Maths et Magie

Année 2013- 2014

Elèves: Inès Aurensan 4°, Zoé Gille 4°, Aubin Villas 4°, Lucile Davezac 5°, Charline Labenelle 5°, Sophie Wos 4° et Mélanie Sahuc 4°

Etablissement: Collège de Marciac

Professeurs: Christophe Pignon et Edelyne De Nodrest

Chercheur: Xavier Bressaud , Université de Toulouse

Notre sujet:

Notre sujet consiste à prendre un tas de cartes et le séparer en deux tas égaux ; un tas que l'on place « en haut » et un tas que l'on place « en bas ».
Ensuite on commence à les mélanger en alternant la dernière carte d'un tas puis la dernière carte de l'autre tas, comme dans les casinos.
Ce battage sera toujours celui utilisé dans cet exposé (il y en a donc deux possibles : soit on commence par le tas du bas, puis on alterne les cartes entre les deux tas ; soit on commence par le tas du haut puis on alterne les cartes entre les deux tas).
Le but de notre sujet est de trouver en combien de ces battages les cartes reviendront à leur place initiale, pour n'importe quel nombre de cartes (sachant qu'il doit être pair). Pour cela nous nous sommes posés trois questions qui étaient pour nous comme une sorte d'objectif :

- En combien de battages les cartes reviendront à leur place initiale ? (c'est le but du sujet)
- Peut-on le prévoir à l'avance ?
- Et comment le prouver ?

Nos propriétés / Nos résultats:

Nous en avons trois :
1- Si on mélange un tas de cartes comportant 2^n cartes , alors le nombre de mélanges nécessaire pour que le tas revienne à son état initial sera $2n$.
2- Si on mélange les cartes en commençant par distribuer le tas du haut, quand la première carte revient à sa place initiale alors toutes les cartes du tas reviennent à leur place initiale.
3- Si on mélange les cartes en commençant par distribuer le tas du haut, alors le nombre de battages sera égal à la façon de mélanger en commençant par le tas du bas avec deux cartes en plus. (1)

Nos méthodes de recherche :

- Pour commencer nous avons utilisé de vraies cartes, et nous avons effectué les battages à la main. Malheureusement une fois le nombre de cartes de départ augmenté, la tâche est devenue plus difficile, et nous devions à chaque fois recommencer le battage qui durait parfois plus d'une demi-heure, car nous soupçonnions des erreurs.

- Nous avons changé de méthode, et nous avons fait les mélanges à l'écrit. Nous avons remplacé les cartes par des nombres, et nous les écrivions à la verticale, nous tracions ensuite un trait au milieu du tas et nous commencions à mélanger en imaginant avoir les cartes en mains.
  Exemple avec un tas de 6 cartes :

1	1	1	1
2	4	5	3
3	2	4	5
4	5	3	2
5	3	2	4
6	6	6	6

Malheureusement nous ne voyions pas assez où les cartes se déplaçaient, alors que nous avions découvert un mouvement régulier, donc pour se faciliter la tâche nous avons trouvé une troisième méthode.

- Notre troisième méthode consistait à rajouter des couleurs, chaque nombre avait une couleur différente. Comme ça, nous avons bien pu observer le déplacement des cartes.

1	1	1	1	1
2	4	5	3	2
3	2	4	5	3
4	5	3	2	4
5	3	2	4	5
6	6	6	6	6

Nous avons même utilisé un tableur pour aller plus rapidement, et cette méthode fut la bonne !

Les démonstrations :

Démonstration de la propriété n°3 :
Si on mélange les cartes en commençant par distribuer le tas du haut, alors le nombre de battages sera égal à la façon de mélanger en commençant par le tas du bas avec deux cartes en plus. (2)

Soit un tas de cartes de M cartes, numérotées de 1 à M.

HAUT: 1 . . . $\frac{M}{2}$

BAS: $\frac{M}{2}+1$ . . . M

On mélange en commençant par BAS
Donc 1ère carte mélangée = M
Et elle va en position M
Donc la 2ème carte mélangée = $\frac{M}{2}$
et elle va en position M-1
…
Donc la dernière carte mélangée est la 1
Et elle va en 1.
Donc on obtient : →

HAUT: 1, $\frac{M}{2}+1$ . . .

BAS: . . . $\frac{M}{2}$, M

Soit un tas de cartes de M-2 cartes, numérotées de 2 à M-1.

HAUT: 2 . . . $\frac{M}{2}$

BAS: $\frac{M}{2}+1$ . . . M-1

On mélange en commençant par HAUT
Donc 1ère carte mélangée = $\frac{M}{2}$
Et elle va en position M-1
Donc la 2ème carte mélangée = M-1
Et elle va en M-2
…
Donc la dernière carte mélangée est la $\frac{M}{2}+1$
Et elle va en 2
Donc on obtient : →

HAUT: $\frac{M}{2}+1$ . . .

BAS: . . . M-1, $\frac{M}{2}$

Conclusion : Dans le deuxième mélange, on obtient donc bien le tas du premier mélange moins la première et la dernière carte. Donc mélanger en commençant par le tas du haut revient bien à mélanger en commençant par le tas du bas avec deux cartes en plus. Nous venons donc de démontrer la propriété 3.

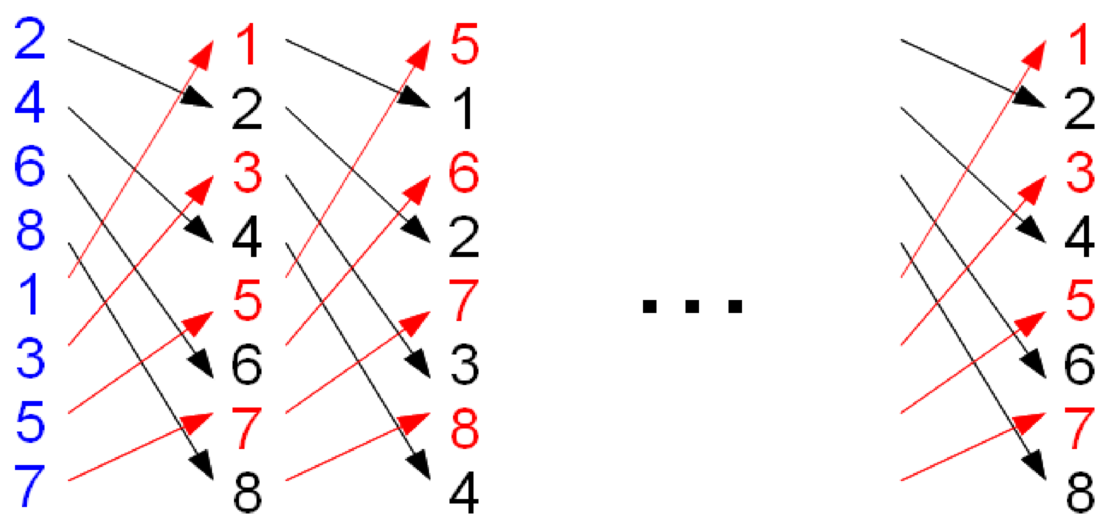
On en déduit le tableau suivant, qui donne le nombre de battages nécessaires pour que le tas de cartes revienne à son état initial :

Nombre de cartes	2	4	6	8	10	12	14
Nombre de battages en commençant par le tas du haut	2	4	3	6	10	12	4
Nombre de battages en commençant par le tas du bas	1	2	4	3	6	10	12

<u>Plan de la démonstration de la propriété n°2 :</u>

Si on mélange les cartes en commençant par distribuer le tas du haut, quand la première carte revient à sa place initiale alors toutes les cartes du tas reviennent à leur place initiale.

On part d'un tas de carte de N cartes, et on effectue le battage en commençant par le tas du haut.
Le battage se faisant toujours de la même façon, on a donc toujours un schéma du type suivant, où les « flèches » montrent où vont les cartes (exemple avec 8 cartes ; le tas initial est le tas dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) :



On sait qu'on fait toujours le même battage.
Donc les cartes bougent toujours de la même façon (flèches rouges et noires du schéma ci-dessus).

De plus, une carte n'a qu'un nombre fini de positions possibles (le nombre de cartes qu'il y a).
Donc au bout d'un moment elle finit par revenir à une position qu'elle occupait déjà.
Donc chaque carte suit toujours la même séquence (dans l'exemple ci-dessus la carte 1 va en 2, puis en 4, puis en 8, puis en 7, puis 5, puis en 1 ; et recommence cette séquence si on continue le battage. La 6 va en 3, puis en 6, puis en 3 ; et recommence cette séquence si on continue le battage).
Donc si la 1 est revenue à sa position, alors la 1 a fini sa séquence. Donc toutes les cartes qui ont la même séquence que la 1 ont aussi fini leur séquence et donc reviennent aussi à leur position initiale.

Il y a ensuite deux cas :

- soit toutes les cartes suivent la même séquence que la 1 alors quand la 1 revient à sa place, alors toutes les autres aussi. Et donc le tas entier est revenu à sa position initiale.
- soit certaines cartes ne suivent pas la même séquence que la 1. Dans ce cas-là, elles suivent une séquence qui fait des échanges entre plusieurs cartes. Ces séquences ont pour longueur un diviseur de la longueur de la séquence de la carte 1.(3)

Donc quand la carte 1 a fini sa séquence, alors ces cartes ont aussi fini la leur et quand la 1 revient à sa place initiale, alors toutes les autres aussi.

Ce qui explique la propriété n°2.

Conclusion :

Nous avons en partie résolu le problème puisque nous avons compris comment se déplacent les cartes. Et nous avons ainsi trouvé, grâce au tableur, pour des tas de cartes avec un nombre de cartes différent, le nombre de battages nécessaires pour que le tas de cartes revienne à son état initial (voir le tableau un peu plus haut qu'on peut poursuivre comme on veut).

Mais nous n'avons pas réussi à trouver une formule qui pourrait dire, à l'avance, en fonction du nombre de carte du tas, combien de battages il faut pour que le tas de carte revienne à son état initial.

Nous avons juste trouvé une formule si le tas de carte comporte 2^n cartes : c'est la propriété n°1 qu'il nous resterait à démontrer. Nous pensons que les deux propriétés n°2 et n°3 démontrées serviraient à démontrer la propriété n°1.

Pour poursuivre nos recherches, nous avions pensé à étudier les cas où l'alternance des cartes est moins régulière ou différente de 2.

Notes d'édition

(1) Autrement dit, si *p* est un entier, le nombre de battages nécessaire en commençant par le tas du haut pour un paquet de $2p$ cartes est égal au nombre de battages nécessaires en commençant par le tas du bas pour un paquet de $2p+2$ cartes

(2) voir la note (1)

(3) La preuve de cette affirmation mériterait d'être détaillée