Pile et face en solitaire

Fabien LE MANACH, Alexandre POLONI

élèves de 2de, Lycée Pape Clément à Pessac
Enseignants: Mme DELMAIRE, Mme RANSON M. PRIVAT
Chercheurs: Paul DORBEC, Eric SOPENA (LaBRI, Bordeaux)

Sujet

On considère une rangée de *k* pièces, qui peuvent être côté pile ou côté face. Voici par exemple une rangée de cinq pièces : PFFFP.

À chaque coup, on doit retirer une pièce F et retourner les pièces immédiatement voisines (s'il y en a). On cherche naturellement à retirer toutes les pièces de la rangée. Voici une séquence de coups qui permet de supprimer toutes les pièces de la rangée de l'exemple précédent (la pièce retirée est soulignée) :

PFFFP → F-PFP → --PFP → --F-F →
→ --F-F → ----F → -----

La configuration PFFFP est donc *gagnante*.

On remarque dans la séquence précédente que les pièces peuvent avoir 0, 1 ou 2 pièces voisines.

Problématique. La question naturelle est alors la suivante : peut-on caractériser les rangées gagnantes (c'est-à-dire celles que l'on peut complètement vider) ?

[Que devient le problème si à chaque coup on reforme une rangée unique en resserrant les pièces]

Mots-clés

PILE, FACE, SOLITAIRE, RETOURNEMENT, MOT, PARITÉ, LANGAGE

I - Résolution du problème initial

Définition 1. Une configuration est dite *gagnante* si l'on peut retirer toutes les pièces de la rangée. Dans le cas contraire, elle est dite *perdante*.

Théorème 1.

Si dans la rangée de départ il y a un nombre impair de F *alors elle est gagnante.*

Preuve.

En effet, il suffit de partir d'un côté, de retirer le premier F que l'on rencontre puis de continuer du même côté en renouvelant l'opération autant de fois que nécessaire. [Il se peut que le retrait crée un vide et coupe la rangée courante en deux morceaux , en fait l'opération décrite doit être renouvelée sur chacun des morceaux restant ... et il reste à s'assurer que chaque morceau de rangée comporte encore un nombre impair de F.]

Nous avons vu sur des exemples (mais sans arriver à le montrer dans le cas général) que quel que soit le nombre impair de F au départ (nombre supérieur ou égal à 3), on arrivait toujours à une configuration [un morceau de rangée] avec trois F, par exemple une comme celle-ci : PFFPPFP

[Chaque rangée avec 3F pourra ensuite être vidée complètement en suivant la méthode indiquée; voici le traitement de l'exemple] pour comprendre le principe:

3F	PFFPPFP
1F et 1F	F-PPPFP
1F	--PPPFP
1F et 1F	--PPF-F
1F et 1F	--PF--F
1F et 1F	--F---F
1F	------F

Remarque. *Si dans la rangée de départ il y a un nombre pair de F alors elle est perdante*. [**Conjecture**]

II - Variante [avec resserrement]

Nous nous intéressons maintenant à une variante qui consiste à resserrer les pièces dès qu'un trou est créé. De cette façon, les pièces aux extrémités n'ont qu'une seule voisine alors que toutes les autres en ont deux. En voici un exemple :

PFFFP → FPFP → FFP → PF → F

et la rangée est à nouveau gagnante, comme dans le problème initial ! Mais en est-il toujours ainsi ?...

Théorème 2. Simplification des PP

[Pour la variante avec resserrement], une rangée contenant deux P *consécutifs est gagnante si et seulement si la rangée dans laquelle on a supprimé ces deux* P *est gagnante.*

Ce théorème a alors pour conséquence qu'on peut « effacer » les séquences de P de longueur paire et ne garder qu'un seul P pour les séquences de P de longueur impaire.

Démonstration. (*n* et *k* étant des entiers naturels)

Il suffit de montrer qu'une rangée constituée d'une suite de *n* P, d'un F et d'une suite de *k* P se ramène à une rangée presque identique à la différence que la suite de P du début est diminuée de deux P.

$$P_n\underline{F}P_k \rightarrow P_{n-1}\underline{F}FP_{k-1} \rightarrow P_{n-2}FP_k$$

[Le raisonnement est encore valable dans les cas où d'autres pièces précèdent ou suivent la portion $P_n\underline{F}P_k$ considérée ; il prouve que si $P_{n-2}\underline{F}P_k$ est gagnant, avec $k \geq 1$, alors $P_n\underline{F}P_k$ aussi. La réciproque reste à démontrer.

Tableau récapitulatif des résultats trouvés :

Dans le tableau suivant, la notation suivante a été adoptée :

Notation P : nombre de P impair
rien : nombre de P pair

Rangées	gagnantes	perdantes
avec un F	F FP (ou PF)	PFP
avec deux F	FFP PFFP PFPF	FF FPF PFPFP
avec trois F	FFF PFFFP PFPFFP FFPF FFPFP PFPFPF	FFFP PFFF FPFFP PFPFPFP
[quelques résultats additionels]	PFPFF FPFF FPFPF FPFPFP PFFPFP	PFFF PFFPF

Conclusion

Nous pensons avoir résolu le problème posé par notre chercheur, [le problème posé par la variante avec resserrement restant partiellement ouvert].

Lors de notre exposé au congrès, on nous a posé la question si nous avions envisagé de disposer les pièces de manière circulaire et fermée, chaque pièce ayant ainsi toujours deux voisines. C'est une variante sur laquelle nous n'avons pas encore réfléchi et qui peut être intéressante.

***