# Les Mosaïques

[ Année 2014- 2015 ]

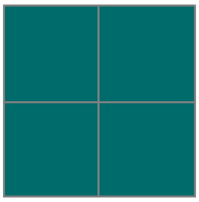
Barillot Thomas **du lycée Alfred Kastler de Talence**

Balfouong Florentin, Manguy Auréline, Marqueton Emma, Lazarus Ines, Ramzac Julie **du lycée Vaclav Havel de Bègles**

Chercheur : Adrien Boussicault au LABRI (Bordeaux)
Enseignants : Guillaume Boix, Marie-Josée Denaes, Cathy Racadot et Corinne Ribrault.

## I. Le sujet

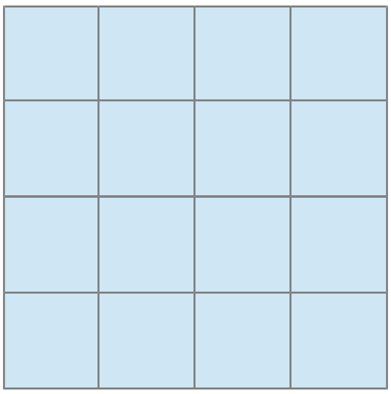
Voici un carré :D



Combien de rectangle(s) comptez-vous ?

☐ 4
☐ 5
☐ 9

Trop facile ?
Et dans celui-ci ?



Vous êtes fatigués de compter ? Voici quelques propositions.....

☐ 99
☐ 100
☐ 101

/!\ N'oubliez pas que les carrés sont des rectangles particuliers ! /!\
C'était notre sujet : compter le nombre de rectangles dans un carré de côté n.
Comme vous, on a d'abord compté.…

## *II. Première formule*

Et on a trouvé, une formule, un peu par hasard, qui semblait marcher pour tous les carrés :

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Mais qu'est-ce que c'est que ce symbole bizarre ? ------> $\Sigma$

On appelle ce symbole un sigma. Il permet de représenter une somme de 1 à n.
Exemple :

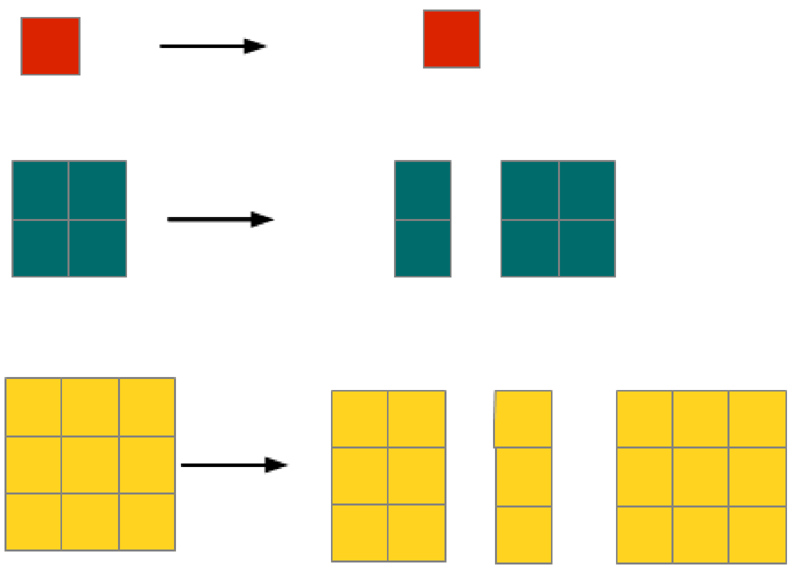
$$\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5 = 15$$

Dans notre cas, le k est au cube car pour trouver le nombre de rectangles dans un carré, on fait la somme des cubes de 1 à n.
N'ayant pas réussi à prouver cette formule, nous l'avons abandonnée quelque temps, mais nous y reviendrons plus tard.

## *III. Comptage par classification*

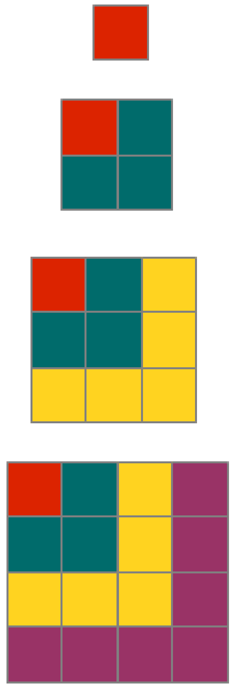
### A. Cas particulier

Pour organiser nos recherches, nous avons répertorié les différentes formes de rectangles dans les carrés.



Dans le carré rouge, il y a une forme possible.
Dans le carré bleu, il y a deux nouvelles formes plus la forme précédente.
Et dans le carré jaune, il y a trois nouvelles formes plus les trois formes précédentes.

A partir du nombre des différentes formes répertoriées, nous avons créé une pyramide de nombres.



| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | | | | | | | | | |
| 5 | 12 | 5 | | | | | | | |
| 3 | 8 | 3 | 10 | 8 | 3 | | | | |
| 1 | 4 | 1 | 6 | 4 | 1 | 8 | 6 | 4 | 1 |
| 1x1 | 2x1 | 2x2 | 3x1 | 3x2 | 3x3 | 4x1 | 4x2 | 4x3 | 4x4 |

Les nombres du bas en noir représentent le format des rectangles. Par exemple, dans la première colonne, le 1 rouge correspond au seul rectangle 1x1 rouge dans le carré de côté 1. Le 3 vert au-dessus correspond aux trois rectangles de côté 1x1 que l'on ajoute au rectangle précédent pour former le carré de côté 2.
Oui, cette phrase est compliquée... Relisez-la, ça va rentrer.

La somme de tous ces chiffres en couleur correspond au nombre total de rectangles.

Nous pouvons constater que cette pyramide suit une suite logique récurrente.

En effet, si vous avez bien observé les lignes verticales, lorsque le nombre du bas est un nombre pair x, le nombre du dessus sera x+4, puis celui encore au-dessus sera x+4+4, etc. Quand le nombre du bas est un impair y, le nombre au-dessus sera y+2, puis y+2+2... Pour savoir quels nombres ajouter à la ligne horizontale du bas, il suffit de suivre la suite logique : (1) ; (4;1);(6;4;1);(8;6;4;1);(10;8;6;4;1). Maintenant vous savez comment continuer cette pyramide à l'infini ! Bon courage :D
Ceci est pour un cas particulier.

## B. Cas général

Nous avons fait la même chose pour un carré de côté *n*.
Voilà ce qui en a résulté :

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2n-1 | 2n-2 | 2n-3 | 2n-4 | 2n-5 |
| 2 | 2n-2 | 2n-3 | 2n-4 | 2n-5 | 2n-6 |
| 3 | 2n-3 | 2n-4 | 2n-5 | 2n-6 | 2n-7 |
| 4 | 2n-4 | 2n-5 | 2n-6 | 2n-7 | 2n-8 |
| 5 | 2n-5 | 2n-6 | 2n-7 | 2n-8 | 2n-9 |

Chaque case correspond à un format de rectangle. (1) Par exemple, pour un carré de côté 4, on prend les colonnes 1, 2, 3 et 4 et les lignes 1, 2, 3 et 4 puis on fait les calculs de chaque case : dans notre cas, n = 4, on a donc :

(2x4-1) + (2x4-2)x2 + (2x4-3)x3 + (2x4-4)x4 + (2x4-5)x3 + (2x4-6)x2 + (2x4-7) = 64
Lorsque n=3, on a 36 rectangles. 64+36 = 100, on a donc 100 rectangles.
Ce tableau permet donc de calculer facilement le nombre de rectangles, quelle que soit la taille du carré. Mais c'est toujours trop long pour nous, qui sommes paresseux !

Nous sommes revenus à la petite formule du début, trouvée par hasard. Nous avions peut-être un moyen de la démontrer, grâce à la récurrence…

## *IV. Récurrence*

Notre hypothèse de récurrence est la suivante : le nombre de rectangles dans un carré de côté n est égal à $\sum_{k=1}^{n} k^3$

Si pour le carré suivant, le nombre de rectangles est égal à $\sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$, alors notre hypothèse de récurrence est vérifiée.

Le $(n+1)^3$ correspond à ce que l'on rajoute au nombre précédent pour obtenir le nombre suivant. Il correspond donc à la somme de tous les nombres de notre tableau.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= (n+1)(n+1)(n+1)\\ &= (n^2+2n+1)(n+1)\\ &= n^3+3n^2+3n+1\end{aligned}$$

Prenons notre tableau, et surtout la partie utilisée pour le carré de côté n.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2n-1 | 2n-2 | 2n-3 | ... | 2n-n |
| 2n-2 | 2n-3 | 2n-4 | ... | 2n-(n+1) |
| 2n-3 | 2n-4 | 2n-5 | ... | 2n-(n+2) |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 2n-n | 2n-(n+1) | 2n-(n+2) | ... | 2n-(2n-1) |

Selon notre hypothèse de récurrence, les nombres du tableau additionnés font $n^3$. Mais comme nous sommes dans un carré de côté n+1, si on remplace tous les n par n+1, ce qui donne par exemple pour la première case 2(n+1)-1=2n+2-1 soit 2n-1+2
on constate ainsi qu'à chaque case on rajoute 2
on doit rajouter (2 x le nombre de cases), soit $2n^2$.
On obtient donc :

$$n^3 + 2n^2$$

Intéressons nous maintenant à la partie du tableau que nous ajoutons pour le carré de côté n+1.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 2(n+1)-(n+1) |
| | | | 2(n+1)-(n+2) |
| | | | ... |
| 2(n+1)-(n+1) | 2(n+1)-(n+2) | ... | 2(n+1)-2(n+1-1) |

Excluons pour l'instant la case tout en bas à droite. Il nous reste donc :

$$\begin{aligned}
& 2(n+1) - (n+1) = 2n+2-n-1 = n+1 \\
+ \; & 2(n+1) - (n+2) = 2n+2-n-2 = n \\
+ \; & 2(n+1) - (n+3) = 2n+2-n-3 = n-1
\end{aligned}$$

etc...

On a donc $\sum_{k=1}^{n} k$ le tout multiplié par 2 ( car on l'a à la verticale et à l'horizontale), ce qui donne :

$$\begin{aligned}
2 \text{ x } \sum_{k=1}^{n} k &= 2 \text{ x } n(n+1)/2 + 2(n+1) - 2\text{x}1 \\
&= n(n+1) + 2n - 2 \\
&= n^2 + n + 2n \\
&= n^2 + 3n
\end{aligned}$$

On rajoute cela à notre résultat de départ, on obtient :
$n^3 + 2n^2 + n^2 + 3n = n^3 + 3n^2 + 3n$

Intéressons-nous à la dernière case :

| |
|---|
| 2(n+1)-2(n+1-1) |

$2(n+1) - (2(n+1)-1) = 2n + 2 - (2n+2-1) = 2n + 2 - 2n - 2 + 1 = 1$

Ce qui nous donne :
$n^3 + 2n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$

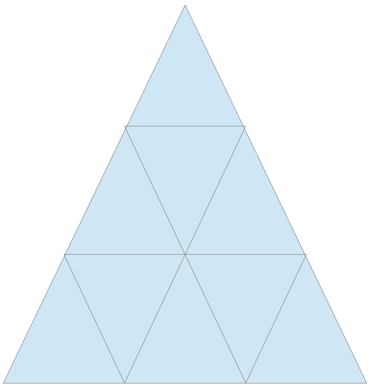
Notre hypothèse de récurrence est donc vérifiée ! (2)

## ***Les triangles :***

A présent, nous allons passer aux triangles. Le but reste le même : trouver une formule permettant de calculer rapidement le nombre de triangles dans un grand triangle de coté « n ».

Dans cet exemple, nous prenons un triangle de côté n=3, que nous nommons « BIG T ».
Nous avons d'abord compté à la main tous les triangles dans « BIG T », puis nous avons essayé d'appliquer aux triangles, la formule des carrés.

Pour commencer, combien comptez vous de triangles ?

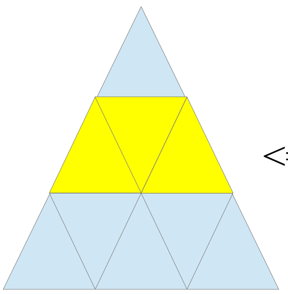


(BIG T)

- ☐ 10
- ☐ 13
- ☐ 15

/!\ ATTENTION, il y a aussi des triangles à l'envers !!! /!\
Après avoir appliqué la formule des carrés trouvée précédemment, nous avons constaté qu'elle ne fonctionnait pas dans le cas des triangles. Nous avons donc cherché d'autres méthodes.

Nous avons compté les triangles par lignes, en comptant séparément ceux à l'endroit de ceux à l'envers.



<= Ceci est une ligne.

En s'inspirant des carrés, nous avons créé des colonnes de chiffres. Pour ce triangle de coté 3, nous avons compté les triangles à l'endroit en bleu que nous appellerons « te » , et les triangles à l'envers en rouge appelés « ti ».

te : 1
2 1
3 2 1
6+3+1

ti :1
2
3

Ainsi, nous avons trouvé une formule qui permet de compter tous les triangles présents dans un grand triangle.

$$*te(n)= te(n-1)+\sum_{1}^{n} k$$

$$*ti(n)= ti(n-2)+\sum_{1}^{n-1} k$$

Cette formule repose sur le principe des triangles à l'endroit et l'envers. Cependant pour qu'elle fonctionne, il faut avoir une « base », c'est-à-dire qu'il faut avoir compté ou calculé précédemment les triangles dans les deux figures précédentes.

En théorie, la formule consiste à prendre un triangle de côté n. Pour calculer les triangles à l'endroit, il faut prendre le nombre de triangles à l'endroit de la forme précédente, soit « n-1 » à laquelle nous ajoutons la somme de 1 à n.
Ensuite, pour calculer les triangles à l'envers, il faut prendre le nombre de triangles à l'envers de deux figures précédentes et ajouter la somme de 1 à n-1.
Lorsque nous ajoutons ces deux résultats, nous obtenons le nombre de triangles présents dans un grand triangle.

Afin d'y voir plus clair, voici un exemple :
Nous prenons un triangle de coté n=4. Nous avons compté auparavant, les triangles à l'endroit et à l'envers des figures n=2 et n=3.

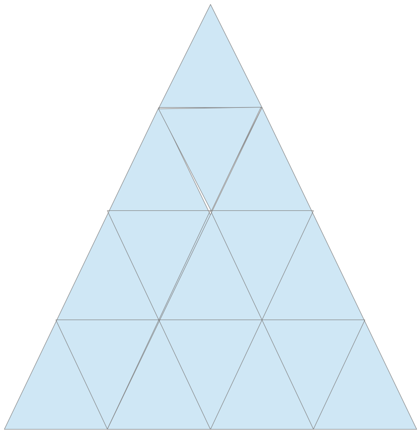
*te (4)= te (4-1) + $\sum_{1}^{3} k$

te ( 4) = 10+1
te (4) =20

*ti (4)= ti (4-2) + $\sum_{1}^{3} k$

ti (4) = 1+6
ti (4)= 7

te (4) + ti (4) = 27



Vous pouvez vérifier, il y a bien 27 triangles dans un triangle de côté 4.

## Notes de l'édition

(1) Plus précisément, la case (a,b) nous donne combien de *nouveaux* rectangles a*b apparaissent dans le carré de côté n par rapport au carré de côté n-1

(2) On aurait pu aussi faire un comptage direct avec une technique similaire: pour chaque paire d'entiers a,b entre 1 et n, il y a (n+1-a)(n+1-b) rectangles a*b dans le carré n*n.

En sommant sur tous les couples (a,b), cela donne $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Il est intéressant de voir que cette expression est égale à celle apparemment très différente, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ , trouvée par les élèves .