks soit 16 unités et ainsi de suite. Pour savoir le « rang » du chiffre, on lit de droite à gauche, le chiffre le plus à droite aura comme rang 0, puis 1 et ainsi de suite.

Voici un exemple :

BU MEU BU ZO

ZO est au rang 0, on le multiplie donc par 4^0

Donc ZO × 4^0 = ZO = 2

On continue avec les autres chiffres :
BU × 4^1 = 4
MEU $\times 4^2 = 48$
BU $\times 4^3 = 64$

Puis on additionne toutes les unités obtenues :
2 + 4 + 48 + 64 = 118

Donc
BU MEU BU ZO = 118

Maintenant passons à la traduction de la base 10 au shadok. Pour cela, il faut faire une suite de divisions euclidiennes du nombre à traduire par 4 car on cherche à faire des paquets de 4 et à les compter. Prenons un exemple :

Comment s'écrit 182 en shadok ?

182 = 4 × 45 + 2

On prend le quotient et on le divise par 4 :

45 = 4 × 11 + 1

Et ainsi de suite :

11 = 4 × 2 + 3

2 = 4 × 0 + 2

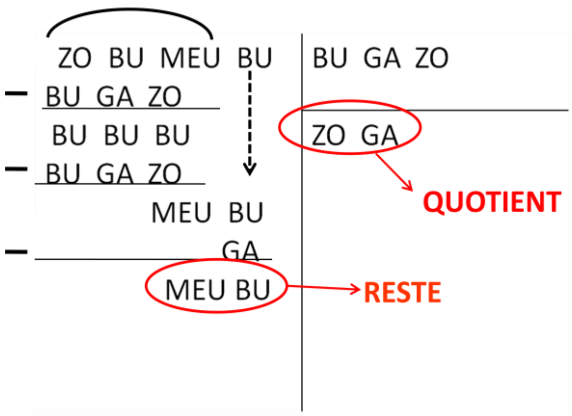
On prend ensuite les restes, <u>en commençant par le dernier</u> : 2, puis 3,1 et 2. On peut écrire ces nombre en shadok :

Zo Meu Bu Zo

C'est le résultat. On sait donc que 118 s'écrit Zo Meu Bu Zo.

5) *La division*

Pour effectuer une division dans le système des shadoks, nous procédons de la même manière que dans le système décimal. Nous posons donc une division euclidienne. Prenons un exemple pour comprendre la méthode : ZO BU MEU BU divisé par BU GA ZO.



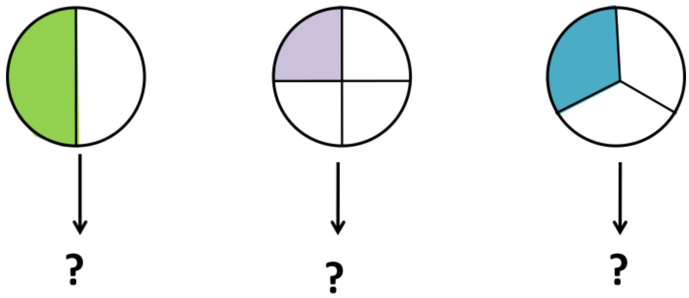
On considère tout d'abord ZO BU MEU car c'est plus grand que BU GA ZO. On soustrait BU fois BU GA ZO, on obtient BU BU BU. Comme BU BU BU est toujours plus grand que BU GA ZO, on le soustrait encore BU fois et on obtient MEU. On a donc soustrait en tout ZO fois car il y a ZO fois BU GA ZO dans ZO BU MEU. On note donc ZO dans le quotient. Comme MEU est plus petit que BU GA ZO, on descend le BU. Mais MEU BU est toujours plus petit que BU GA ZO, on ne peut donc pas le soustraire, c'est-à-dire qu'on le soustrait GA fois. On note GA dans le quotient et il reste MEU BU. La division est alors terminée :

$$\text{ZO BU MEU BU} = \underbrace{\text{ZO GA}}_{\text{Quotient}} * \text{BU GA ZO} + \underbrace{\text{MEU BU}}_{\text{Reste}}$$

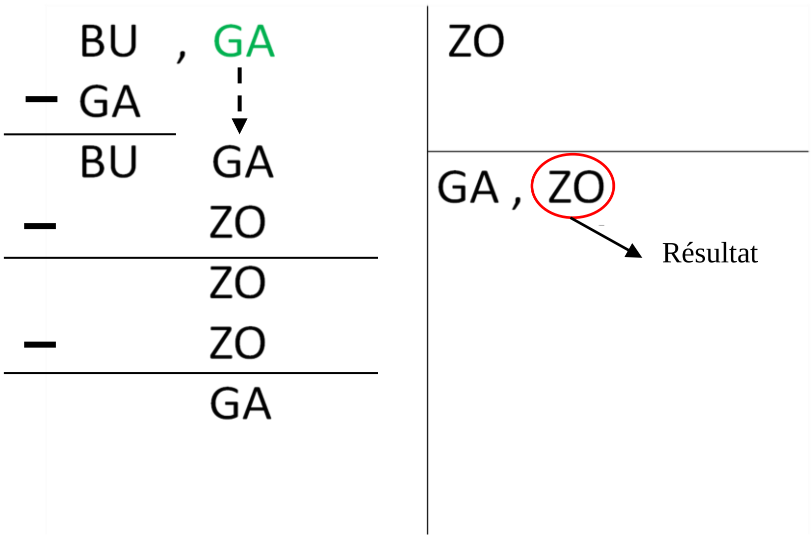
III/ Les shadokaux

1) Qu'est-ce qu'un shadokal ?

Mais comment diviser une unité, c'est-à-dire BU par un autre nombre?
Ici, imaginons des gâteaux: BU gâteau divisé en ZO parties, BU gâteau divisé en BU GA parties et BU gâteau divisé en MEU parties...

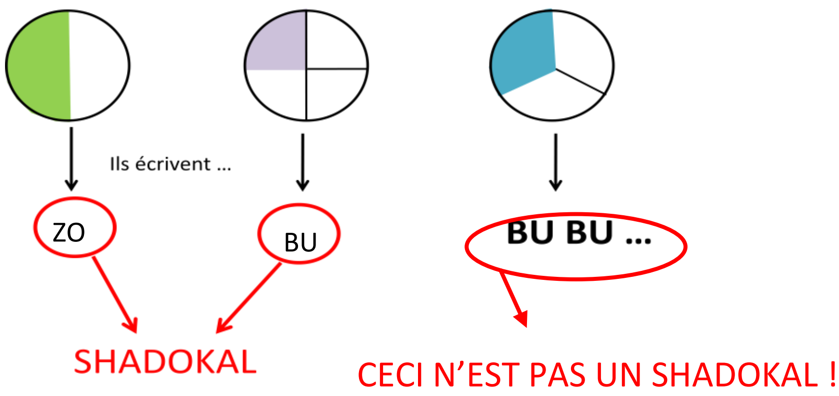


Essayons de diviser BU par ZO. BU est plus petit que ZO, on ne peut donc pas soustraire ZO à BU, ce qui veut dire qu'on le soustrait GA fois. On note donc GA dans le quotient, le reste est toujours de BU donc on met une virgule et on descend un GA. On peut donc soustraire ZO à BU GA. On l'a soustrait ZO fois et il reste GA, on note ZO dans le quotient. Le résultat de la division de BU par ZO est GA, ZO ; cependant, on ne dit que ZO, car les shadoks ne peuvent pas dire virgule.



De même, on trouve que BU divisé par BU GA donne BU et MEU divisé par BU donne BU BU BU… à l'infini.

On décide d'appeler les nombres compris entre GA et BU et ayant une écriture finie des shadokaux, sur le même modèle que les décimaux. Attention, les shadoks ne parlent pas des entiers et des shadokaux dans la même phrase n'ayant aucun moyen de les différencier puisqu'ils ne peuvent pas dire la virgule.



ZO et BU sont donc des shadokaux alors que BU BU… n'en est pas un puisqu'il n'est pas fini.

2) Mise en relation avec les décimaux

Nous avons ensuite cherché une formule générale sous laquelle peut s'écrire un shadokal.

Nous nous sommes tout d'abord intéressés à la forme d'un décimal, c'est-à-dire $\frac{n}{10^m}$ où n et m sont des nombres entiers. Nous avons cherché à adapter cette formule aux shadokaux. Comme il y a 10 unités dans le système décimal et 4 unités dans le système des shadoks, sur le même modèle, on en déduit :

un shadokal s'écrit sous la forme $\frac{n}{4^m}$ avec *n* et *m* entiers.

Ensuite, nous nous sommes demandés si tous les décimaux sont des shadokaux. Par le biais d'un contre-exemple, nous avons montré que ce n'est pas le cas. En effet, 0.1 est un décimal car il peut s'écrire $\frac{1}{10^1}$; or lorsque nous divisons BU par ZO ZO, le résultat obtenu est GA BU ZO BU ZO BU ZO… à l'infini ; ce n'est donc pas un shadokal car son écriture n'est pas finie donc **tous les décimaux ne sont pas des shadokaux**.

Les shadokaux sont-ils tous des décimaux ? Nous avons donc cherché s'il existe une égalité entre la forme shadokale et la forme décimale. Connaissant deux entiers naturels *n* et *m*, existe-t-il deux entiers naturels *n'* et *m'* tels que : $\frac{n}{4^m} = \frac{n'}{10^{m'}}$?

$$\frac{n}{4^m} = \frac{n \times 25^m}{4^m \times 25^m} = \frac{n \times 25^m}{10^{2m}}$$

En posant $n' = n \times 25^m$ et $m' = 2m$, on obtient la forme attendue.

Donc **tous les shadokaux sont des décimaux.**

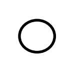
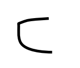
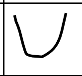
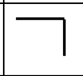
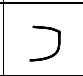
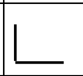
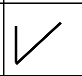
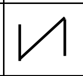
IV/ Le système bibi-binaire

1) Présentation

Le système bibi-binaire est une base comportant 16 chiffres (base hexadécimale) inventée par Boby Lapointe, chanteur et mathématicien du XX° siècle. Le principe est de créer une numération agréable à l'oreille grâce aux chiffres que nous évoquerons bientôt.

Il explique le nom bibi-binaire parce que $2^{2^2} = 16$, chaque « bi » signifiant 2. Ainsi, suivant cette logique, une base 256 se nommerait bibibi-binaire.

Voici les chiffres bibi-binaires et leur correspondance avec le décimal et le binaire

Décimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Binaire	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Répartition	0 0 0 0	0 0 0 1	0 1 0 0	0 1 0 1	0 0 1 0	0 0 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1	1 0 0 0	1 0 0 1	1 1 0 0	1 1 0 1	1 0 1 0	1 0 1 1	1 1 1 0	1 1 1 1
notation																
prononciation	ho	ha	he	hi	bo	ba	be	bi	ko	ka	ke	ki	do	da	de	di
Shadok	GA	BU	ZO	MEU	BU GA	BU BU	BU ZO	BU MEU	ZO GA	ZO BU	ZO ZO	ZO MEU	MEU GA	MEU BU	MEU ZO	MEU MEU

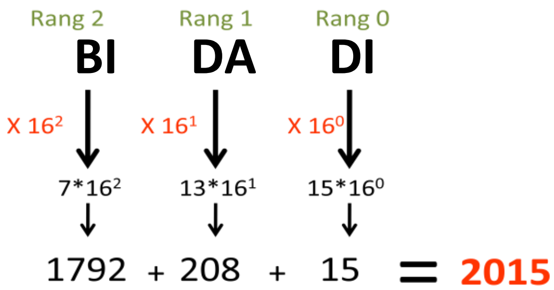
2) *Traduction du bibi-binaire en décimal*

Nous avons ensuite cherché à traduire un nombre bibi-binaire en nombre décimal.

Dans l'exemple ci-dessous, nous voulons traduire BI DA DI. (3)

Pour cela, nous appliquons la même méthode que pour les shadoks, c'est-à-dire que nous multiplions le chiffre du rang n par 16^n.

Donc ici DI, c'est-à-dire 15, est au rang 0, nous le multiplions donc par 16^0 : $15*16^0 = 15$.
Ensuite DA, c'est-à-dire 13, est au rang 1, nous le multiplions donc par 16^1 : $13*16^1 = 208$.
Enfin BI, c'est-à-dire 7, est au rang 2, nous le multiplions donc par 16^2 : $7*16^2 = 1792$. Nous additionnons maintenant le tout, nous obtenons 2015.



2015 est donc égal à BI DA DI dans le système bibi-binaire.

3) *Traduction de décimal en bibi-binaire*

Afin de passer du décimal au bibi-binaire, nous procédons de la même manière que pour passer du décimal au shadok. C'est-à-dire que nous allons commencer par écrire la division euclidienne du nombre à traduire par 16, puisque le bibi-binaire comprend 16 unités. Ensuite, nous traduisons le reste de la division en bibi-binaire. Puis, nous reprenons le quotient de la division obtenu précédemment et nous recommençons les étapes précédentes jusqu'à l'obtention d'un quotient nul. Enfin, nous reprenons les nombres traduits dans l'ordre inverse et nous obtenons le nombre décimal en bibi-binaire.

Dans l'exemple ci-dessous, nous cherchons à traduire 2015.

Nous posons donc, tout d'abord, la division euclidienne de 2015 par 16 : cela donne un quotient de 125 et un reste de 15. Nous traduisons ensuite le reste en bibi-binaire, cela donne DI et nous le notons.

Nous reprenons ensuite le quotient et recommençons l'étape précédente : nous posons la division euclidienne du quotient, c'est-à-dire 125, par 16.

Nous obtenons alors un quotient de 7 et un reste de 13. Nous traduisons le reste, cela donne DA et nous le notons. Nous reproduisons ces étapes jusqu'à obtenir un quotient nul. Nous reprenons donc le quotient et nous le divisons par 16. Cela donne un quotient de 0 et un reste de 7. Nous traduisons le reste, cela donne BI et nous le notons. Le quotient étant nul, il est inutile de le diviser, le reste sera toujours nul, nous nous arrêtons donc là.

$$2015 = 16 \times 125 + 15 \rightarrow \text{DI}$$
$$125 = 16 \times 7 + 13 \rightarrow \text{DA}$$
$$7 = 16 \times \underline{0} + 7 \rightarrow \text{BI}$$

2015 → BI DA DI

Nous reprenons alors les nombres traduits dans l'ordre inverse. 2015 se note donc BI DA DI en bibi binaire.

Conclusion

En étudiant le système des shadoks ; nous avons revisité notre numération et mieux compris les opérations de base telles que l'addition, la multiplication et surtout la soustraction. Et après ? Nous avons constaté que les deux bases fonctionnent de la même manière, et avons ainsi pu comprendre d'autres bases telles que le bibi-binaire ou le binaire. Cependant nous ne nous sommes pas penchés, faute de temps, sur les nombres négatifs, ou les puissances, etc…

Notes de l'édition

(1) Les Shadocks comptent ainsi : GA (rien), BU, ZO, MEU, BU GA, BU BU, BU ZO, BU MEU, ZO GA, ZO BU, ZO MEU, etc. Après MEU, ils sont obligés d'utiliser deux mots.

(2) Les parenthèses signifient que le nombre à l'intérieur prend la place du mot de droite. Cette notation peut être difficile à utiliser. En alternative, on peut réécrire l'opération successivement :

MEU BU – BU ZO
= MEU GA + BU – BU GA – ZO
= MEU GA + BU BU – ZO GA – ZO

En retirant le 3^{e} terme du 1er, et le 4^{e} terme du 2^{e}, on obtient :

BU GA + MEU = BU MEU

(3) Les mots « BI », « DA » et « DI » sont écrits en minuscules dans le tableau de la page précédente.