Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Les Tours de Hanoï

Année 2015-2016

Auteurs : DUBOIS Hugo et ROCQUET Bastien, élèves de Terminale S.
Établissement : Lycée Condorcet, Saint-Quentin (02).
Encadrés par : Fabien AOUSTIN.
Chercheur : Fabien DURAND, Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée, LAMFA, UMR CNRS 7352, Université de Picardie Jules Verne.

Introduction :

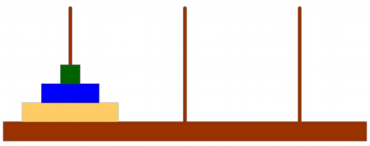
Les tours de Hanoï furent inventées par l'Amiénois, Édouard Lucas. Il fut l'un des premiers mathématiciens à s'intéresser aux jeux mathématiques. Les tours de Hanoï est un jeu et un problème mathématique qui consiste à déplacer un certain nombre d'anneaux d'un poteau de départ à un poteau d'arrivée.
Cependant, il y a différentes règles à respecter : la première consiste à ne pas déplacer plusieurs anneaux à la fois. La seconde consiste à ne pas placer un plus grand anneau sur un plus petit.
Dans cet article, nous établissons une formule donnant le nombre minimal de coups nécessaires pour résoudre le problème puis nous proposons un algorithme décrivant la solution optimale. Ensuite nous nous intéressons à la fréquence d'apparition de certains mouvements.

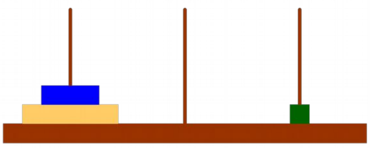
1. Description du jeu :

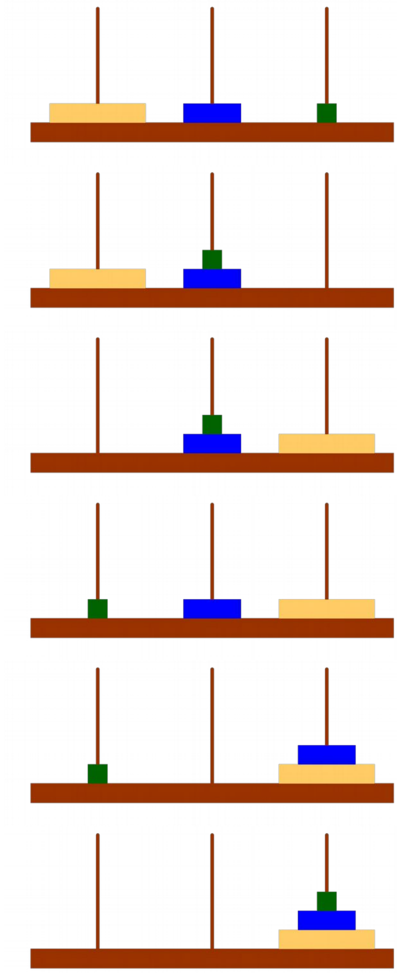
Le jeu est constitué de trois piquets. Sur le premier piquet se trouvent n anneaux, du plus grand au plus petit. Le but est de positionner tous les anneaux sur le troisième piquet, du plus grand au plus petit en respectant les règles suivantes :

- on ne peut prendre qu'un seul anneau à la fois
- on ne peut pas mettre un plus grand anneau sur un plus petit.

Voici un exemple avec 3 anneaux.







2. Le nombre de coups minimum :

Nos premières recherches se sont portées sur le nombre de coup minimum. Ainsi nous avons pu faire quelques observations sur les premiers anneaux (de 1 à 6). Nous avons trouvé les résultats ci-dessous :

Nombre d'anneaux	1	2	3	4	5	6
Nombre de coups	1	3	7	15	31	63

On note u_n le nombre minimal de coups nécessaires pour déplacer n anneaux.

Nous remarquons sur ce tableau que $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Nous allons démontrer par récurrence notre conjecture qui est la suivante : $u_n = 2^n - 1$.

Soit P_n la propriété : « $u_n = 2^n - 1$ ».

Initialisation :
On a $u_1 = 1$ et $2^1 - 1 = 1$. On constate que P_1 est vraie.

Hérédité :
Supposons que P_k est vraie.
Démontrons que P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.
En effet, pour déplacer $k+1$ anneaux, il faut déplacer les k plus petits anneaux du poteau 1 au poteau 2, puis déplacer le plus grand anneau du poteau 1 au poteau 3, et enfin les k anneaux restant du poteau 2 au poteau 3.
On a ainsi :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 1 + u_k = 2u_k + 1 \\ &= 2\times\left(2^k - 1\right) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{k+1} - 1. \end{aligned}$$

Remarque : On ne déplace qu'une seule fois le grand anneau pour avoir le nombre de coups minimum car si on le déplace plusieurs fois cela nous oblige à déplacer plusieurs fois les k plus petits anneaux car pour déplacer le plus grand anneau il faut déplacer les k plus petits anneaux sur un même poteau.
Conclusion :
P_1 est vraie et la propriété est héréditaire donc il faut au moins $2^n - 1$ coups pour déplacer n anneaux.

3. Un algorithme :

3.1. Notation des mouvements :

Afin de créer notre algorithme, il a fallu donner une notation à chaque mouvement ainsi on note :

- A : mouvement du poteau 1 au poteau 2
- B : mouvement du poteau 1 au poteau 3
- C : mouvement du poteau 2 au poteau 1
- D : mouvement du poteau 2 au poteau 3
- E : mouvement du poteau 3 au poteau 1
- F : mouvement du poteau 3 au poteau 2.

3.2. Description d'un mot :

On reprend l'exemple avec $n = 3$ anneaux.
Le mot qui donne la solution est : BAFBCDB

- B : de 1 vers 3
- A : de 1 vers 2
- F : de 3 vers 2
- B : de 1 vers 3
- C : de 2 vers 1
- D : de 2 vers 3
- B : de 1 vers 3.

3.3. Principe de récurrence :

Pour expliquer à l'ordinateur comment trouver la solution du problème, nous lui expliquons le principe de récurrence. Pour déplacer la totalité des n anneaux du poteau 1 vers le poteau 3, il faut déplacer les $n-1$ anneaux, du poteau 1 vers le poteau 2, ensuite, déplacer l'anneau restant (c'est-à-dire le plus grand), du poteau 1 vers le poteau 3, et pour finir déplacer les $n-1$ anneaux du poteau 2 vers le poteau 3.
Grâce à notre algorithme et notre système de notation, on est capable de construire un mot représentant la solution du problème.

3.4. Algorithme à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

Nous avons utilisés un logiciel de calcul formel (Xcas) qui nous a aidés à créer un algorithme récursif. Un algorithme récursif est un algorithme qui résout un problème en calculant des solutions d'instances plus petites du même problème.
Pour expliquer à l'ordinateur comment trouver la solution du problème, nous lui expliquons le principe de récurrence.
Dans cet algorithme, n désigne le nombre d'anneaux, k désigne le numéro du piquet de départ et j le numéro du piquet d'arrivée.

```
mot(n,k,j):={
  si n==1 et k==1 et j==2
    alors retourne "A"; fsi;
  si n==1 et k==1 et j==3
    alors retourne "B"; fsi;
  si n==1 et k==2 et j==1
    alors retourne "C"; fsi;
  si n==1 et k==2 et j==3
    alors retourne "D"; fsi;
  si n==1 et k==3 et j==1
    alors retourne "E"; fsi;
  si n==1 et k==3 et j==2
    alors retourne "F"; fsi;
  si n>1 alors
     si k==1 et j==2 alors retourne mot(n-1,1,3) + "A" + mot(n-1,3,2); fsi;
     si k==1 et j==3 alors retourne mot(n-1,1,2) + "B" + mot(n-1,2,3); fsi;
     si k==2 et j==1 alors retourne mot(n-1,2,3) + "C" + mot(n-1,3,1); fsi;
     si k==2 et j==3 alors retourne mot(n-1,2,1) + "D" + mot(n-1,1,3); fsi;
     si k==3 et j==1 alors retourne mot(n-1,3,2) + "E" + mot(n-1,2,1); fsi;
     si k==3 et j==2 alors retourne mot(n-1,3,1) + "F" + mot(n-1,1,2); fsi;
  fsi;
   }:;
```

4. Quelques statistiques :

4.1. Étude des fréquences :

On étudie le nombre d'apparitions du mouvement A (du piquet 1 au piquet 2) dans les solutions optimales du problème.
On observe les résultats suivants où n est le nombre d'anneaux et où le déplacement indiqué est celui de la pile d'anneaux entière.

n / déplacement	1	2	3	4	5	6	7	8	9
De 1 vers 2	1	1	3	3	9	9	31	31	117
De 1 vers 3	0	1	1	4	4	15	15	58	58
De 2 vers 1	0	0	0	2	2	12	12	54	54
De 2 vers 3	0	0	1	1	6	6	27	27	112
De 3 vers 1	0	0	1	1	6	6	27	27	112
De 3 vers 2	0	1	1	4	4	15	15	58	58

En regardant les fréquences d'apparition du mouvement A dans le jeu classique, on a conjecturé que cette fréquence tendait vers $\frac{1}{9}$ ou $\frac{2}{9}$ suivant si le nombre d'anneaux est pair ou impair.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Fréquence de A du piquet 1 vers le piquet 3	0	0,333	0,143	0,267	0,129	0,238	0,118	0,227	0,113	0,224	0,112

On note $u_{n,i,j}$ le nombre de mouvements A utilisés dans la solution optimale pour déplacer n anneaux du piquet i vers le piquet j.
Prenons la ligne qui correspond au jeu classique (déplacer la pile du piquet 1 au piquet 3).
On observe que les valeurs obtenues à un rang pair se répètent au rang impair suivant.
On peut alors choisir de ne garder que les valeurs obtenues au rang impair et on construit ainsi une suite (u_n) définie par $u_n = u_{2n+1,1,3}$.

n	0	1	2	3	4
u_n	0	1	4	15	58

On observe alors que sur les premiers termes, on a la relation suivante : $u_{n+1} = 4u_n - (n-1)$.

4.2. Démonstration :

Supposons que la relation : $u_{n+1} = 4u_n - (n-1)$ est vraie et cherchons alors l'expression explicite de u_n.
On cherche donc une suite qui vérifie :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = 4u_n - (n-1).$$

Cherchons une suite de la forme $v_n = a + bn$ qui vérifie la relation de récurrence.
On a alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} = 4v_n - (n-1) &\Leftrightarrow a + b(n+1) = 4(a+bn) - (n-1) \\ &\Leftrightarrow a + bn + b = 4a + 4bn - n + 1 \\ &\Leftrightarrow -3a + b - 3bn = -n + 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + b = 1 \\ -3b = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + \frac{1}{3} = 1 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a &= \frac{2}{3} \\ b &= \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{-2}{9} \\ b &= \frac{1}{3} \end{cases}.$$

On a ainsi : $v_n = \frac{-2}{9} + \frac{1}{3}n.$

Si la relation de récurrence se limitait à $u_{n+1} = 4u_n,$ la suite géométrique (w_n) définie par $w_n = \lambda \times 4^n$ conviendrait.

Si on pose $u_n = w_n + v_n = \lambda \times 4^n - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}n$ on peut constater que (u_n) vérifie la relation de récurrence voulue. En effet : $u_{n+1} = w_{n+1} + v_{n+1} = 4w_n + 4v_n - (n-1) = 4u_n - (n-1).$

Comme on doit aussi avoir $u_0 = 0,$ on a alors $\lambda \times 4^0 - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \times 0 = 0$ et donc $\lambda = \frac{2}{9}.$

Ainsi, on aurait $u_n = \frac{2}{9} \times 4^n - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}n.$

On pourrait donc avoir : $u_{2n+1,1,3} = \frac{1}{9}\left(2 \times 4^n - 2 + 3n\right).$

Par ailleurs, le principe de récurrence de l'algorithme donnant les solutions nous donne aussi :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_{n+1,1,2} \\ u_{n+1,1,3} \\ u_{n+1,2,1} \\ u_{n+1,2,3} \\ u_{n+1,3,1} \\ u_{n+1,3,2} \end{pmatrix}}_{U_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_{n,1,2} \\ u_{n,1,3} \\ u_{n,2,1} \\ u_{n,2,3} \\ u_{n,3,1} \\ u_{n,3,2} \end{pmatrix}}_{U_n} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}.$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} U_{2n+3} &= A \cdot U_{2n+2} + B \\ &= A \cdot \left(A \cdot U_{2n+1} + B\right) + B \\ &= A^2 \cdot U_{2n+1} + AB + B. \end{aligned}$$

Sur le même modèle que ce qui a été fait plus haut, avec beaucoup de calculs, on obtient :

$$U_{2n+1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \times 4^n + 5 + 6n \\ 2 \times 4^n - 2 + 3n \\ 2 \times 4^n - 2 - 6n \\ 4 \times 4^n - 4 - 3n \\ 4 \times 4^n - 4 - 3n \\ 2 \times 4^n - 2 + 3n \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n on note P_n la propriété : « $U_{2n+1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \times 4^n + 5 + 6n \\ 2 \times 4^n - 2 + 3n \\ 2 \times 4^n - 2 - 6n \\ 4 \times 4^n - 4 - 3n \\ 4 \times 4^n - 4 - 3n \\ 2 \times 4^n - 2 + 3n \end{pmatrix}.$ »

On démontre cette propriété par récurrence.

Initialisation :

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4\times 4^n+5+6n \\ 2\times 4^n-2+3n \\ 2\times 4^n-2-6n \\ 4\times 4^n-4-3n \\ 4\times 4^n-4-3n \\ 2\times 4^n-2+3n \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4\times 4^0+5+6\times 0 \\ 2\times 4^0-2+3\times 0 \\ 2\times 4^0-2-6\times 0 \\ 4\times 4^0-4-3\times 0 \\ 4\times 4^0-4-3\times 0 \\ 2\times 4^0-2+3\times 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or $U_{2\times 0+1} = U_1$ et U_1 correspond à 1 mouvement donc P_0 est vraie.

Hérédité :

On suppose que P_k est vraie.

On veut démontrer P_{k+1} c'est-à-dire que :

$$U_{2(k+1)+1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4\times 4^{k+1}+5+6(k+1) \\ 2\times 4^{k+1}-2+3(k+1) \\ 2\times 4^{k+1}-2-6(k+1) \\ 4\times 4^{k+1}-4-3(k+1) \\ 4\times 4^{k+1}-4-3(k+1) \\ 2\times 4^{k+1}-2+3(k+1) \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4^{k+2}+6k+11 \\ 2\times 4^{k+1}+3k+1 \\ 2\times 4^{k+1}-6k-8 \\ 4^{k+2}-3k-7 \\ 4^{k+2}-3k-7 \\ 2\times 4^{k+1}+3k+1 \end{pmatrix}.$$

Or on sait que :

$$U_{2k+3} = A^2\cdot U_{2k+1} + AB + B$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4\times 4^k+5+6k \\ 2\times 4^k-2+3k \\ 2\times 4^k-2-6k \\ 4\times 4^k-4-3k \\ 4\times 4^k-4-3k \\ 2\times 4^k-2+3k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8\times 4^k+10+12k+4\times 4^k-4-3k+4\times 4^k-4-3k \\ 4\times 4^k-4+6k+2\times 4^k-2-6k+2\times 4^k-2+3k \\ 2\times 4^k-2+3k+4\times 4^k-4-12k+2\times 4^k-2+3k \\ 4\times 4^k+5+6k+8\times 4^k-8-6k+4\times 4^k-4-3k \\ 4\times 4^k+5+6k+4\times 4^k-4-3k+8\times 4^k-8-6k \\ 2\times 4^k-2+3k+2\times 4^k-2-6k+4\times 4^k-4+6k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 16\times 4^k+2+6k \\ 8\times 4^k-8+3k \\ 8\times 4^k-8-6k \\ 16\times 4^k-7-3k \\ 16\times 4^k-7-3k \\ 8\times 4^k-8+3k \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4^{k+2}+6k+11 \\ 2\times 4^{k+1}+3k+1 \\ 2\times 4^{k+1}-6k-8 \\ 4^{k+2}-3k-7 \\ 4^{k+2}-3k-7 \\ 2\times 4^{k+1}+3k+1 \end{pmatrix}.$$

Donc la propriété est bien héréditaire.

Conclusion :
La propriété est héréditaire et P_0 est vraie, donc P_n est vraie pour tout n entier naturel

Ainsi, on a donc bien : $u_{2n+1,1,3} = \frac{2}{9} \times 4^n - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} n.$
Ainsi, comme le nombre total de mouvement de la solution optimal pour $2n+1$ anneaux est $2^{2n+1} - 1,$ la fréquence est donnée par : $f_{2n+1,1,3} = \dfrac{\frac{2}{9} \times 4^n - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} n}{2^{2n+1} - 1}.$

Cherchons la limite de $f_{2n+1,1,3}$.

$$f_{2n+1,1,3} = \frac{\frac{2}{9} \times 4^n - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} n}{2^{2n+1} - 1} = \frac{\frac{2}{9} \times 4^n - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} n}{2^{2n} \times 2 - 1}$$
$$= \frac{\frac{2}{9} \times 4^n - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} n}{2 \times 4^n - 1} = \frac{\frac{2}{9} \times 4^n}{2 \times 4^n - 1} - \frac{\frac{2}{9}}{2 \times 4^n - 1} + \frac{\frac{1}{3} n}{2 \times 4^n - 1}$$

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{2}{9} \times 4^n}{2 \times 4^n - 1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{2}{9} \times 4^n}{4^n \left(2 - \frac{1}{4^n}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{2}{9}}{2 - \frac{1}{4^n}} = \dfrac{\frac{2}{9}}{2} = \dfrac{1}{9}.$

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} = \dfrac{\frac{2}{9}}{2 \times 4^n - 1} = 0.$

On a aussi : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{3} n}{2 \times 4^n - 1} = 0.$

Finalement, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_{2n+1,1,3} = \dfrac{1}{9} + 0 + 0 = \dfrac{1}{9}.$

De même, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_{2n,1,3} = \dfrac{2}{9}.$

En conclusion, si le nombre d'anneaux est pair, la fréquence d'apparition du mouvement A pour déplacer les anneaux du piquet 1 vers le piquet 3 tend vers $\dfrac{2}{9}$ et si le nombre d'anneaux est impair, cette fréquence tend vers $\dfrac{1}{9}$.