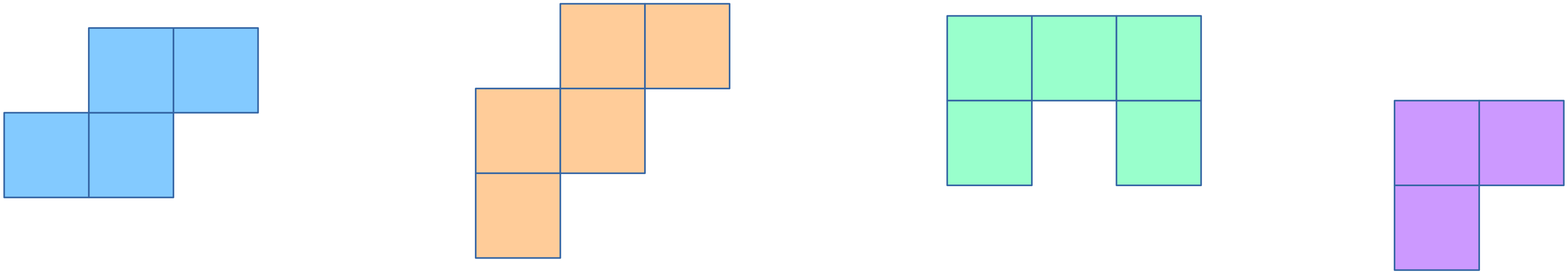
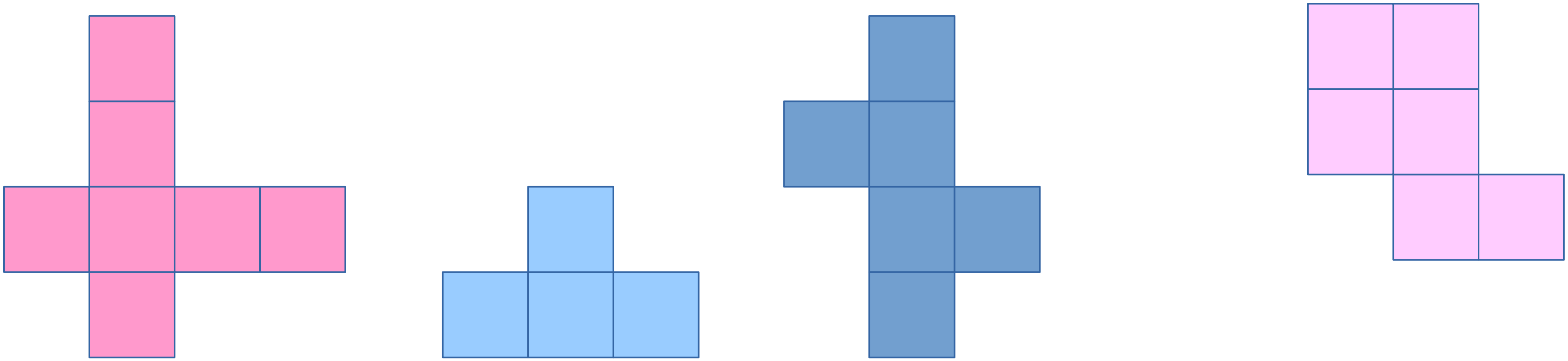
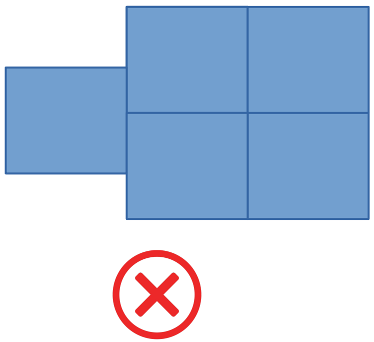


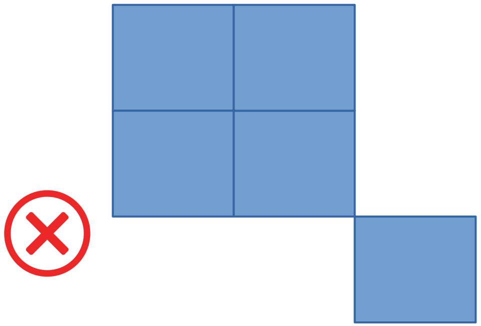
Polyominos de périmètre minimal

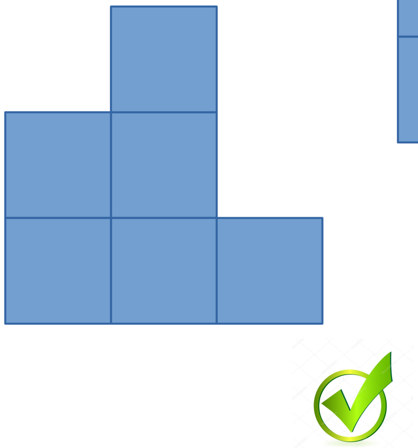


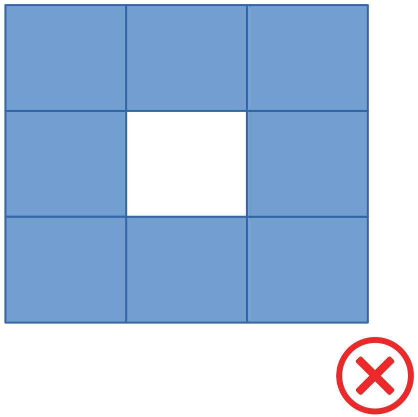
Les Polyominos

Un polyomino est un assemblage de carrés collés bord à bord.









Le Sujet

Étant donné un certain nombre de carrés N, quel est le plus petit périmètre que l'on peut obtenir en construisant des polyominos à N carrés ?

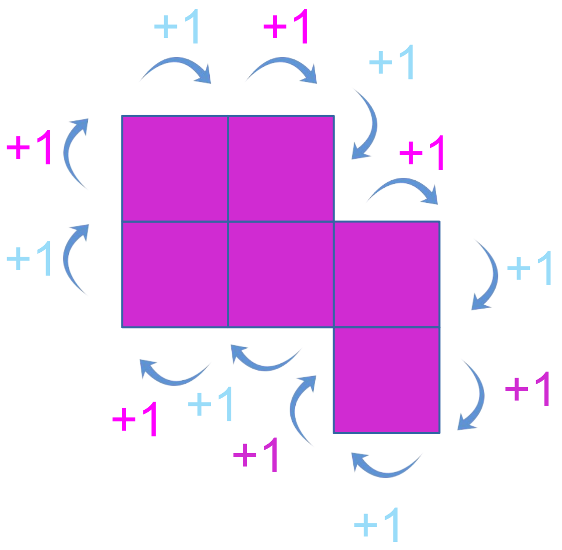
Simplification

- On prend un nombre de carrés appelé N.

- On veut créer avec ces carrés le polyomino ayant le plus petit périmètre.

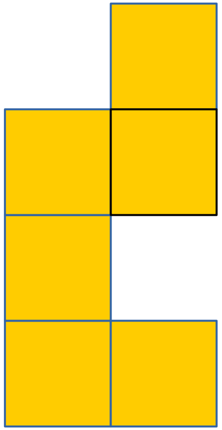
Périmètres

- Comment calculer le périmètre P d'un polyomino ?

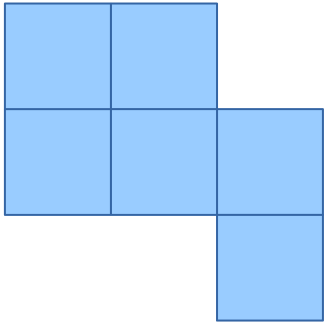


P = 12

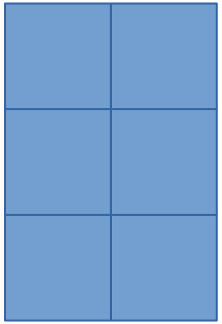
Exemple: N = 6



P = 14



P = 12



P = 10

Sur ces trois polyominos, celui qui a le plus petit périmètre est celui de droite. Mais est-ce le plus petit possible ?

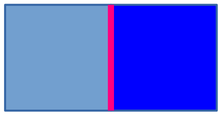
Propriété 1

Si on rajoute un carré collé à un seul autre on ne rajoute que 2 de périmètre.

En effet, soit P le périmètre de départ et P' celui d'arrivée ; on ajoute un carré.

$P' = P - 1 + 3 = P + 2$

P = 4



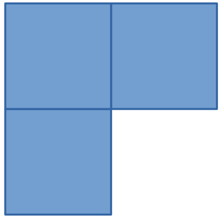
P = 6 car les deux côtés du milieu ne comptent pas dans le périmètre

Propriété 2

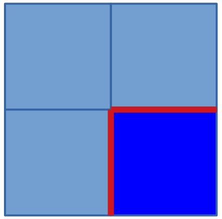
Si on rajoute un carré entouré d'autres on n'augmente <u>pas</u> le périmètre ; il peut même diminuer.

Soit P le périmètre de départ et P' celui d'arrivée.

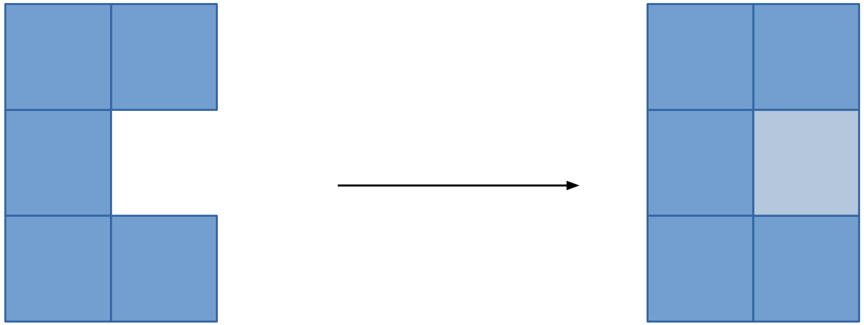
$P' = P - 2 + 4 - 2 = P$



P = 8



P = 8 (les deux côtés rouges ne comptent plus (-2) et on rajoute les deux côtés extérieurs (+2))

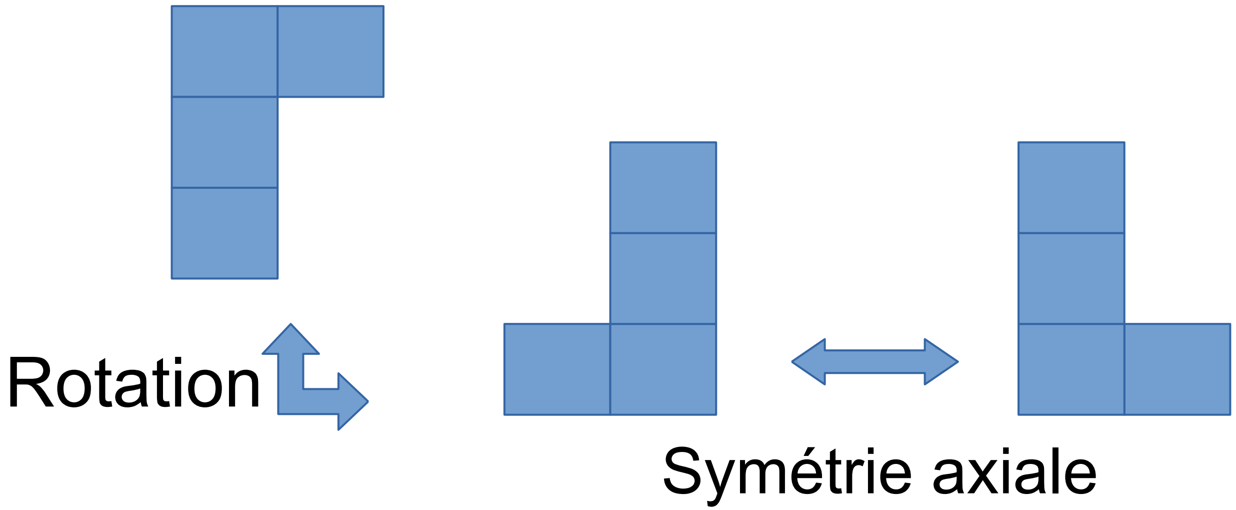


P = 12 P = 10

On rajoute un carré et le périmètre diminue.

Remarque

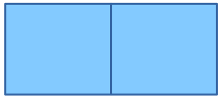
- Certains polyominos ont un périmètre identique : ceux obtenus par rotation ou par symétrie axiale.
- Exemple :

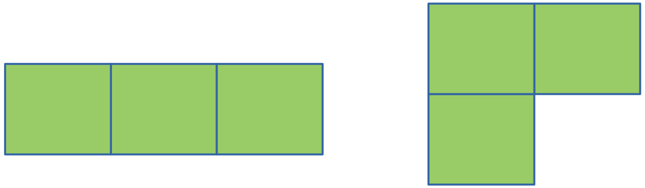


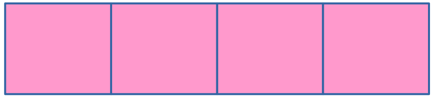
En effectuant ces deux transformations, on obtient des polyominos de même périmètre.

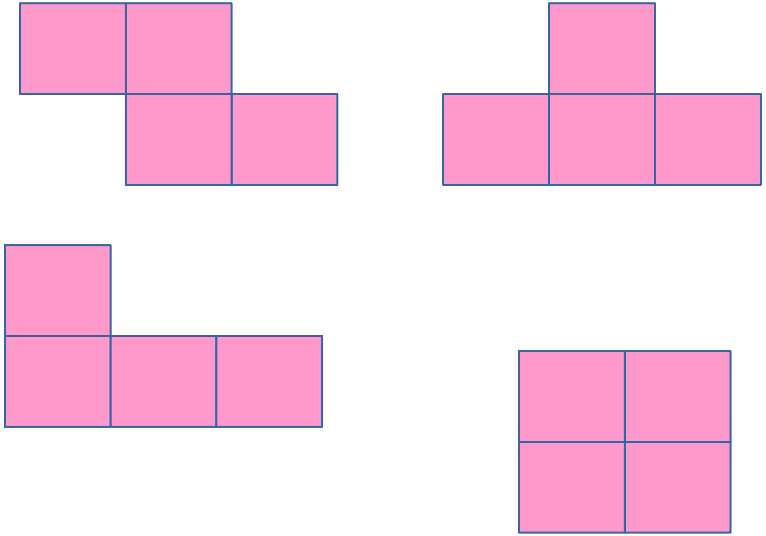
Exemples de polyominos

Pour 1 carré : 

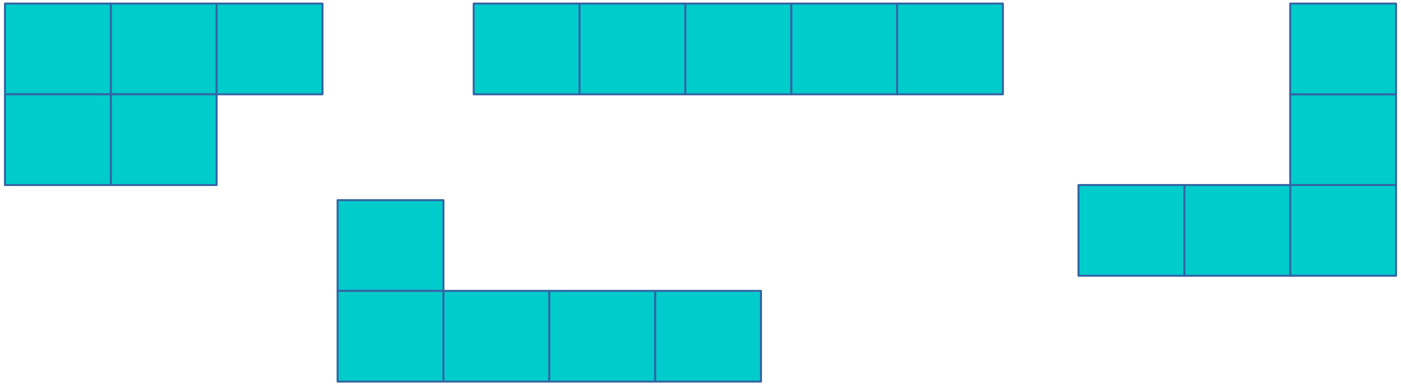
Pour 2 carrés : 

Pour 3 carrés : 

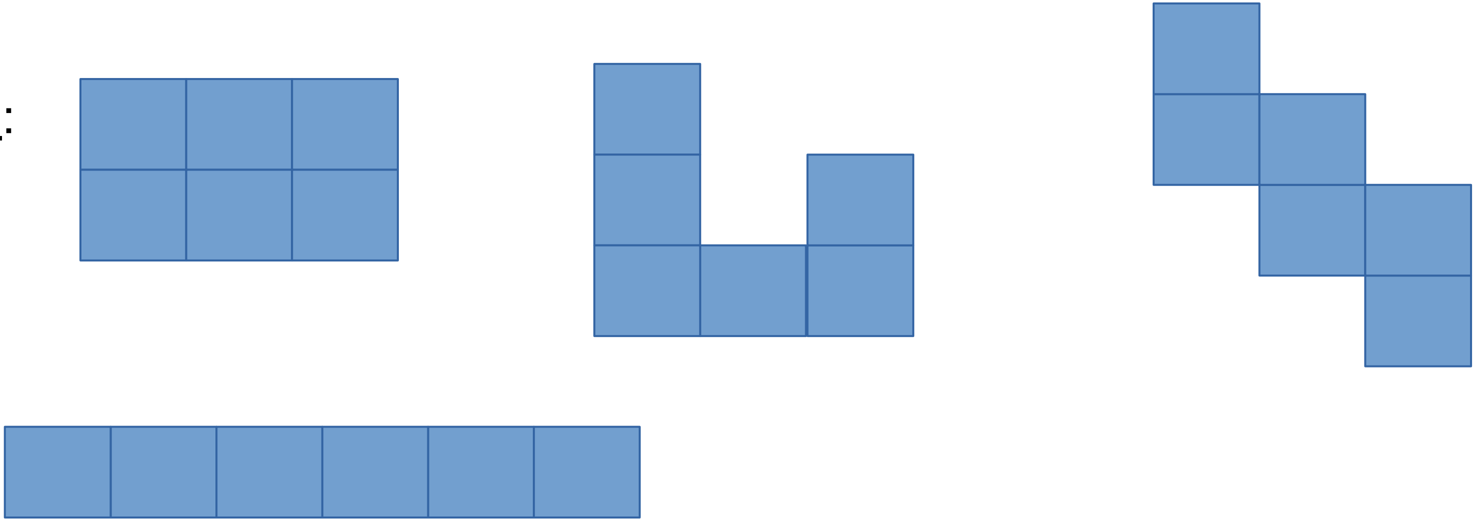
Pour 4 carrés : 



Pour 5 carrés :



Pour 6 carrés :



Avec un nombre de carrés N donnés, voici le plus petit périmètre trouvé (on s’est servi des 2 remarques précédentes pour trouver les périmètres minimaux de proche en proche)

N	périmètre
1	4
2	6
3	8
4	8
5	10
6	10
7	12
8	12
9	12
10	14
11	14
12	14
13	16
14	16
15	16
16	16
17	18
18	18
19	18
20	18

1 → 4	23 → 20	45 → 28	67 → 34	89 → 38
2 → 6	24 → 20	46 → 28	68 → 34	90 → 38
3 → 8	25 → 20	47 → 28	69 → 34	91 → 40
4 → 8	26 → 22	48 → 28	70 → 34	92 → 40
5 → 10	27 → 22	49 → 28	71 → 34	93 → 40
6 → 10	28 → 22	50 → 30	72 → 34	94 → 40
7 → 12	29 → 22	51 → 30	73 → 36	95 → 40
8 → 12	30 → 22	52 → 30	74 → 36	96 → 40
9 → 12	31 → 24	53 → 30	75 → 36	97 → 40
10 → 14	32 → 24	54 → 30	76 → 36	98 → 40
11 → 14	33 → 24	55 → 30	77 → 36	99 → 40
12 → 14	34 → 24	56 → 30	78 → 36	100 → 40
13 → 16	35 → 24	57 → 32	79 → 36	101 → 42
14 → 16	36 → 24	58 → 32	80 → 36	102 → 42
15 → 16	37 → 26	59 → 32	81 → 36	103 → 42
16 → 16	38 → 26	60 → 32	82 → 38	104 → 42
17 → 18	39 → 26	61 → 32	83 → 38	105 → 42
18 → 18	40 → 26	62 → 32	84 → 38	106 → 42
19 → 18	41 → 26	63 → 32	85 → 38	107 → 42
20 → 18	42 → 26	64 → 32	86 → 38	108 → 42
21 → 20	43 → 28	65 → 34	87 → 38	109 → 42
22 → 20	44 → 28	66 → 34	88 → 38	110 → 42

Conjecture

Pour calculer le périmètre minimal d'un polyomino constitués de N carrés, on trouve le nombre au carré le plus proche de N :

- Si le **carré** le plus proche est **inférieur à N,** on calcule **sa racine carrée** qu'on multiplie par 4 et on ajoute 2.

- Si le **carré** le plus proche est **supérieur à N** ou si N **est un carré**, on calcule **sa racine carrée** qu'on multiplie par 4.

Exemples

Si N = 26 :

Le carré le plus proche est : $25 = 5^2$

Comme 26 **>** 25

Périmètre minimal d'un polyomino à 26 carrés :

$5 * 4 + 2 = 22$

Si $N = 99$:

Le carré le plus proche est : $100 = 10^2$

Comme $99 < 100$

Périmètre minimal d'un polyomino de 99 carrés :

$$10 * 4 = 40$$

Nous n’avons pas réussi à démontrer cette conjecture qui nous semble vraie avec nos 2 remarques et le tableau des premiers exemples.

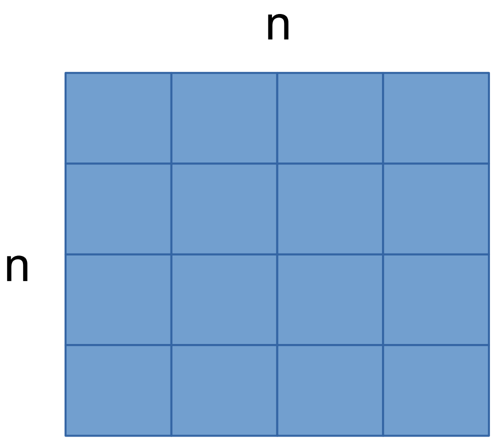
Nous avons tout de même réussi à démontrer un résultat et à expliquer d’où vient notre conjecture.

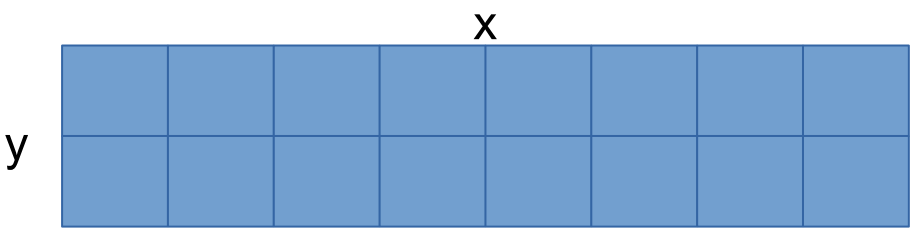
Propriété 3

Si $N = n^2$ alors le périmètre de la forme carrée du polyomino sera plus petit que celui d'une forme rectangulaire.

Démonstration

$N = n^2 \quad$ avec $N > 0$





$x > y > 0$

Aire : $xy = n^2$ donc $y = n^2/x \quad (x>0)$

Aire: n^2
Périmètre: $4n$

Périmètre: $2y + 2x = 2(x + y)$

<u>On doit démontrer que</u> : $4n < 2\,(x+y)$

<u>ce qui revient à démontrer que</u> :

$$2n < x + y$$

$$\Leftrightarrow 0 < -2n + x + y$$

$$\Leftrightarrow 0 < -2n + x + n^2/x$$

$$\Leftrightarrow 0 < -2nx + x^2 + n^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < (n - x)^2$$

Comme un carré est toujours positif, alors $(n-x)^2$ est positif et donc :

$$4n < 2(x+y)$$

Conclusion

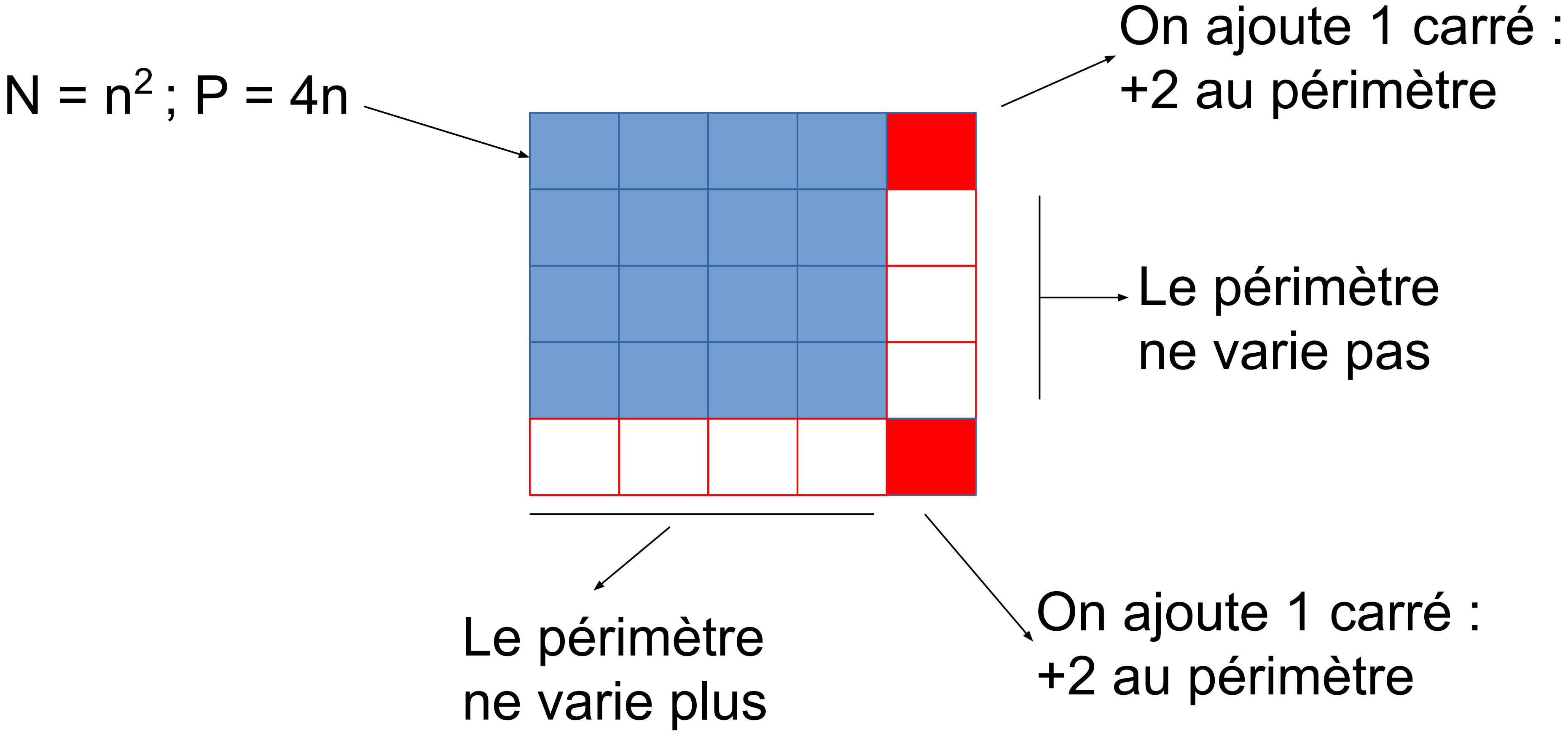
Le périmètre du carré sera toujours plus petit que celui du rectangle de même aire.

A partir de ce polyomino de périmètre minimum qu’on a montré être le carré, on ajoute un carré n’importe où ce qui ajoute 2 au périmètre (c’est notre propriété 1).

En ajoutant ensuite des carrés de proche en proche, le périmètre ne varie plus jusqu’à ce qu’un côté soit entièrement « complété ».

Puis on ajoute encore 2 au périmètre pour commencer sur l’autre côté jusqu’à arriver à la prochaine forme carrée où on aura ajouté 4 par rapport à la forme carrée précédente.

Illustration



FIN

Margot, Eloi, Eva et Suzie