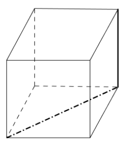
Les beaux pavés

Nicolas CABANES, Brice CHAILLÉ-CHAILLÉ, Romain MORILLON, Axel ROCHERON

élèves de 3ème et de 5éme, Collège Fernand Garandeau à La Tremblade (17)
Enseignants : Nathalie Robert, Dominique Direxel
Chercheur : Gilles Bailly-Maître



Sujet

Dans la tribu des Mathémacos, on considère qu'un *beau pavé* doit avoir la diagonale de sa base égale à sa hauteur. Une condition supplémentaire , les dimensions du pavé doivent être des nombres entiers.

[Ici, un «pavé» est un parallélépipède rectangle. Le problème est de trouver les proportions possibles des «beaux pavés»]

Mots-clés

TRIPLET PYTHAGORICIEN, TRIANGLE RECTANGLE, ENTIER, CARRÉ, THÉORÈME DE PYTHAGORE

Introduction

La diagonale d'un carré est plus grande que ses côtés. Un cube ne peut donc pas être un beau pavé car la diagonale de sa base est forcément plus grande que sa hauteur .

Trouver des beaux pavés revient à chercher des triangles rectangles dont les dimensions sont des nombres entiers.

Formule : dans un triangle rectangle , le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des 2 autres côtés .

Découverte des familles de pavés

Le triangle rectangle 3,4,5 permet de former un beau pavé car : $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Tous les multiples du pavé 3,4,5 peuvent être utilisés. Par exemple : 6, 8, 10 et 12, 16, 20 sont des beaux pavés. [Cela résulte de l'identité suivante :]

$$(3x)^2 + (4x)^2 = 9x^2 + 16x^2 = 25x^2 = (5x)^2$$

[**Note des éditeurs**. Ces multiples forment ce que les auteurs appellent une *famille* de beaux pavés ; dans la suite, chaque famille est assimilée à son beau pavé de base (c'est à dire le plus petit possible), noté sous la forme (a; b; c) , ou encore a, b, c, avec $a \leq b \leq c$: ces nombres a, b, c sont premiers entre eux. La hauteur c du pavé de base était appelé par les auteurs «le plus grand nombre de la famille» : pour éviter les confusions, nous avons préféré parler de «*hauteur de la famille*»]

Première méthode pour trouver des beaux pavés

Pour trouver des beaux pavés nous avons soustrait deux carrés et avons cherché si le résultat était aussi un carré.

a	a^2
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

Par exemple :

$13^2 - 12^2 = 5^2$ car $169 - 144 = 25$

ce beau pavé a pour dimensions (5;12;13)

Grâce à cette méthode nous avons pu trouver quelques familles .

Ces pavés sont des beaux pavés pour la tribu des Mathémacos :

(3;4;5) (5;12;13) (8;15;17) (7;24;25) (20;21;29)

? Ensuite nous avons remarqué que le résultat de l'addition des trois nombres de chaque famille donnait un nombre pair car *deux nombres sur les trois sont impairs*.

Cette remarque ne nous a pas permis de trouver de familles supplémentaires .

Deuxième méthode pour trouver des beaux pavés

[En rangeant les familles par ordre croissant des hauteurs] nous avons constaté que *la différence entre les hauteurs de deux familles successives* était [alternativement] de 4 ou de 8. [...]

3 4 **5**
+8
5 12 **13**
+4
8 15 **17**
+8
7 24 **25**
+4
20 21 **29**
+8
12 35 **37**
+4
9 40 **41**
+8
49
+4
28 45 **53**
+8
11 60 **61**
+4
16 63 **65**

liste 1

Cette remarque nous a permis de déterminer une liste [de hauteurs possibles: 5, 13, 17, 25, ...]. En utilisant la liste de nos carrés parfaits, nous avons trouvé les deux petits nombres de nos familles [voir la liste 1 ci-contre]

? En réalité les nombres de cette suite [de hauteurs] sont ceux qui vont de 4 en 4 sauf les multiples de 3, 7, 11, etc [Les nombres de la suite sont donc de la forme 12k+1 ou 12k+5].

Mais il existe des exceptions dans cette liste par exemple 49 n'est pas la hauteur d'une famille.

Nous avons remarqué que les exceptions sont des multiples de 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43 ...

7
+4
11
+8
19
+4
23
+8
31
+4
...
43

Les nombres suivants ne peuvent pas être la hauteur d'une famille [bien qu'il soient de la forme 12k+1 ou 12k+5] : 49, 77, 121, 133, 161, 209, 217, 253...

[Parmi] les nombres qui ne marchent pas sont ceux qui ne peuvent s'obtenir qu'en additionnant un carré avec 0^2.
Exemple : $7^2 + 0^2 = 49$

Les nombres qui fonctionnent correspondent à l'expression $4y + 1$ et ceux qui ne marchent pas répondent à l'expression $4x + 3$. [? Voir note plus bas]

Exemple : si $y = 1$, alors $4y + 1 = 5$ et on retrouve la famille 3, 4, 5 ; si $x = 1$, alors $4x + 3 = 7$ et on retrouve un des nombres qui ne fonctionnent pas.

[**Note des éditeurs**. Il nous semble que les observations faites par les auteurs les conduisent à deux conjectures distinctes, l'une sur les hauteurs possibles, l'autre sur les «exceptions».

— **Conjecture 1.** *Les hauteurs possibles pour les pavés de base (donc dont les trois dimensions sont premières entre elles) sont toujours de la forme* 4k+1.

— Les nombres qui sont des produits de nombres pris dans la liste 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, ... sont des hauteurs impossibles. Une formulation précise de cette seconde observation serait la : **Conjecture 2**. *Si tous les diviseurs premiers d'un nombre sont de la forme* 4k+3, *ce nombre n'est pas une hauteur de pavé possible*.

La liste des exemples donnée par les auteurs ; 49, 77, 121, 133, 161, 209, 217, 253, ... est bien conforme à cette seconde conjecture :

49 = 7×7 ; 77 = 7×11 ; 121 = 11×11 ; 133 = 7×19 ; 161 = 7×23 ; 209 = 11×19 ; 217 = 7×31 ; 253 = 11×23.]

Voici la liste de toutes les familles de beaux pavés que l'on a trouvées :

3, 4, 5	5, 12, 13	8, 15, 17
20, 21, 29	12, 35, 37	9, 40, 41
11, 60, 61	16, 63, 65	65, 72, 97
36, 77, 85	39, 80, 89	20, 99,101
15,112,113	44,117,125	88,105,137
51,140,149	85,132,157	119,120,169
119,180,181	60,175,185	95,168,193
104,195,221	60,221,229	105,208,233
147,196,245	32,255,257	96,247,265
160,231,293	207,224,305	25,312,313
36,323,325	13, 84, 85	21,220,221
17,144,145	43,1104,1105	49,1200,1201
53,1404,1405	55,1512,1513	52,1624,1625

liste 2

[Quelques triplets, présents dans la liste 1 ont été oublié dans la liste 2, les voici :]

7, 24, 25	28, 45, 53	48, 55, 73
36, 77, 85	60, 91, 109	52, 165,173
56,195,197	140, 169 , 221	120,209,241
69,260,269		

***