Neige Extraterrestre

Année 2015 - 2016

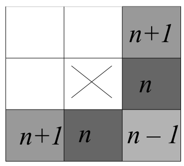
Elèves de 4ème : Idriss BENSAADA, Benoit COEUGNET, François DESLANDES, Mathis MITSOPOULOS, El Mehdi NFIFI.
Etablissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignant·e·s : Florence FERRY, Claudie ASSELAIN et Nicolas SEGARRA.
Chercheuse : Céline ABRAHAM, université Paris Sud 11.

Le sujet

Dans un quadrillage, un flocon se forme de la manière suivante :

- **on commence avec une seule cellule vivante dans une case.**
- **pour passer de la génération *n* à la génération *n + 1*, une nouvelle cellule naît si elle est adjacente horizontalement ou verticalement, mais pas en diagonale, à une seule cellule de la génération *n*.**

Par exemple, voici ci-contre le morceau d'un flocon à une étape n ; à l'étape $n+1$ suivante deux cellules vont se créer (notées $n+1$) sur le schéma) mais nous ne pourrons pas générer de cellule au niveau de la croix car elle est en contact avec deux cellules de la génération précédente.

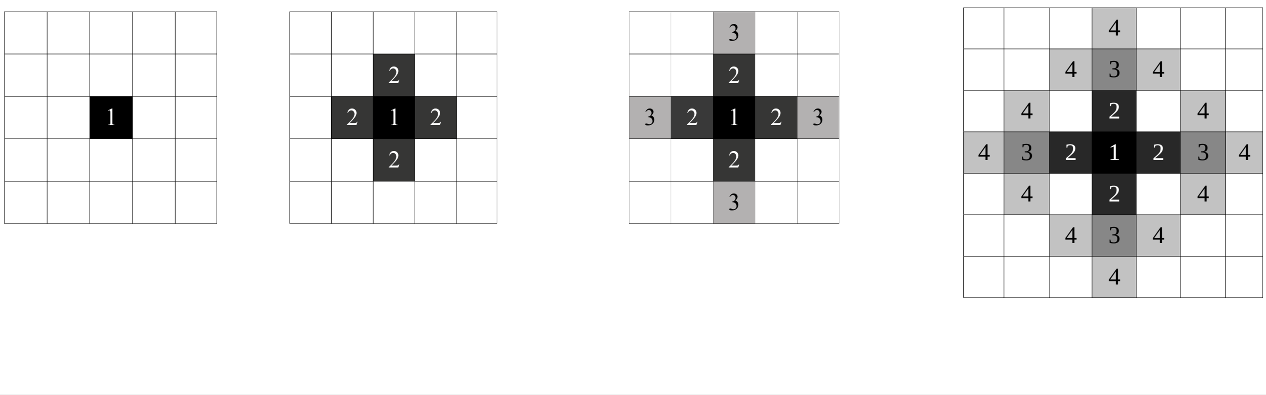


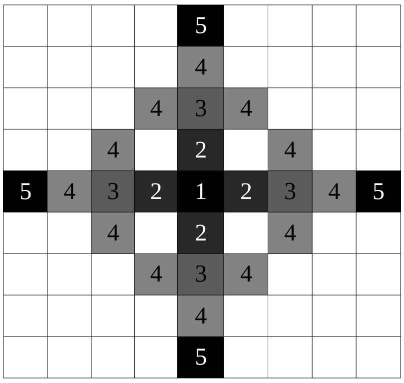
Questions : A quoi le flocon va-t-il ressembler au bout de plusieurs générations ? De combien de cellules sera-t-il constitué ?

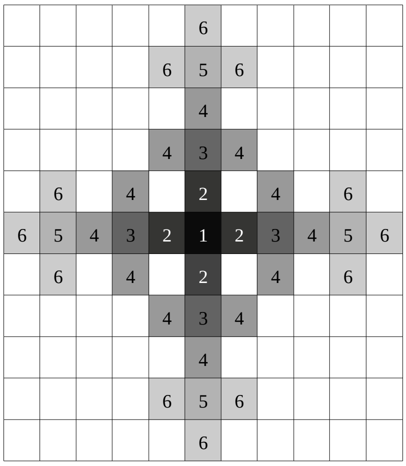
Nos résultats : Nous avons conjecturé la forme du flocon grandissant avec la formation de figures particulières à des étapes précises ainsi que le nombre de cellules créées aux étapes 2^n , 2^{n+1} et 2^{n+2} . Nous avons également essayé de trouver une conjecture sur le nombre de cellules créées à une étape donnée quelconque mais pas sur leur nombre au total. Nous avons ensuite regardé la formation d'un flocon sur un pavage triangulaire.

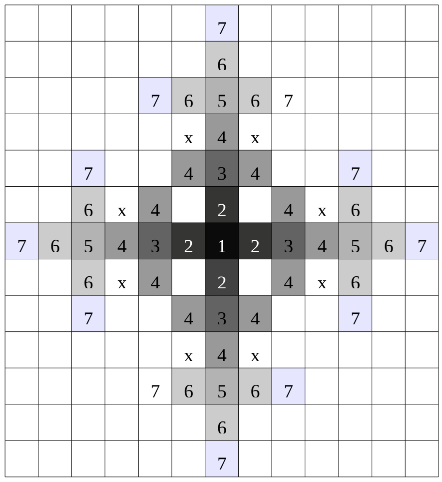
I – Premières constructions

Le nombre inscrit à l'intérieur des cellules correspond au numéro de l'étape.









Arrivés à cette étape 7 nous nous sommes rendu compte que deux solutions s'offraient à nous :
- soit nous continuions à générer des cellules toujours vers l'extérieur (sans revenir vers le centre)
- soit nous continuions à générer des cellules vers l'extérieur et vers l'intérieur quand ceci était possible.

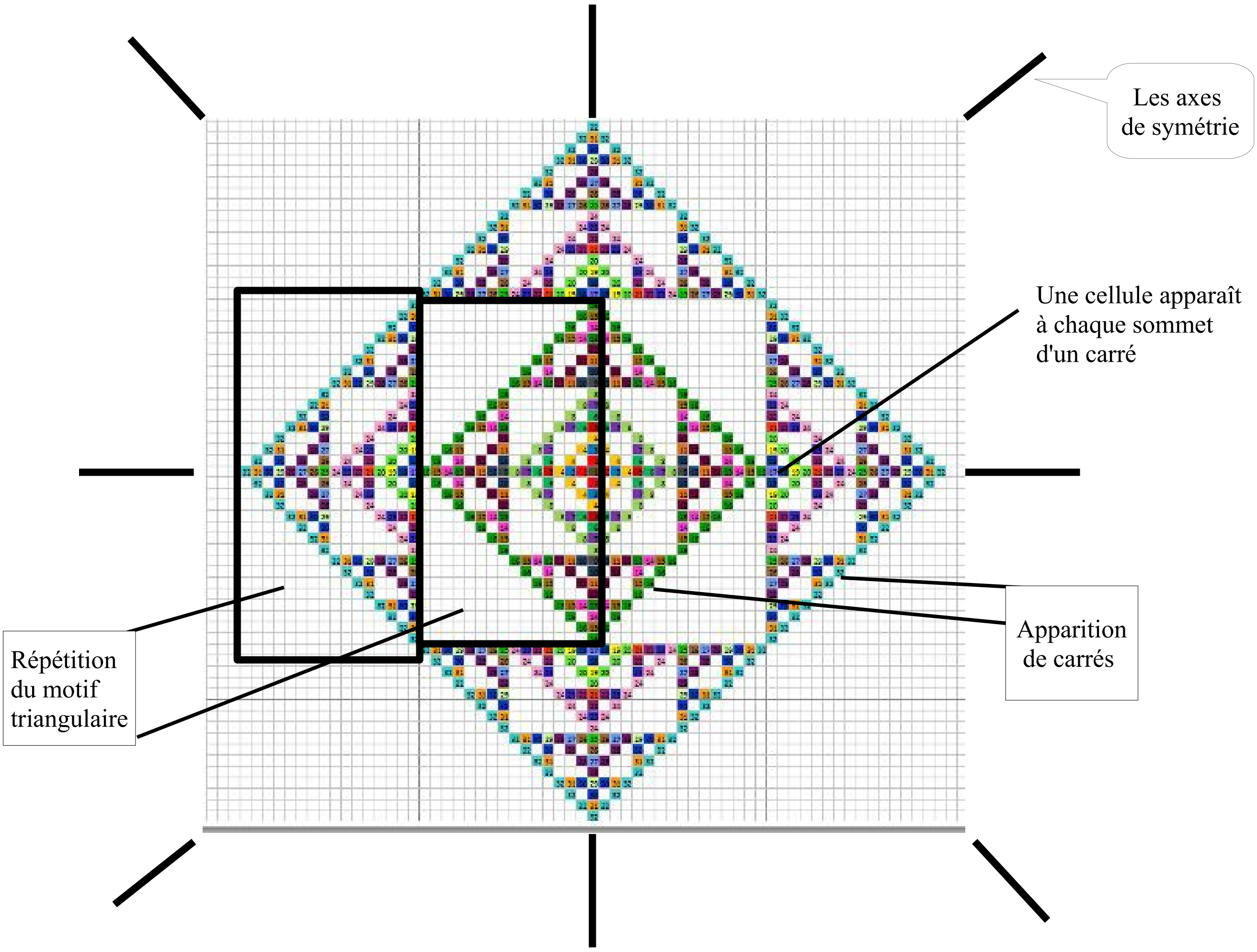
Dans la dernière image ci-dessus, les *x* correspondent aux cellules qui pourraient être remplies à l'étape 7 si on choisit de revenir vers l'intérieur. Nous allons donc étudier séparément ces deux cas de figure.

II – Création de cellules extérieures

Dans cette partie, nous traiterons le cas où les cellules se créent uniquement à l'extérieur de la figure déjà construite. Voici donc notre flocon formé à la génération 8 puis à la génération 32.

A la génération 32, nous commençons à observer des formes particulières du flocon et nous pouvons faire plusieurs remarques intéressantes :

- La figure possède quatre axes de symétries, nous pourrons donc par la suite n'étudier qu'un quart de la figure.
- Le motif semble se répéter à l'infini pour former une fractale.
- Des carrés apparaissent à certaines étapes que nous déterminerons ensuite (1).
- Le nombre de cellules sur le côté d'un carré est égal au numéro de la génération. Par exemple, le carré formé à la génération 16 a 16 cellules sur un de ses côtés.
- Entre un carré et son suivant (ou entre un triangle et son suivant) il y a un agrandissement de coefficient 2 (2).
- Après la formation d'un carré, seulement une cellule apparaît sur chaque sommet.



Nous cherchons maintenant à conjecturer le nombre de cellules créées à chaque étape et nous allons nous intéresser aux étapes de formation des carrés. Voici un tableau rempli au fur et à mesure de nos constructions. Les colonnes grisées sont celles correspondant à la formation d'un carré.

Etape n	1	$2 = 2^1$	3	$4 = 2^2$	5	6	7	$8 = 2^3$	9	10	11	12	13	14	15
Cellules ajoutées	1	4	4	12	4	12	12	28	4	12	12	28	12	28	28
Total cellules	1	5	9	21	25	37	49	77	81	93	105	133	145	173	201

Etape n	$16 = 2^4$	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Cellules ajoutées	60	4	12	12	28	12	28	28	60	12	28	28	60	28
Total cellules	281	265	277	289	317	329	357	385	445	457	485	513	573	601

Etape n	30	31	2^5	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
Cellules ajoutées	60	60	124	4	12	12	28	12	28	28	60	12	28	28	60	28	60	60
Total cellules	661	721	845	849	861	873	901	913	941	969	1029	1041	1069	1097	1157	1185	1245	1305

Etape n	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	2^6	65
Cellules ajoutées	124	12	28	28	60	28	60	60	124	28	60	60	124	60	124	124	252	4
Total cellules	1429	1441	1469	1497	1557	1585	1645	1705	1829	1857	1917	1977	2101	2161	2285	2329	2581	2585

Tout d'abord, on ne remarque aucune suite particulière sur le nombre total de cellules. En revanche, on remarque une suite sur le nombre de cellules ajoutées.

a) Etudions tout d'abord la formation des carrés

Les carrés se forment aux étapes 2^n où n est un entier strictement positif.
Observons le nombre de cellules ajoutées mais sur ¼ de la figure ; nous pouvons faire le tableau suivant :

Étape à la formation d'un carré	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
N° du carré	1	2	3	4	5	6
Nombre de cellules ajoutées sur 1/4 de la figure	$1=2^1-1$	$3=2^2-1$	$7=2^3-1$	$15=2^4-1$	$31=2^5-1$	$63=2^6-1$

Conjecture, généralisation :

Le numéro du carré correspond à la puissance de 2 du numéro de l'étape et le nombre de cellules ajoutées sur ¼ de la figure est le numéro de l'étape auquel on enlève 1.

Soit n un entier strictement positif, à l'étape 2^n, le n-ième carré apparaît et $4(2^n - 1)$ sont ajoutées au total. Par exemple, à l'étape 32 768 (2^{15}), le 15ème carré apparaît et 131 068 cellules sont ajoutées.

b) Etapes $2^n + 1$ et $2^n + 2$

A l'étape suivant la formation d'un carré, une cellule apparaît à chaque sommet, ce qui nous donnera toujours 4 cellules ajoutées aux étapes $2^n + 1$ avec $n > 0$.
A l'étape suivante, chaque cellule en donnera 3 nouvelles, ce qui nous donnera toujours 12 cellules ajoutées aux étapes $2^n + 2$ avec $n > 0$.
A l'étape encore d'après, et avec $n > 1$, chaque cellule ne donnera naissance qu'à une unique cellule ; ce qui nous donnera toujours 12 cellules ajoutées aux étapes $2^n + 3$ avec $n > 1$.

c) Et à l'étape *n* ?

Nous avons ensuite essayé de répondre au mieux au sujet et de trouver combien de cellules se forment à une étape quelconque.
Pour cela nous allons regarder de plus près la suite formée par les nombres de la deuxième ligne du tableau mais sur 1/4 de la figure pour que les nombres soient plus simples.

1 cellule au départ puis :
1
1-**3**
1-3-3-**7**
1-3-3-7-3-7-7-**15**
1-3-3-7-3-7-7-15-3-7-7-15-7-15-15-**31**
1-3-3-7-3-7-7-15-3-7-7-15-7-15-15-31-3-7-7-15-7-15-15-31-7-15-15-31-15-31-31-**63**

A chaque formation d'un carré (nombres en gras), nous allons à la ligne pour continuer.

Nous remarquons que chaque ligne (à partir de la deuxième), commence par les nombres écrits sur la ligne précédente et qu'ensuite il y a tous les nombres qui ont été rajoutés dans la ligne précédente par rapport à celle d'encore avant.

Par exemple la ligne 5 commence par tous les nombres de la ligne 4 (1-3-3-7-3-7-7-15) puis tous les nombres de la ligne 4 qui n'étaient pas dans la ligne 3 (3-7-7-15). Mais ensuite nous avons du mal à comprendre comment la suite se forme réellement.
Nous pouvons conjecturer la ligne suivante avec des nombres manquants :
1-3-3-7-3-7-7-15-3-7-15-7-15-15-31-3-7-7-15-7-15-15-31-7-15-15-31-15-31-31-63-3-7-7-15-7-15-15-31-7-15-15-31-15-31-31-63-?-?-?-?-?-?-?-?--15-31-31-63-31-63-63-**127**
Nous arrivons donc à prévoir le nombre de cellules ajoutées jusqu'à l'étape 112 (3).

On observe également que tous les nombres sont de la forme $2^n - 1$.
En effet on a : $7 = 2^3 - 1$; $15 = 2^4 - 1$; $63 = 2^6 - 1$... Nous avons donc eu l'idée d'écrire tous les nombres sous cette forme là pour voir si une suite plus facile apparaissait. Ce qui nous donne :
1 cellule au départ puis :
$\mathbf{(2^1-1)}$
$(2^1-1) - \mathbf{(2^2-1)}$
$(2^1-1) - (2^2-1) - (2^2-1) - \mathbf{(2^3-1)}$
$(2^1-1) - (2^2-1) - (2^2-1) - (2^3-1) - (2^2-1) - (2^3-1) - (2^3-1) - \mathbf{(2^4-1)}$
$(2^1-1) - (2^2-1) - (2^2-1) - (2^3-1) - (2^2-1) - (2^3-1) - (2^3-1) - (2^4-1) - (2^2-1) - (2^3-1) - (2^3-1) - (2^4-1) -$
$(2^3-1) - (2^4-1) - (2^4-1) - \mathbf{(2^5-1)}$

Ensuite, nous avons choisi de garder seulement les exposants du 2 ; en effet si nous avons l'exposant du 2, nous pouvons retrouver le nombre. Si l'exposant est 25, le nombre est $2^{25}-1$.

La suite des exposants étant écrite, nous les avons regroupés par 4 dès la cinquième étape :
1 cellule au départ puis :
1
1-**2**
(1-2-2-**3**)
(1-2-2-3) – (2-3-3-**4)**
(1-2-2-3) – (2-3-3-4) – (2-3-3-4) – (3-4-4-**5)**
(1-2-2-3) – (2-3-3-4) – (2-3-3-4) – (3-4-4-5) – (2-3-3-4) – (3-4-4-5) – (3-4-4-5) – (4-5-5-**6)**

On a donc fait une conjecture pour la ligne suivante, plus facile à trouver maintenant :
(1-2-2-3) – (2-3-3-4) – (2-3-3-4) – (3-4-4-5) – (2-3-3-4) – (3-4-4-5) – (3-4-4-5) – (4-5-5-6) –
(2-3-3-4) – (3-4-4-5) –(3-4-4-5) – (4-5-5-6) – (3-4-4-5) – (4-5-5-6) – (4-5-5-6) – (5-6-6-**7**)
Voici la ligne d'encore après en appliquant toutes les observations précédentes avec la conservation des suites précédentes :
(1-2-2-3) – (2-3-3-4) – (2-3-3-4) – (3-4-4-5) – (2-3-3-4) – (3-4-4-5) – (3-4-4-5) – (4-5-5-6) –
(2-3-3-4) – (3-4-4-5) –(3-4-4-5) – (4-5-5-6) – (3-4-4-5) – (4-5-5-6) – (4-5-5-6) – (5-6-6-**7**) –
(2-3-3-4) – (3-4-4-5) –(3-4-4-5) – (4-5-5-6) – (3-4-4-5) – (4-5-5-6) – (4-5-5-6) – (5-6-6-**7**) –
? ? ? ? - (6-7-7-**8**)

Nous sommes arrivés à conjecturer le nombre de cellules ajoutées jusqu'à l'étape 224 (4), ce qui est bien plus qu'avec la suite de nombres du départ, mais nous sommes bloqués ensuite. Mais nous essayons encore de simplifier cette suite pour aller encore plus loin.
Nous allons numéroter les blocs de 4 par leur premier élément ; ainsi pour le bloc 6-7-7-8, on mettra B6.

Le bloc B10 sera 10-11-11-12 ce qui donnera 2^{10}-1 ; 2^{11}-1 ; 2^{11}-1 ; 2^{12}-1. Ce qui donnera comme nombres : 1023, 2047, 2047, 4095.
Notre suite commence à l'étape 5 et devient :
B1
B1– B2
B1– B2 – B2 – B3
B1– B2 – B2 – B3 - B2 – B3 – B3 – B4

Nous remarquons que si nous ne regardons que les nombres, la suite est la même que celle des exposants.
Nous pouvons donc aller plus loin dans notre conjecture :
B1– B2 – B2 – B3 – B2 – B3 – B3 – B4 – B2 – B3 – B3 – B4 – B3 – B4 – B4 – B5
B1– B2 – B2 – B3 – B2 – B3 – B3 – B4 – B2 – B3 – B3 – B4 – B3 – B4 – B4– B5 –
B2 – B3 – B3 – B4 – B3 – B4 – B4 – B5 – B3 – B4 – B4 – B5 – B4 – B5 – B5– B6
B1– B2 – B2 – B3 – B2 – B3 – B3 – B4 – B2 – B3 – B3 – B4 – B3 – B4 – B4 – B5 –
B2 – B3 – B3 – B4 – B3 – B4 – B4 – B5 – B3 – B4 – B4 – B5 – B4 – B5 – B5 – B6 –
B2 – B3 – B3 – B4 – B3 – B4 – B4 – B5 – B3 – B4 – B4 – B5 – B4 – B5 – B5 – B6 ...

Nous sommes arrivés maintenant à l'étape 448 (5).
Par exemple à l'étape 444, c'est la fin d'un bloc B5 donc c'est le nombre « 7 », ce qui nous donne
$2^7 – 1$ =127 cellules ajoutées sur ¼ de la figure soit 508 cellules ajoutées en tout.

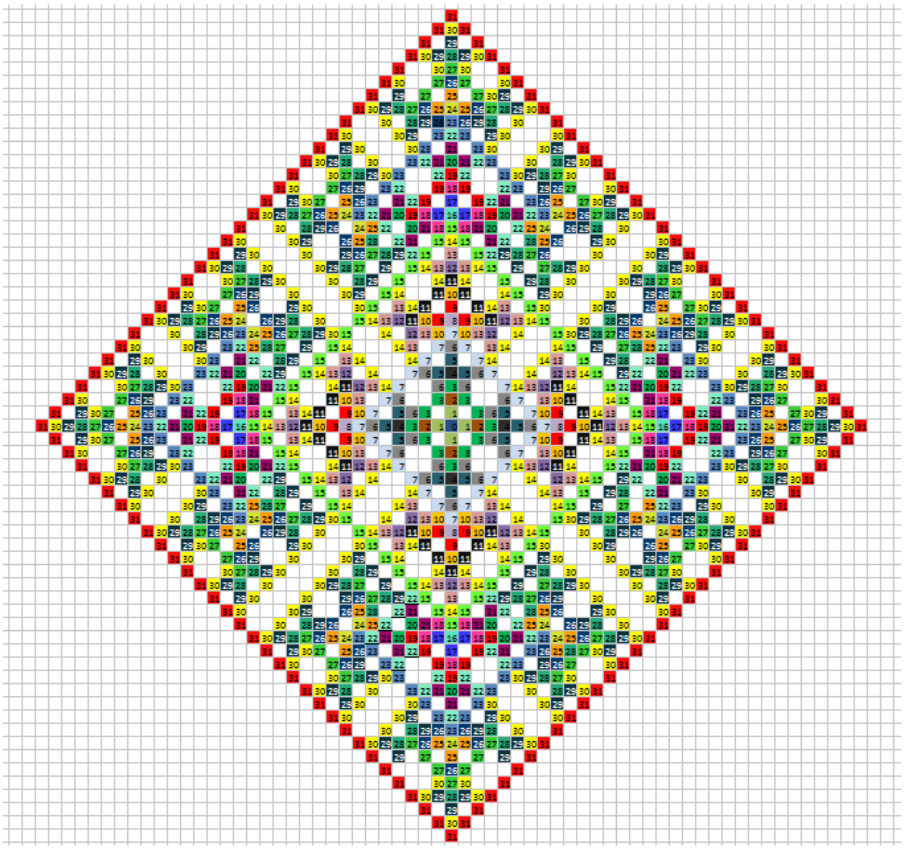
Nous pouvons continuer ainsi : si on reprend les blocs, à partir de la troisième ligne, qu'on les met par 4 en ne gardant que les nombres, on retrouve la même suite. Nous pouvons renommer les blocs puis ne garder que les numéros des blocs.

(1-2 -2-3)
(1-2 -2-3) – (2-3-3-4)
(1-2 -2-3) – (2-3-3-4) – (2-3-3-4) – (3-4-4-5)
(1-2 -2-3) – (2-3-3-4) – (2-3-3-4) – (3-4-4-5) – (2-3-3-4) – (3-4-4-5) – (3-4-4-5) – (4-5-5-6)
etc...
Nous pouvons donc continuer indéfiniment et aller aussi loin que l'on veut. Cela reste tout de même difficile au bout d'un moment de s'y retrouver et de revenir en arrière (6).

Nous allons reprendre maintenant notre étude du flocon lorsque nous créons des cellules également à l'intérieur.

III – Création de cellules extérieures et intérieures

Dans cette partie, nous créons des cellules partout où cela est possible, du moment que celles-ci ne touchent qu'une seule cellule créée à l'étape précédente.
Voici ce que nous obtenons à l'étape 32 (sur la figure suivante, il y a marqué 31 sur les dernières cellules car nous avons démarré à 0, c'est donc bien l'étape 32).



Remarques :

- On retrouve la formation de carrés avec un agrandissement de rapport 2 entre l'un et son suivant.
- Ces formations de carrés surviennent encore aux étapes 2^n.
- La figure possède encore quatre axes de symétrie, nous pourrons donc par la suite n'étudier qu'un quart de la figure.
- Le motif semble se répéter à l'infini pour former également une fractale.
- Le nombre de cellules sur le côté d'un carré est égal au numéro de la génération. Par exemple, le carré formé à la génération 16 a 16 cellules sur un de ses côtés.
- Après la formation d'un carré, seulement une cellule apparaît sur chaque sommet ; cette cellule en donnera 3 à l'étape suivante.
- On constate une apparition de deux « allées blanches » perpendiculaires coupées uniquement par les carrés.

L'étude des carrés est donc la même que dans la partie II.
Il faut étudier le nombre de cellules créées à une étape quelconque, observer s'il y a une suite.

Etape	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Cellules ajoutées	1	4	4	12	4	12	12	36	4	12	20	28	20	44	68	60	4	12	20
Total cellules	1	5	9	21	25	37	49	85	89	101	121	149	169	213	281	341	345	357	377

Etape	20	21	22	23	24
Cellules ajoutées	28	20	44	60	76

Total cellules	405	425	469	529	605

Après avoir continué ce tableau, nous n'avons observé aucune suite particulière sur le total des cellules. Regardons la suite des cellules ajoutées sur 1/4 de la figure à partir de l'étape 2 (en gras, les étapes de formations de carrés :

1
1 – **3**
1 – 3 – 3 – **9**
1 - 3 – 5 – 7 – 5 – 11 – 17 – **15**
1 – 3 – 5 – 7 – 5 – 11 – 15 – 19 …

Les nombres ne sont plus de la forme $2^n – 1$. Il semble y avoir une suite mais nous n'avons pas réussi à la trouver, à comprendre vraiment comment elle se construit.

IV – Programmation

Comme faire les figures à la main était très long, on a eu l'idée d'écrire un programme sur Excel pour construire la figure à notre place. Nous avons mis une partie de ce programme avec quelques commentaires. Pour le démarrer, on rentre le nombre d'étapes souhaité et le programme construit le flocon en coloriant des cases. Nous avons réussi à construire un flocon avec 2048 générations.

```
Dim Centre
Sub Main()
  valeurInit = 1
  limite = 64
  Centre = limite + 40
  Application.ScreenUpdating = True

  ActiveWindow.Zoom = 30
  Call Clear

   With Cells(Centre, Centre)
     .Value = valeurInit
     .Select
   End With

   Range("AH2:BC13").Merge
   Range("AH2:BC13").Select
   ActiveCell.Font.Size = 72

   For valeur = valeurInit + 1 To limite
     Range("AH2:BC13").Value = valeur
     Application.ScreenUpdating = True
     Application.ScreenUpdating = False
     debut = Centre
     For l = Centre - valeur + 1 To Centre
       debut = debut - 1
       For c = debut To Centre
         If Cells(l, c) = valeur - 1 Then
           Call ExploreE(l, c + 1, valeur)
           Call ExploreN(l - 1, c, valeur)
           Call ExploreO(l, c - 1, valeur)
           Call ExploreS(l + 1, c, valeur)
```

- « Centre » correspond à la ligne et à la colonne de la cellule centrale.
- « valeurInit » sert juste à définir le numéro correspondant à la première génération de cellules.
- « Centre = limite + 40 » : on calcule la position de la première cellule en fonction de la limite saisie.
- « Application.ScreenUpdating = True » : On désactive la mise à jour de l'affichage automatique pour améliorer les performances.
- « ActiveWindow.Zoom = 30 » : On choisi le zoom de la feuille où sera construite la figure.

- On explore l'Est, Le Nord, L'Ouest et le Sud pour savoir si on va pouvoir générer les générations futures.

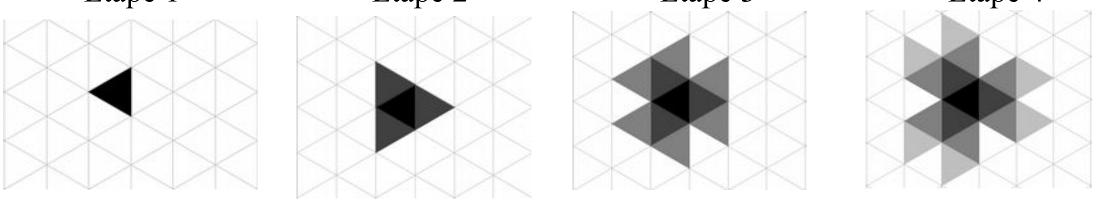
(7)

V – Extension du sujet

Nous allons maintenant nous intéresser à un pavage triangulaire avec les mêmes conditions de création de cellules et nous reprenons notre étude de la forme du flocon et du nombre de cellules ajoutées ou total à l'étape *n*. Nous avons étudié le cas des cellules créées à l'extérieur et à l'intérieur de la figure, car si on ne revient pas en arrière l'étude n'est pas intéressante ; en effet si on continue uniquement vers l'extérieur, à partir de la deuxième étape, on ne crée plus qu'une cellule par branche c'est à dire 6 cellules au total à chaque étape.

Premières étapes :

Étape 1 Étape 2 Étape 3 Étape 4



Étape 5 Étape 6 Étape 7

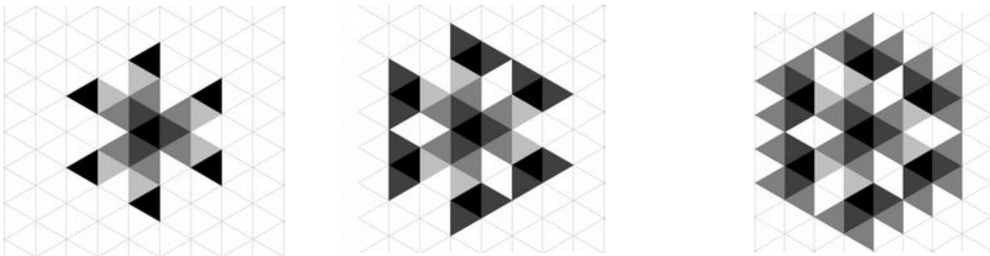


Tableau récapitulatif :

Étapes *n*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nombre de cellules ajoutés	1	3	6	6	6	12	18	12	6	12	24	36	30	30	42
Total cellules	1	4	10	16	22	34	50	64	70	82	106	142	172	202	238

Étapes *n*	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Nombre de cellules ajoutés	24	6	12	24	36	36	48	72	72	48	48	72
Total cellules	268	274	286	310	346	382	430	502	474	622	670	742

<u>Certains phénomènes sont les mêmes que pour les carrés</u> :

- À partir de $n = 3$, à chaque étape, on ajoute un nombre de cellules multiple de 6 ; la figure possède 6 axes de symétrie (au lieu de 4 pour le pavage carré), ce qui nous permettra d'étudier les phénomènes sur 1/6 de la figure uniquement.
- Aucune suite apparente sur le nombre total de cellules par contre il semble qu'une suite apparaisse sur la deuxième ligne. Nous regarderons de plus près cette suite après.
- Les motifs se répètent à l'infini et nous obtenons encore une fractale.
- A des étapes bien précises, des hexagones réguliers se forment (ils sont indiqués par des colonnes grisées dans le tableau).
- Le nombre de cellules sur le côté d'un hexagone créé à l'étape *n* est égal à $(n+1)/2$. Par exemple, l'hexagone formé à la génération 7 a $(7+1)/2=4$ cellules sur un de ses côtés ; à l'étape 63 il y aura 32 cellules sur le côté d'un hexagone.

a) Etudions d'abord la formation des hexagones

Les hexagones semblent se former aux étapes : 3, 7, 15… c'est à dire aux étapes $2^n - 1$, avec $n > 0$.
Avec un flocon que nous avons construit assez loin, nous avons relevé les résultats suivants :

Étape *n*	3 ou 2^2-1	7 ou 2^3-1	15 ou 2^4-1	31 ou 2^5-1	63 ou 2^6-1	127 ou 2^7-1
Hexagone n°	1	2	3	4	5	6
Cellules ajoutées sur 1/6 de la figure	1	3	7	15	31	127
Nombre de cellules sur un côté	2	4	8	16	32	64

Conjecture, généralisation : sur 1/6 de la figure : à l'étape 3 1 cellule se crée puis à l'étape $2^n - 1$, avec n >2 , $2^{n-1} - 1$ cellules se créent.

b) Etapes suivant la formation des hexagones

Après la formation des hexagones, 3 paquets du nombre de cellules sur un côté de l'hexagone sont créés puis à l'étape suivante, 6 cellules au total sont créées, chacune en donnera 2 à l'étape suivante donc 12 au total.

c) Et à l'étape n ?

Nous avons ensuite essayé de trouver combien de cellules se forment à une étape quelconque. Pour cela, nous allons regarder de plus près la suite formée par les nombres de la deuxième ligne du tableau mais sur 1/6 de la figure pour que les nombres soient plus simples.

Nous allons écrire la suite formée par les cellules ajoutées sur 1/6 de la figure. Nous allons à la ligne à chaque fois qu'un hexagone se crée, nous mettons le nombre correspondant en gras.
On démarre à l'étape 3 :

1
1 – 1 – 2 – **3**
2 – 1 – 2 – 4 - 6 – 5 – 5 – **7**
4 – 1 – 2 – 4 - 6 – 6 – 8– 12 – 12 – 8 – 8 – 12 … – **15**

Remarque : La suite n'est pas aussi régulière que pour les carrés et nous n'avons pas pu trouver comment la construire.
Nous remarquons tout de même une particularité sur le nombre de cellules créées après la formation des hexagones :
à partir de la seconde ligne, on double chaque premier nombre de la ligne pour obtenir le premier nombre de la ligne suivante.
Cellules créées sur 1/6 de la figure à l'étape suivant la formation des hexagones :

Étape 2^2 : $1 = 2^0$ cellule créée — Étape 2^3 : $2 = 2^1$ cellules créées
Étape 2^4 : $4 = 2^2$ cellules créées — Étape 2^5 : $8 = 2^3$ cellules créées

Généralisation : à l'étape $\mathbf{2^n}$, avec n>2, on aura : $\mathbf{6 \times 2^{n-2}}$ cellules créées.

Conclusion : Nous avons trouvé des conjectures et nous avons partiellement répondu au sujet, mais n'avons malheureusement pas su les démontrer.
Pour le pavage carré, nous pensons savoir trouver le nombre de cellules ajoutées à une étape donnée ainsi que la forme du flocon. Par contre pour le pavage triangulaire nous ne pouvons donner le nombre de cellules ajoutées que sur des étapes particulières.

Notes d'édition

(1) On peut observer la formation de plusieurs carré sur la figure. Les propriétés observées se réfèrent aux carrés penchés dans la figure.

(2) Pour les carrés penchés, tous les côtés sont multipliés par 2 tandis que, pour les triangles isocèles, seuls les côtés égaux sont multipliés par 2. Le dernier côté passe d'une longueur à k à une longueur $2k+1$.

(3) En supposant la conjecture sur la septième ligne vraie, il est possible d'atteindre l'étape 112 : la cellule de départ et 63 étapes suivantes (les 6 lignes observées) auxquelles on ajoute les 32 étapes de la 6ème ligne et les 16 nouvelles étapes de la 6ème ligne. On a du mal cependant à saisir, à partir des éléments fournis comment les numéros à la fin de la 7ème ligne ont été conjecturés (à l'exception du dernier).

(4) Les nombres obtenus au-delà de l'étape 112 n'ont pas été motivés (cf. note précédente).

(5) À partir d'une conjecture précédente, les 112 premières étapes ont été établies (la cellule de départ et les 111 étapes suivantes). Dans cette nouvelle conjecture, ces 111 étapes ont été appliqués à des blocs de 4 chiffres qui donnent 444 étapes auxquels il faut ajouter les 4 premières étapes (non couverte par la notation en bloc). Ce qui donne bien 448 étapes.

(6) Il aurait été intéressant d'expliquer la procédure à suivre pour atteindre une étape n très grande (par exemple $n = 4 \times 448 + 1$). Par ailleurs ces résultats soulèvent plusieurs questions :

- Comme cette méthode permet de calculer le nombres de cellules ajoutées jusqu'à une étape quelconque, ne - serait-il pas possible de déduire le nombre de cellules crées au total ?

- Cette mystérieuse propriété de blocs qui se reproduisent indéfiniment n'aurait-elle pas un lien avec la structure fractale de la figure ?

(7) Dans l'extrait de code présenté, le programme ne génère que le quart en bas à gauche de la figure. À chaque étape (variable « valeur »), l'algorithme ne teste que les cases distantes du centre d'un nombre de cases égal, au maximum, à l'étape en cours. Il aurait été intéressant de motiver un tel choix. Par ailleurs, l'édition regrette que l'algorithme soit tronqué car on ne voit pas comment les autres éléments de la figure sont produits.