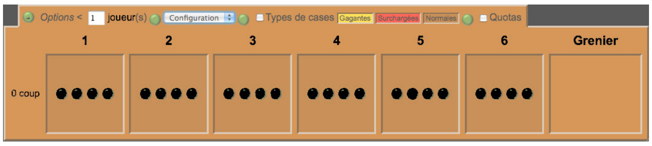
# L'awalé, ou ... la réussite africaine

*Marion CHAUVIN, Killian JOURNEAU, Arnaud CALUS, Romain BONNINGUE*

élèves de T^ale STG, T^ale S et 1^ère S du lycée du Parc Des Loges, Évry.
Enseignants : Mireille LAVENAS, Élisabeth COGIS, Christine BOSC-BIERNE, Denis CALUS, Cyril CHARIGNON, Mathieu WAUQUIEZ et Christian SAINT-GILLE.
Chercheur : Camille CHARBONNIER (Doctorante au Laboratoire Statistique et Génome)

## Sujet

**Le plateau du jeu** [traditionnel africain] d'awalé contient : 6 cases par joueurs 4 graines par case (donc 24 graines par joueur) 1 «grenier» commun à tous les joueurs. [Dans la variante étudiée ici] le but du jeu est de sauver toutes ses graines dans un lieu sûr, le grenier, avant son adversaire ! [Ici chaque joueur joue en fait en solitaire avec les graines de son propre camp ; il va chercher à «sauver» ses graines en moins de coups que les autres joueurs]




**Le principe du jeu**. Chaque coup du jeu consiste à *distribuer une par une toutes les graines d'une case* [de son choix] dans les cases suivantes. Le joueur prend donc l'ensemble des graines que contient une de ses cases, puis en pose une dans la suivante, une autre dans la deuxième, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'elles soient toutes réparties.

**La règle du grenier**. *On ne peut mettre une graine dans le grenier que si c'est la dernière* qu'on a dans la main : il faut que lors de la distribution, il ne reste qu'une graine à déposer quand on arrive au grenier. Si ce n'est pas le cas, on saute le grenier et continuer de distribuer en repartant au début (Case 1).

[**Le sujet de recherche** consiste à trouver pour une configuration initiale donnée une *résolution optimale*, c'est à dire un enchaînement de distributions qui permet de sauver toutes les graines et qui utilise un nombre de coup minimum.]

Vous pourrez comprendre encore plus aisément le problème et l'article en jouant sur le site MeJ (voir `http://mathenjeans.fr > edition > crmej.html > année 2010-2011`). Les illustrations de cet article en sont extraites.

## Mots-clés

AWÉLÉ, AWALÉ, JEU, AFRICAIN, GRAINE, SOLITAIRE, RÉUSSITE, MINIMUM, ALGORITHME, STRATÉGIE, MODULO

## Une situation idéale (6,5,4,3,2,1)

Nous avons observé que le fait de retourner à la case 1 à cause d'un trop grand nombre de graines entraîne un nombre de coups important. En effet, il va falloir ensuite avancer les graines de 6 cases pour atteindre le grenier.

C'est donc pour finir plus rapidement (c'est le but !) qu'il faut éviter cette situation ...

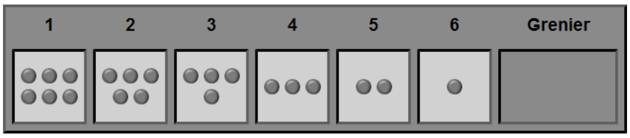
[Note. Il s'agit d'une piste de recherche : on cherchera à minimiser le nombre de fois où l'on dépasse le grenier]

**Des quotas pour les cases**.

D'où la mise en place d'un «quota» de graines, pour chaque case. Par exemple, si la case 6 (proche du grenier) possède 2 graines, il sera obligatoire de retourner à la case 1 quand on répartira les siennes. En revanche, si elle possède une graine, c'est la dernière en main : elle peut donc aller dans le grenier ! Le *quota* de la case 6 est donc 1. De même pour la case 5 c'est 2, la case 4 c'est 3, etc.

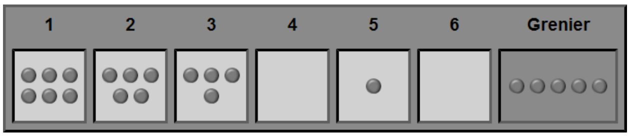
On obtient ainsi **une situation idéale**, dans laquelle les nombres de graines correspondent aux quotas des cases : (6,5,4,3,2,1)

[ici et dans la suite, chaque situation de jeu est notée entre parenthèses par la liste ordonnée des contenus de cases ; un coup sera désigné par le numéro de la case choisie et une succession de coups sera notée entre accolades]




**Résolution de la situation.**

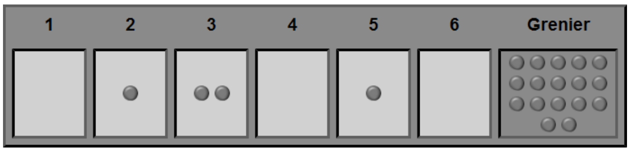
Les quotas étant remplis, toutes les cases peuvent mettre une graine dans le grenier. Mais attention, si on choisit de distribuer la case 1, les cases suivantes seront surchargées par rapport au quota ! Il faut donc d'abord distribuer les cases qui mettront une graine dans le grenier, et qui sont le plus près du grenier. On distribue donc successivement les cases : {6; 5; 6; 4; 6}, pour arriver à cette situation : (6,5,4,0,1,0).




**Dilemme 1, conseil 1**

Que choisir ? Distribuer la case 5, 6, puis 3, ou directement la 3 ? Si on choisit la deuxième possibilité, on en met une dans le grenier et en plus on «remplit» les cases 5 et 6 [sans dépasser leurs quotas]. C'est donc bénéfique. On peut en déduire un **conseil** : on s'occupe d'abord des *cases «gagnantes»* [cases dont la distribution aboutit au grenier] *le plus près du grenier*.

[De cette manière] 12 coups plus tard, dans la situation (0,1,2,0,1,0), il n'y a plus aucune case gagnante.




### Dilemme 2, conseil 2

On peut s'occuper séparément de chaque case, pour les amener une à une au grenier. Mais c'est bien trop long ! Il est plus efficace de regrouper les graines dans les cases proches du grenier pour en remplir le quota. Donc ici, on fera {2; 3} et les cases 5 et 6 seront remplies, donc gagnantes !

Tactique : *lorsqu'il n'y a plus de cases gagnantes, regrouper les graines en distribuant les cases les plus éloignées du grenier.*

### Solution de la situation (6,5,4,3,2,1)

[Si l'on suit systématiquement les conseils tactiques précédents, on obtient une recette (un *algorithme*) de résolution : en appliquant cette recette à la situation de départ (6,5,4,3,2,1)], la suite des cases à distribuer [obtenue] est alors :

{6; 5; 6; 4; 6; 3; 6; 5; 6; 2; 6; 1; 6; 5;
6; 4; 6; 2; 3; 6; 5; 6; 4; 5; 6}

*On n'a pas fait de retour à la case 1, c'est donc (théoriquement) le plus rapide : 25 coups.*

[ Note: cette assertion contient deux conjectures :

(1) *une résolution de* (6,5,4,3,2,1) *qui n'utilise aucun dépassement du grenier est optimale.*

(2) *Lorsqu'on applique les tactiques données plus haut, on réussit.* ]

## Passage de (4,4,4,4,4,4) à (6,5,4,3,2,1)

On a donc une situation, la plus rapidement soluble, en théorie. Il ne suffit plus qu'à arriver à cette situation particulière depuis celle de base et on aura, sans doute, le nombre de coups minimum !

### Jeu au hasard, essai n° 1

On a testé la distribution successive des cases

{1; 2; 3; 4; 5; 6; 1; 2; 3; 4; 5; 6}

(Et pourquoi pas ?). On obtient la situation (5,5,4,3,2,1) ; ce n'est pas la situation idéale, mais les quotas ne sont jamais dépassés. On résout ensuite normalement [par l'algorithme précédent], pour finir en *37 coups*.

### Jeu au hasard, essai n° 2

Peut-être qu'en passant par la vraie situation idéale, on obtiendra moins de coups. On y arrive, en partant de (4,4,4,4,4,4), avec ces 14 coups :

{1; 2; 3; 4; 5; 6; 5; 6; 1; 2; 3; 4; 5; 6}

On ajoute donc les 25 coups qui résolvent la situation idéale : 14+25=39 coups. Aïe ! En utilisant la situation « idéale », soi-disant rapide, on met deux coups de plus qu'avec la première. Ce n'est donc pas une bonne piste.

### Autres pistes et hypothèses

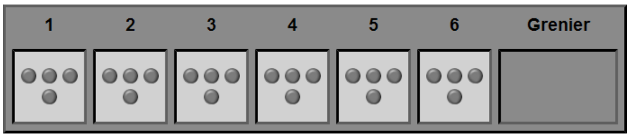
Pour réduire le nombre de coups en utilisant la situation idéale, on pourrait :

• Réduire le nombre de coups y amenant : les 14 coups ne sont peut-être pas optimaux.

• «Prendre le train en marche» : au lieu de vouloir atteindre la situation idéale, viser une des étapes de sa résolution !

## Situation (4,4,4,4,4,4)

On repart donc depuis le début, mais avec les conseils de résolution trouvés avec la situation (6,5,4,3,2,1).




### Un nouveau type de case

On a déjà vu les cases «*gagnantes*» qui mettent une graine dans le grenier à leur distribution, en ayant le quota exact de graines ; c'est le cas de la case 3. Ensuite, les cases «*normales*», qui on moins de graines que leurs quota : ici, la 1 et la 2.

Mais les cases 4, 5 et 6 ont un nombre supérieur à leurs quotas respectifs ! [On les appellent cases «*surchargées*»]. Il faut donc les soulager rapidement, avant la fin, sinon leurs graines reviendront à la case 1, et on perdra des coups de jeu.

### Un ordre de priorité

[On défini un nouvel algorithme de résolution]. La priorité des cases à distribuer sera maintenant la suivante :

• *D'abord les cases «gagnantes»*, marquées (=), *le plus près grenier* pour ne pas surcharger les cases gagnantes suivantes.

• *Ensuite, les cases «surchargées»*, marquées (+). Le plus loin ou le plus près du grenier ? *Le plus près*, pour éviter d'alourdir davantage les autres.

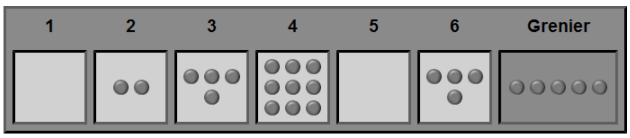
• *Enfin les cases «normales»*, marquées (-) : *le plus loin du grenier* pour les regrouper.

### Début de résolution

On commence donc par la case

{3(=); 6(+); 2(=); 6(=); 5(+); 1(=); 5(=)}

On obtient le plateau (0,2,4,9,0,4).




### Le modulo des cases gagnantes

Malgré nos règles de priorité, on a ici un choix à faire, La case 3 est gagnante, certes, mais la 4 aussi ! (Si, si, en faisant un tour de jeu, la dernière graine finit dans le grenier !)

*Problème* : Si on distribue la 3, on surcharge la 4. Et la 4 surcharge par son tour entier la 3. Après quelques tests, il s'avère préférable de prendre la case 4, donc toujours *le plus vers le grenier*, peu importe le nombre de tour. Ainsi, nous pouvons voir les cases gagnantes comme celles qui contiennent *le quota modulo 6 graines* (un tour entier).

**Solution de la situation (4,4,4,4,4,4)**

[Avec le nouvel algorithme], on fait donc les coups

{3(=); 6(+); 2(=); 6(=); 5(+); 1(=); 5(=); 4(=);
5(=); 6(=); 6(=); 3(+); 6(=); 5(=); 6(=); 4(=);
6(=); 2(=); 6(=); 5(=); 6(=); 1(-); 2(-); 3(=);
6(=); 4(=); 6(=); 5(=); 6(=)}

29 coups ! Soit 10 coups de moins que le minimum théorique [?].

**Conjecture.** Sachant qu'on ne peut sauver qu'une seule graine par coup, il serait difficile d'améliorer ce score : seuls 5 coups ne fournissent pas le grenier. Apprenez cette suite par cœur et vous gagnez ! Simple, non ?

**Comparaison des deux résolutions**

Maintenant qu'on a sans doute le nombre de coups le plus petit, on va reprendre [la piste] du train en marche, et voir à quel moment les résolutions convergent. Le résultat est décevant, ou bien le raccourci est fulgurant ! Les solutions se rejoignent… à la dernière étape seulement, alors qu'il ne reste qu'une graine dans le plateau.

**Maintenant, comment perdre !**

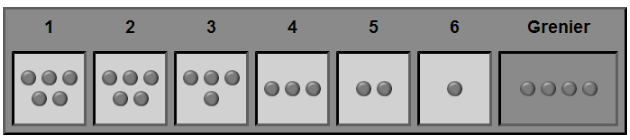
Si pour votre sécurité, lors d'un défi (mais bien sûr), vous voulez perdre, vous pouvez :

• Ne distribuer que les cases normales et surchargées, ainsi il n'y aura aucune graine dans le grenier. Mais si par hasard, vous tombez sur la situation idéale, vous serez obligé(e) d'en mettre une.

• Vous pouvez faire des coups de répétition, c'est-à-dire, que la situation se répète tout les x coups. Par exemple, refaites indéfiniment la série de coups

{1; 2; 3; 4; 5; 6}.

Vous poserez 4 graines dans le grenier les 12 premiers coups, ensuite, à chaque période, vous retomberez sur la situation (5,5,4,3,2,1) :




## Quelques pistes… [pour aller plus loin]

Les règles de priorité des cases sont peut-être imparfaites, il peut exister d'autres types de cases, que nous avons groupés dans 3 catégories. Ces nuances pourraient faire gagner des coups sur les 5 restants ?! On a testé d'autres pistes…

**Un programme récursif**. Un programme informatique qui explorerait toutes les possibilités de coups en fonction des précédents apporterait définitivement la réponse du nombre de coups. On a essayé, mais faute de temps et de performance de l'ordinateur, il n'a rien donné, malgré quelques optimisations. On aurait pu le lancer sur un jeu avec moins de possibilités (avec 2 graines par cases, au lieu de 4), étudier la suite de coups la plus courte et transposer ses règles sur la situation normale. Avis aux programmeurs !

? **Retourner l'awalé**. Si on retournait le jeu de l'awalé, la face contre la table on… n'y verrait plus rien. Plus sérieusement, on est parti des 24 graines dans le grenier et on a joué «à l'envers» de manière à sortir une graine à chaque coup. Un problème de logique survient au 7$^{ème}$. On peut en déduire qu'on ne peut pas mettre 1 graine par coup.

## Conclusion

Le nombre minimum serait donc certainement 29. Pour jouer, donc n'oubliez pas les règles de priorités des types de cases !

Venez jouez à plusieurs à notre simulation d'awalé sur le site de MeJ !

***