LE PING-PONG

Année 2013-2014

Solenn CABON, Anna DE GIVRY, Laure LAMOTHE, Audrey MARTIN, Clémence MAZET--BOURGADE, **élèves** de 5ème

Encadrés par Mmes CARTIGNY et DELONCLE (Castanet)

Alexis ARELLANO , Jules GARREAU , Clémence ROUS**, élèves** de 6ème , Chloé LAFORGUE Kinnie SALAÜN **élèves** de 5ème

Encadrés par Mmes LAFRANCE et ROCHE (Saint-Orens)

Etablissements : Collège Jean Jaurès de Castanet-Tolosan (31)

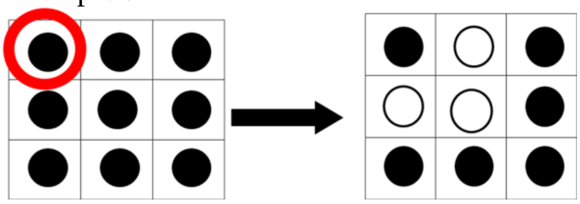
et Collège Jacques Prévert de Saint-Orens-de-Gameville (31).

Chercheur : Yohann GENZMER de l'IMT Toulouse

1) Sujet

Sur un plateau de taille variable (*x* lignes et *n* colonnes), on dispose sur chaque case un jeton dont une face est noire et une face est blanche. Initialement, on dispose les jetons face noire. Chaque fois que l'on désigne un jeton, on retourne tous ses jetons voisins mais pas le jeton désigné.

Exemple :



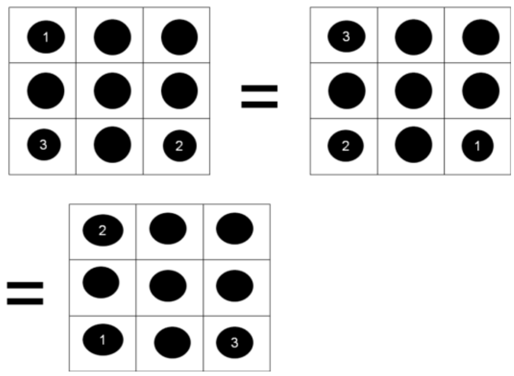
Peut-on, au bout d'un nombre quelconque d'opérations, obtenir que tous les jetons du plateau soient sur la face blanche ?

2) Règles

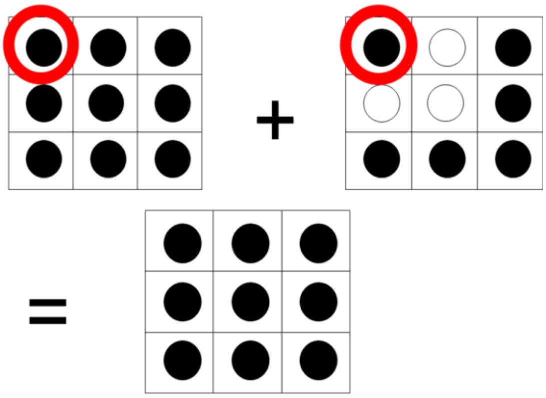
Au cours de notre recherche, nous avons trouvé des « règles » pour la faciliter :

Règle n°1 : Pour que la combinaison marche, il faut que chaque jeton soit retourné un nombre impair de fois. Autrement dit, il faut qu'il y ait un nombre impair de cases sur lesquelles on appuie, autour de chaque case. En effet, lorsqu'un jeton est retourné un nombre impair de fois, la couleur de la face visible change (exemple : trois fois : noir → blanc → noir → blanc). Alors que si un jeton se retourne un nombre pair de fois, la couleur de la face visible ne change pas (exemple : deux fois : noir → blanc → noir).

Règle n°2 : L'ordre dans lequel on désigne les jetons n'a pas d'importance. En effet, les jetons adjacents aux jetons désignés se retourneront le même nombre de fois même si l'ordre change et donc, dans tous les cas, la position finale est la même.

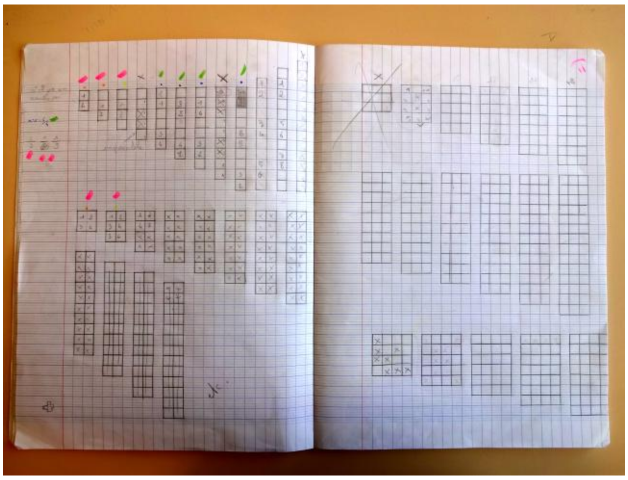


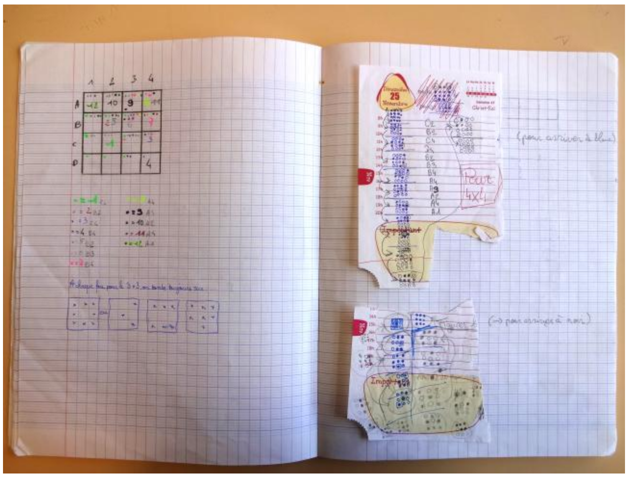
Règle n°3 : Il est inutile d'appuyer plusieurs fois sur la même case. En effet, si on désigne un nombre pair de fois le même jeton, alors tous les jetons des cases adjacentes se retourneront un nombre pair de fois et la couleur de leur face visible finale ne changera pas de celle initiale ; les combinaisons s'annulent.



3) Résultats

Notre cahier de recherche : essais de plateaux :





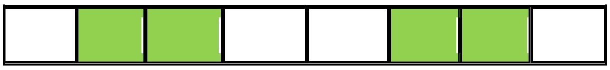
Voici les résultats de nos recherches :

a) **Cas d'un plateau de 1 ligne*_n_ colonnes** (1)

Cas du 4k

Si le nombre de cases du plateau est égal à un **multiple de 4** (4k), alors il faut **commencer par** appuyer sur **les cases 2 & 3**, **en laisser deux** (ne pas appuyer sur 4 & 5), appuyer sur 6 & 7, en laisser deux (8 & 9), …

Les cases vertes sont celles sur lesquelles on appuie.



Cas du 4k+1

Si le nombre de cases du plateau est égal à un **multiple de 4 + 1** (4k+1)**,** alors **le jeu est impossible**.

Cas du 4k-1 et du 4k-2

Si le nombre de cases du plateau est égal à un **multiple de 4 --1 ou un multiple de 4 –2** (ou 4k+2 et 4k+3, ça revient au même), alors il faut **commencer par** appuyer sur **les cases 1 & 2**, **en laisser deux** (ne pas appuyer sur 3 & 4), appuyer sur 5 & 6, en laisser deux (7 & 8), …

Explications et démonstrations

Pour que la combinaison marche, dans le plateau 1*n, il faut que chaque case touche **seulement 1 case sur laquelle on appuie** (seul nombre impair possible puisque le nombre maximum de cases touchées est 2**)**. Pour cela, il faut que la combinaison soit (touche = appuie):

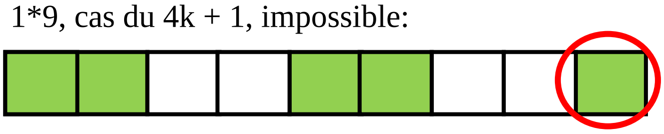
- touche ; touche ; touche-pas ; touche-pas ; touche ; touche ; touche-pas ; touche-pas ; …

Ou alors :

- touche-pas ; touche ; touche ; touche-pas ; touche-pas ; touche ; touche ; ...

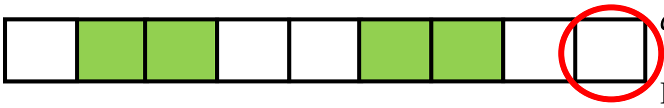
Schéma (les cases vertes sont celles où on appuie)

1*9, cas du 4k + 1, impossible:



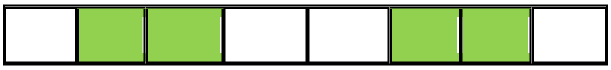
Aucune case (= 0 case = nb pair) où on appuie ne touche cette case

Ou



Aucune case (= 0 case = nb pair) où on appuie ne touche cette case

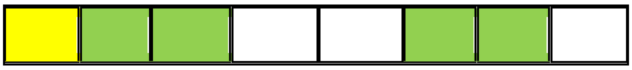
1*8, cas du 4k, possible en partant de 2 & 3 :



Toutes les cases touchent une case où on appuie.

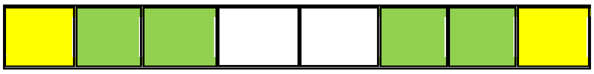
1*7 et 1*6, cas des 4k-1 et 4k-2, possible en partant de 1 & 2 :

1*7 : Si on enlève la première case au 1*8, ça marche toujours et on appuie sur les mêmes cases sauf que leur nom change (au lieu de 2 & 3 ça devient 1 & 2).



Case enlevée au plateau 1*8

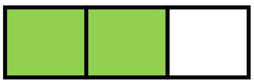
1*6 : Et si on enlève encore une case au 1*7, la dernière, ça marche et la combinaison reste la même.



Case enlevée au plateau 1*8 case enlevée au plateau 1*7

<u>Attention, toute les combinaisons (enfin, le cas du 4k – 1 parce que les autres ont une symétrie) marchent aussi à l'envers puisque c'est comme si on retournait le plateau.</u>

<u>Exemple du cas du 1*3 :</u>



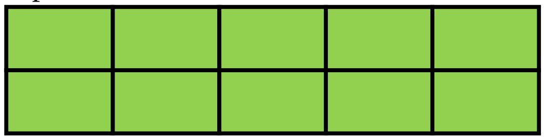
Appuie ; appuie ; appuie-pas
ou appuie-pas ; appuie ; appuie

b) <u>Cas d'un plateau de 2 lignes * *n* colonnes</u>

<u>Solution</u>

*Pour tous les plateaux 2*n (quel que soit le nombre de colonnes, s'il y a 2 lignes), la solution est d'appuyer sur toutes les cases l'une après l'autre dans n'importe quel ordre.*

Exemple :



<u>Explication et démonstration</u>

En fait, cette règle est possible tout simplement parce que dans les 2*n, toutes les cases ont un nombre impair de voisines (5 ou 3) :

Exemple du 2*8 :

3	5	5	5	5	5	5	3
3	5	5	5	5	5	5	3

c) <u>Bilan des solutions trouvées</u>

Les solutions non-montrées sont celles que nous n'avons pas encore trouvées.
Nous pensons qu'il peut exister plusieurs solutions pour un même plateau.

1. <u>Les plateaux 1*n:</u> *voir paragraphe a).*

2. <u>Les plateaux 2*n :</u> *voir paragraphe b).*

Les essais dans notre cahier de recherche.

3. <u>Les plateaux 3*:</u>

3*1, 3*2: *voir précédemment.*

3*3: IMPOSSIBLE
Après de nombreux essais pour résoudre le plateau 3*3, nous avons fait l'hypothèse qu'il était impossible. Nous avons donc dû le démontrer.

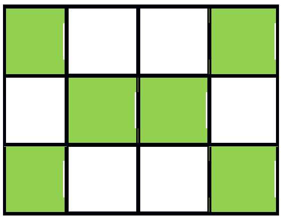
Pour cela nous avons commencé par montrer qu'il était inutile de toucher deux fois le même jeton car on retourne deux fois les jetons autour : cela fait comme si l'on n'avait pas touché ce jeton.

Nous avons ensuite démontré qu'il fallait toucher obligatoirement tous les jetons du plateau pour pouvoir tous les retourner. Pour cela, nous avons fait toutes les combinaisons possibles pour le plateau 2x2 : certaines combinaisons sont éliminées par symétrie. Nous avons constaté que seules les combinaisons où l'on touchait tous les jetons étaient possibles.(2)

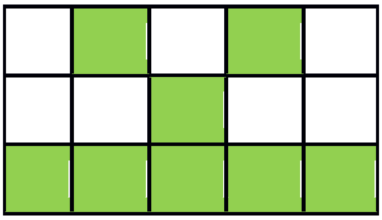
Pour finir la démonstration, nous nous sommes aperçus que pour qu'un plateau soit possible, il faut que tous les jetons soient retournés un nombre impair de fois. Or dans un plateau 3x3, dans toutes les combinaisons où tous les pions sont touchés une fois, le pion du milieu est retourné 8 fois. Et 8 est un nombre pair, donc ce jeton reste de la couleur initiale.

Les cases vertes sont celles où on appuie.

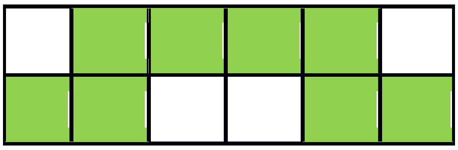
3*4:



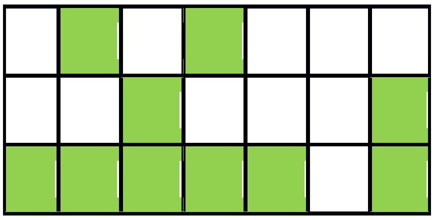
3*5:



3*6:



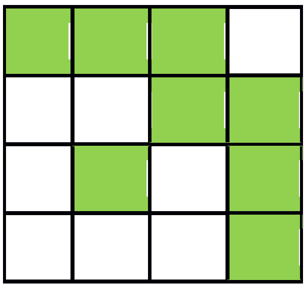
3*7:



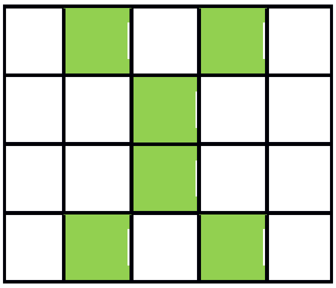
4. <u>Les plateaux 4*n</u> :

4*1, 4*2 , 4*3 : *voir précédemment.*

4*4:



4*5 :



5. <u>Les plateaux 5*n</u>

5*1, 5*2, 5*3, 5*4 : *voir précédemment.*

5*5 : IMPOSSIBLE

6. <u>Les autres plateaux</u>

Pour tous les n*1 et n*2 : *voir précédemment.*

Pour 6*3, 6*4, 7*3, 7*4: *voir précédemment.*

Pour tous les n*n (**l**ongueur = **L**argeur), avec n = un **nombre** entier **impair :** IMPOSSIBLE.

Pour tous les n*n (**l**ongueur = **L**argeur), avec n = un **nombre** entier **pair : au moins une des solutions comporte au moins une symétrie axiale (horizontale, verticale ou diagonale).** **(3)**

Tableau des combinaisons de solutions pour les 1*n :

Nom des cases	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1*1																					
1*2	1	2																			
1*3	1	2	-																		
1*4	-	2	3	-																	
1*5																					
1*6	1	2	-	-	5	6															
1*7	1	2	-	-	5	6	-														
1*8	-	2	3	-	-	6	7	-													
1*9																					
1*10	1	2	-	-	5	6	-	-	9	10											
1*11	1	2	-	-	5	6	-	-	9	10	-										
1*12	-	2	3	-	-	6	7	-	-	10	11	-									
1*13																					
1*14	1	2	-	-	5	6	-	-	9	10	-	-	13	14							
1*15	1	2	-	-	5	6	-	-	9	10	-	-	13	14	-						
1*16	-	2	3	-	-	6	7	-	-	10	11	-	-	14	15	-					
1*17																					
1*18	1	2	-	-	5	6	-	-	9	10	-	-	13	14	-	-	17	18			
1*19	1	2	-	-	5	6	-	-	9	10	-	-	13	14	-	-	17	18	-		
1*20	-	2	3	-	-	6	7	-	-	10	11	-	-	14	15	-	-	18	19	-	
1*21																					

Légende du tableau :

-Les cases avec un nombre sont celles sur lesquelles il faut appuyer.

-Les combinaisons en rouge sont impossibles (voir plus loin : « cas du 4k+1 »).

-Les combinaisons en violet sont les plateaux qui ont un multiple de 4 en nombre de cases (cas du 4k).

-Les combinaisons en gris-vert sont les autres cas («4k-1 » et « 4k-2 »)

Notes d'édition

(1) Les résultats du cas 1xn sont résumés dans le tableau en fin d'article.

(2) L'étude exhaustive des combinaisons a probablement été faite sur le plateau 3x3 car il manque un argument pour passer de 2x2 à 3x3.

(3) Résultats non évidents donnés sans justification, il s'agit probablement des conjectures auxquelles l'étude de plateaux plus grands a abouti.