STOP OU ENCORE

Année 2015 - 2016

Elèves de 3ème : DEBUISSCHERT Gauthier, DUBOIS Timon, FERREOL Thomas, MADI Tamim, PERRON Tanguy.
Etablissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence FERRY, Claudie ASSELAIN et Nicolas SEGARRA.
Chercheur : Céline Abraham.

Présentation du sujet :

Une personne joue à un jeu de dé de la manière suivante :

- On a 5 tours maximum.
- A chaque tour, le joueur lance un dé, puis décide soit de s’arrêter et de gagner le résultat du dé, soit de relancer le dé.
- S'il relance le dé, le résultat du lancer précédent est oublié et il prend ce nouveau résultat.

Voici un exemple : on lance un dé et on fait 3. On décide de relancer (on oublie alors le résultat précédent) et on fait 1. On décide de relancer à nouveau ; lors de ce troisième tour, on fait 6. On s'arrête et notre score est ce dernier résultat de 6.
Voici un deuxième exemple : on lance quatre fois un dé et on fait 5. On relance et lors de ce dernier tour, on obtient 2. Notre score est donc ce dernier résultat : 2. On aurait dû s'arrêter avant.

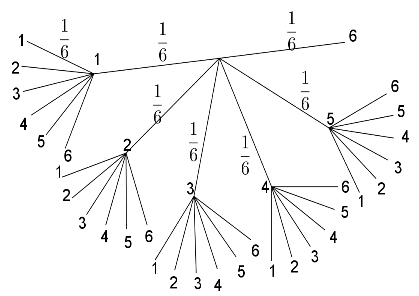
La question posée est la suivante : quelle est la meilleure stratégie pour gagner le plus en moyenne ?

Nos résultats : Nous avons calculé, pour différentes stratégies, les probabilités d'apparition des gains et nous avons utilisé ces probabilités d'apparition afin de calculer les gains moyens pour chaque stratégie. Nous en avons donc conclu que, parmi les stratégies préétablies, celles où l'on s’arrête à 5 ou 6 est la meilleure. Nous avons aussi établi une stratégie adaptative pour laquelle on calcule à chaque tour la probabilité de faire un gain strictement meilleur que celui que l'on vient de faire parmi les tours qu'il nous reste, et on adapte la stratégie suivant le résultat de ce calcul.

I – Les stratégies préétablies

a) l’arrêt à 6

La stratégie consiste ici à ne s’arrêter que lorsque nous obtenons le score de 6. Nous calculons donc les probabilités d'apparition de ce score pendant les tours. Nous avons construit un arbre de probabilité (ci-dessous) qui représente les probabilités d'obtenir tous les scores du dé pendant 2 tours, nous aurions pu le prolonger jusqu'à 5 tours mais nous nous sommes arrêtés à 2 tours dans un souci de visibilité.



Lorsqu'on suit un chemin sur cet arbre, la probabilité du résultat est donnée par le produit de toutes les probabilités rencontrées sur les branches.

- La probabilité d'obtenir 6 en 1 tour est de : $\frac{1}{6}=5^0\times(\frac{1}{6})^1$ soit environ 16,67%.

- La probabilité d'obtenir 6 en 2 tours est la probabilité d'obtenir 6 au premier ou au deuxième tour : $5^0\times(\frac{1}{6})^1+5^1\times(\frac{1}{6})^2$ soit environ 30,56 %.

(Sur l'arbre de probabilité cette probabilité est représentée par le chemin menant à six et ceux passant par un autre nombre (entre 1 et 5) et arrivant à six).

- En continuant de même, la probabilité d'obtenir 6 en 3 tours est de : $5^0\times(\frac{1}{6})^1+5^1\times(\frac{1}{6})^2+5^2\times(\frac{1}{6})^3$ soit environ 42,12%.

Ainsi, la probabilité d'obtenir 6 en 4 tours est d'environ 51,77% et celle d'obtenir 6 en 5 tours est d'environ 59,81%.
On peut généraliser ce calcul de la probabilité d'obtenir 6 en n tours et on en déduit la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1}\times\left(\frac{1}{6}\right)^k$.(1)

b) l'arrêt à 5 ou 6

La stratégie consiste ici à ne s'arrêter que lorsque nous obtenons le score de 5 ou 6. Nous calculons donc les probabilités d'apparition de ces scores pendant les tours.

- La probabilité d'obtenir 5 ou 6 en 1 tour est de : $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=2^1\times(\frac{1}{6})^1$ soit environ 33,33%.

- La probabilité d'obtenir 5 ou 6 en 2 tours (soit la probabilité d'obtenir 5 ou 6 au premier ou au deuxième tour) est de : $2^1\times(\frac{1}{6})^1+4\times(\frac{1}{6})^2\times2=2^1\times(\frac{1}{6})^1+2^3\times(\frac{1}{6})^2$ soit environ 55,56%.

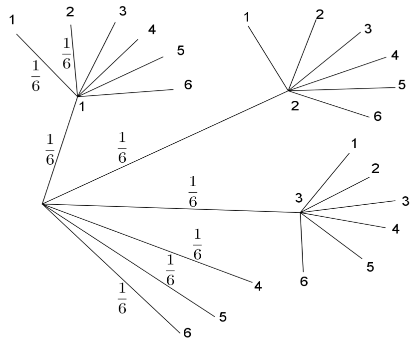
(Cette probabilité est représentée par les chemins qui mènent directement à 5 ou 6 au premier tour et ceux qui passent par 1 ; 2 ; 3 ou 4 au premier tour puis qui mènent ensuite à 5 ou 6 au second tour).

- On calcule de même la probabilité d'obtenir 5 ou 6 en 3 tours : $2^1\times(\frac{1}{6})^1+2^3\times(\frac{1}{6})^2+2^5\times(\frac{1}{6})^3$ soit environ 70,37%.

Ainsi, la probabilité d'obtenir 5 ou 6 en 4 tours est d'environ 80,25 % et celle d'obtenir 5 ou 6 en 5 tours est de 86,83 %.
On peut généraliser ce calcul de la probabilité d'obtenir 5 ou 6 en n tours et on en déduit la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n} 2^{2k-1}\times\left(\frac{1}{6}\right)^k$.

c) l'arrêt à 4 ; 5 ou 6

La stratégie consiste ici à ne s'arrêter que lorsque nous obtenons le score de 4, 5 ou 6. Nous reprenons nos calculs de probabilités. Nous avons construit le début de l'arbre de probabilités (ci-dessous) correspondant.



- La probabilité d'obtenir 4, 5 ou 6 en 1 tour est de : $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ soit 50%.

- La probabilité d'obtenir 4, 5 ou 6 en 2 tours est de : $\frac{1}{2}+3\times(\frac{1}{6})\times(\frac{1}{6})\times3=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2$ soit 75%.

Sur l'arbre de probabilité cette probabilité est représentée par les chemins menant à quatre, cinq ou six et ceux passant par un autre nombre (entre 1 et 3) et arrivant à quatre, cinq ou six.

- La probabilité d'obtenir 4, 5 ou 6 en 3 tours : $\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3$ soit 87,5%.

Ainsi, en 4 tours la probabilité est d'environ 93,75 % et en 5 tours, elle est de 96,875 %.
On peut généraliser ce calcul de probabilité d'obtenir 4,5 ou 6 en n tours et on en déduit la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2})^k$.

Voici un tableau qui récapitule nos résultats :

	Stratégie c): probabilité d'obtenir 4, 5 ou 6	Stratégie b): probabilité d'obtenir 5 ou 6	Stratégie a): probabilité d'obtenir 6
En 1 tour	1/2 = 50%	1/3 environ 33,33 %	1/6 environ 16,67 %
En 2 tours	3/4 = 75%	5/9 environ 55,56 %	11/36 environ 30,56 %
En 3 tours	7/8 = 87,5%	19/27 environ 70,37 %	91/216 environ 42,12 %
En 4 tours	15/16 = 93,75%	65/81 environ 80,25%	671/1296 environ 51,77%
En 5 tours	31/32 = 96,875%	211/243 environ 86,83%	4651/7776 environ 59,81%

On observe qu'adopter la 3^{e} stratégie est risqué : la probabilité de faire le score maximum de 6 est faible ; la 1^{ere} stratégie a des probabilités plus élevées mais nous risquons de terminer avec un 4.

d) Calcul des gains moyens

Il s'agit maintenant de déterminer la meilleure des trois stratégie étudiées précédemment. Dans le sujet nous nous intéressons à la meilleure stratégie pour obtenir le meilleur score en moyenne. Pour cela nous avons calculé le gain moyen pour chaque stratégie : ce gain s'obtient en ajoutant tous les produits des gains par leur probabilité. Avec le gain moyen, nous pourrons décider de la meilleure stratégie à adopter.

Nous avons commencé par la stratégie où l'on s'arrête à 6. En 5 tours, la probabilité d'obtenir 6 est d'environ 59,81% . La probabilité d'obtenir 1 ; 2 ; 3 ; 4 ou 5 est donc de 100 % - 59,81 % = 40,19 % ce qui fait pour chacun de ces gains, une probabilité de 40,19 % : 5 = 8,038 %.

Donc en 5 tours, le gain moyen de cette stratégie est :

$$\frac{6\times 59,81}{100}+\frac{5\times 8,038}{100}+\frac{4\times 8,038}{100}+\frac{3\times 8,038}{100}+\frac{2\times 8,038}{100}+\frac{1\times 8,038}{100}$$
$$=\frac{6\times 59,81}{100}+\frac{(5+4+3+2+1)\times 8,038}{100}$$

Ce calcul nous donne un gain moyen d'environ 4,7943.(2)

Pour la stratégie où l'on s'arrête à 5 ou 6, en 5 tours, la probabilité d'obtenir 5 ou 6 est de 86,83% . La probabilité d'obtenir 1 ; 2 ; 3 ou 4 est donc de 100 % - 86,83 % = 13,17% ce qui fait pour chacun des gains une probabilité de 13,17 % : 4 = 3,2925 %.
Donc en 5 tours, le gain moyen de cette stratégie est :

$$\frac{5,5\times 86,83}{100}+\frac{4\times 3,2925}{100}+\frac{3\times 3,2925}{100}+\frac{2\times 3,2925}{100}+\frac{1\times 3,2925}{100}$$
$$=\frac{5,5\times 86,83}{100}+\frac{(4+3+2+1)\times 3,2925}{100}$$

Dans le premier terme, on prend 5,5 qui est la moyenne de 5 et 6. Ce calcul nous donne un gain moyen d'environ 5,1049.

Avec la stratégie où l'on s'arrête à 4, 5 ou 6, en 5 tours, le gain moyen est :

$$\frac{5\times 96,875}{100}+\frac{3\times(\frac{25}{24})}{100}+\frac{2\times(\frac{25}{24})}{100}+\frac{1\times(\frac{25}{24})}{100}=\frac{5\times 96,875}{100}+\frac{(3+2+1)\times(\frac{25}{24})}{100}$$

Dans le premier terme, 5 est la moyenne de 4; 5 et 6. Ce calcul nous donne un gain moyen d'environ 4,90625.

Conclusion : la meilleure stratégie est donc celle où l'on s'arrête à 5 ou 6 car elle a un meilleur gain moyen.

II – Extension du sujet : dé à 8 faces

Dans cette extension, nous utilisons un dé à 8 faces. Nous avons élaboré 5 stratégies possibles qui nous paraissent être intéressantes. Pour chacune nous étudierons les probabilités à chaque tour puis le gain moyen.
Les calculs sont menés de façon similaire au I, nous ne mettrons que quelques exemples de calculs et nous récapitulerons tous nos résultats dans le tableau ci-dessous.

Première stratégie : on ne s'arrête que lorsqu'on atteint 8.

Probabilité d'obtenir 8 en 2 tours : c'est $7^0\times(\frac{1}{8})+7^1\times(\frac{1}{8})^2$, ce qui représente environ 23 %.

Probabilité d'obtenir 8 en 5 tours : c'est $7^0\times(\frac{1}{8})+7^1\times(\frac{1}{8})^2+7^2\times(\frac{1}{8})^3+7^3\times(\frac{1}{8})^4+7^4\times(\frac{1}{8})^5$, ce qui représente environ 49 % .

Seconde stratégie : on ne s'arrête qu'après avoir fait 7 ou 8.
Probabilité d'obtenir 7 ou 8 en 5 tours : c'est $\frac{1}{4}+3\times(\frac{1}{4})^2+3^2\times(\frac{1}{4})^3+3^3\times(\frac{1}{4})^4+3^4\times(\frac{1}{4})^5$, ce qui représente environ 76 %.

Stratégie 3 : on ne s'arrête qu'après avoir fait 6, 7 ou 8.

Probabilité d'obtenir 6, 7 ou 8 en 5 tours : c'est $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\times(\frac{3}{8})+(\frac{5}{8})^2\times(\frac{3}{8})+(\frac{5}{8})^3\times(\frac{3}{8})+(\frac{5}{8})^4\times(\frac{3}{8})$, ce qui représente environ 90 %.

Stratégie 4 : on ne s'arrête qu'après avoir fait 5, 6, 7 ou 8.

Probabilité d'obtenir 5, 6, 7 ou 8 en 5 tours : c'est $\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^4+(\frac{1}{2})^5$, ce qui représente environ 97 %.

La stratégie 5 consiste à ne s'arrêter qu'après avoir fait 4, 5, 6, 7 ou 8.

Tableau récapitulatif, nous avons arrondi les résultats des probabilités à l'unité pour faciliter les calculs.

Stratégies	Stratégie 1: probabilité d'obtenir 4, 5, 6, 7 ou 8	Stratégie 2: probabilité d'obtenir 5, 6, 7 ou 8	Stratégie 3: probabilité d'obtenir 6, 7 ou 8	Stratégie 4: probabilité d'obtenir 7 ou 8	Stratégie 5: probabilité d'obtenir 8
En 1 tour	62,5 %	50 %	37,5 %	25 %	12,5 %
En 2 tours	85 %	75 %	61 %	44 %	23 %
En 3 tours	95 %	87,5 %	76 %	56 %	33 %
En 4 tours	98 %	94 %	84 %	68 %	41 %
En 5 tours	99 %	97 %	90,00%	76 %	49 %

Nous notons que dans la troisième colonne, en 2 tours, on a déjà 75 % de chances d'obtenir 5, 6, 7 ou 8 donc cette stratégie est intéressante. Dans la dernière, nous observons, qu'en 5 tours, on a 49 % de chances d'obtenir 8 donc cette stratégie ne paraît pas satisfaisante.

Calculons les gains moyens de chaque stratégie.

Stratégie 1 : arrêt à 8.
En 5 tours, la probabilité d'obtenir 8 est de 49% . La probabilité d'obtenir 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ou 7 est de 100 % - 49 % = 51 % ce qui fait pour chacun des gains une probabilité de 51 % / 7 soit environ 7,3 %.
Donc en 5 tours, le gains moyens de cette stratégie est :

$$\frac{8\times49}{100}+\frac{7\times7,3}{100}+\frac{6\times7,3}{100}+\frac{5\times7,3}{100}+\frac{4\times7,3}{100}+\frac{3\times7,3}{100}+\frac{2\times7,3}{100}+\frac{1\times7,3}{100}$$
$$=\frac{8\times49}{100}+\frac{((7+6+5+4+3+2+1)\times7,3)}{100}$$

Ce qui nous donne un gain moyen d'environ 5,964.

Stratégie 2 : arrêt à 7 ou 8.
En 5 tours, la probabilité d'obtenir 7 ou 8 est de 76 %. La probabilité d'obtenir 1; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6 est de 100 % - 76% = 24 % ce qui fait pour chacun des gains une probabilité de 24 % / 6 = 4 %.

$$\frac{7,5\times76}{100}+\frac{6\times4}{100}+\frac{5\times4}{100}+\frac{4\times4}{100}+\frac{3\times4}{100}+\frac{2\times4}{100}+\frac{1\times4}{100}=\frac{7,5\times76}{100}+\frac{(6+5+4+3+2+1)\times4}{100}$$

Ce qui nous donne un gain moyen d'environ 6,54.

Stratégie 3 : arrêt à 6, 7 ou 8.
En 5 tours la probabilité d'obtenir 6 ; 7 ou 8 est de 90%. La probabilité d'obtenir 1 ; 2 ; 3 ; 4 ou 5 est de 100 %- 90 % = 10% ce qui fait pour chacun des gains une probabilité de 10 % / 5 = 2%

$$\frac{7\times 90}{100}+\frac{5\times 2}{100}+\frac{4\times 2}{100}+\frac{3\times 2}{100}+\frac{2\times 2}{100}+\frac{1\times 2}{100}=\frac{7\times 90}{100}+\frac{(5+4+3+2+1)\times 2}{100}$$

Ce qui nous donne un gain moyen d'environ 6,6. C'est pour l'instant le meilleur.

Stratégie 4 : arrêt à 5, 6, 7 ou 8.
En 5 tours la probabilité d'obtenir 5 ; 6 ; 7 ou 8 est de 97%. La probabilité d'obtenir 1 ; 2 ; 3 ou 4 est de 100 %- 97 % = 3% ce qui fait pour chacun des gains une probabilité de 3 % / 4 = 0,75%

$$\frac{6,5\times 97}{100}+\frac{4\times 0,75}{100}+\frac{3\times 0,75}{100}+\frac{2\times 0,75}{100}+\frac{1\times 0,75}{100}=\frac{6,5\times 97}{100}+\frac{(4+3+2+1)\times 0,75}{100}$$

Ce qui nous donne un gain moyen d'environ 6,38.

Stratégie 5 : arrêt à 4, 5, 6, 7 ou 8.
En 5 tours la probabilité d'obtenir 4 ; 5 ; 6 ; 7 ou 8 est de 99%. La probabilité d'obtenir 1 ; 2 ou 3 est de 100 %- 99 % = 1% ce qui fait pour chacun des gains une probabilité de 1 % / 3 soit environ 0,33 %

$$\frac{6\times 99}{100}+\frac{3\times 0,33}{100}+\frac{2\times 0,33}{100}+\frac{1\times 0,33}{100}=\frac{6\times 99}{100}+\frac{(3+2+1)\times 0,33}{100}$$

Ce qui nous donne un gain moyen d'environ 5,96.

La meilleure stratégie sera donc la troisième : arrêt à 6 ; 7 ou 8.

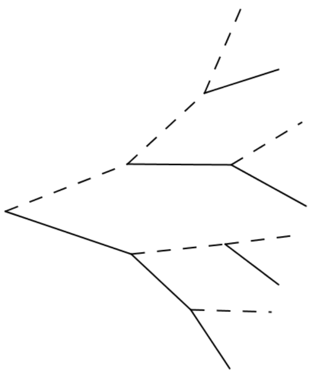
III – Stratégie adaptative

Cette technique est à réaliser après le premier lancer. Il s'agit de réfléchir à une stratégie à adopter à chaque tour et non plus de partir avec une stratégie fixée au départ.(3)

Par exemple, si l'on a obtenu 5 à un tour, on a 1 chance sur 6 de faire mieux au tour suivant, et 5 chances sur 6 de faire moins bien ou le même résultat ; si l'on a obtenu 2 à un tour, on a 4 chances sur 6 de faire mieux et 2 chances sur 6 de faire moins bien ou égal. Suivant le nombre de tours qu'il reste à jouer, on peut prendre la décision de rejouer ou non.
Dans cette partie nous allons généraliser nos calculs sur un dé à n faces pour un nombre de tours non fixé ; nous adapterons ces calculs ensuite au sujet : dé à 6 faces, jeu en 5 tours maximum.

On définit 2 variables : « a » le résultat du lancer à un tour donné et « n » le nombre de faces du dés.
On est en situation d'équiprobabilité.
Notons A l'événement d'obtenir un résultat inférieur ou égal à a au tour suivant, $\overline{A}$ l'événement de faire mieux que a au tour suivant et P(A) la probabilité de l'événement A.
A partir de cela, on en déduit deux résultats : P(A) = $\frac{a}{n}$ et P($\overline{A}$) = $1-\frac{n}{a}=\frac{n-a}{n}$.

Pour la suite, on ajoute une troisième variable : « t » est le nombre de tours restants après le tour où l'on a obtenu a.
La question est maintenant de connaître la probabilité de faire mieux que a en « t » tours.
Pour cela on construit un arbre de probabilités :



Les traits en pointillés correspondent à la probabilité de faire mieux que le tour précédent.

Les traits continus correspondent à la probabilité d'obtenir un résultat inférieur ou égal à a au tour suivant.

On ne changera pas le a dans la formule si on fait pire que celui-ci car ce qui nous intéresse, c'est de faire mieux que ce a. Si on fait mieux que a, on changera celui-ci car on voudra désormais faire mieux que ce nouveau résultat.

Soit A_t l'événement de faire mieux que a dans t tours .
On peut désormais connaître la probabilité de faire mieux que a en t tours : il suffit juste d'additionner toutes les $P(A_t)$ pour chaque tour … Mais ce serait très long et très compliqué.
En revanche, on peut facilement connaître la probabilité d'obtenir un résultat inférieur ou égal à a en t tours, à chaque tour : c'est tout simplement $(P(\overline{A}))^t$.
Donc le contraire de l'événement précédent est : « faire au moins une fois mieux que a en t tours ».
Ainsi, sa probabilité est : $1-(P(\overline{A}))^t$; c'est exactement ce que l'on veut.

Voici un tableau récapitulatif des probabilités, après avoir tiré un nombre *a* donné (*a* entier compris entre 1 et 6), de faire mieux en continuant à lancer le dé pendant les *t* tirages restants (*t* entier compris entre 1 et 4) ; nous donnons les valeurs arrondies au centième.

	1	2	3	4	5	6
1	0,83	0,67	0,5	0,33	0,17	0
2	0,97	0,89	0,75	0,56	0,31	0
3	1,00	0,96	0,88	0,7	0,42	0
4	1,00	0,99	0,94	0,8	0,52	0

Pour calculer la valeur d'une cellule du tableau ci-dessus, on prend la formule vue précédemment avec le numéro de la colonne pour « a » et le numéro de la ligne pour « t »

Par exemple, la case de coordonnées (4 ; 3) (à la 4e colonne et à la 3e ligne) représente la probabilité de faire mieux que 3 en 2 tours ; on a le calcul suivant : $1-(\frac{3}{6})^2=\frac{27}{36}=0{,}75$.(4)

Conclusion : On voit alors que la stratégie adaptative permet, à n'importe quel moment de la partie, au joueur le voulant, de connaître la probabilité de faire un bon résultat suivant son lancer et le nombre de tours qu'il lui reste. Il pourra prendre plus ou moins de risques suivant sa volonté : par exemple, il pourra choisir de relancer à partir de 75 % ou à partir de 50 % s'il aime prendre des risques.

Exemple de partie avec utilisation du tableau :
Au premier tour, le joueur fait 2 (il lui reste encore 4 tours), il a donc environ 99% de chance de faire mieux dans les tours suivants. Il relance donc le dé et fait 4 (3 tours restants) : il a environ 70% de

chances de faire mieux dans les prochains tours. Il relance encore une fois le dé et obtiens 5 (2 tours restants) : il n'a qu'environ 31% de chances de faire mieux que ce résultat et décide donc de s’arrêter.(5)

Notes d’éditions

(1) Une autre façon de voir les choses est que pour choisir avoir la valeur 6 au k-ième tour il faut avoir k-1 fois autre chose que 6 puis au dernier tour avoir 6. La probabilité d'avoir autre chose que 6 est de $\frac{5}{6}$ et celle d'avoir 6 est de $\frac{1}{6}$ donc la probabilité d'avoir 6 au k-ième tour exactement est de $\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{k-1}$.

De la même façon, la probabilité d'avoir un élément d'un sous-ensemble de m éléments d'un grand ensemble de n éléments à un tour k donné revient à n'avoir que des autres éléments à tous les tours saufs au dernier, donc cette probabilité est $\frac{m}{n}(\frac{n-m}{n})^{k-1}$. Cette formule est valable pour toutes les stratégies préétablies proposées.

La somme de toutes les probabilité jusqu'à un certain tour N donne donc : $\frac{m}{n}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{n-m}{n}\right)^k$.

Pour aller un peu plus loin ou pourra voir que cette formule peut se simplifier en : $1-\left(\frac{n-m}{n}\right)^N$

Un autre moyen d'obtenir cette formule est de voir que la probabilité d'obtenir un certain nombre à un moment donné est exactement l'opposé en terme probabilité que de ne jamais obtenir ce nombre. Il suffit donc de faire $1-P(\overline{A})$ où A est l'évènement que l'on souhaite obtenir, comme cela a été fait plus tard dans l'article.

(2) Le détail des calculs qui suivent n'est peut-être pas clair pour les personnes peu habituées aux probabilités. Si l'on dispose d'un certain nombre de gains possibles g_i et de leur probabilité d'apparition $P(g_i)$, le gain moyen est $\sum_i g_i P(g_i)$. C'est ce que font les élèves dans la partie qui suit.

Une autre chose qui pourra troubler le lecteur est que les élèves ont traité le cas "valeurs atteintes" et le cas "valeurs non atteintes" de deux manières différentes. Ils effectuent la moyenne des valeurs que l'ont souhaite obtenir puis multiplient ce résultat par la probabilité d'obtenir ces valeurs tandis qu'ils divisent la probabilité de ne pas atteindre une de ces valeurs par le nombre de valeurs restantes puis multiplient chacune des valeurs restantes par ce résultat. Le calcul est correct mais le mélange de ces deux méthodes peut être troublant.

(3) Entre les stratégies préétablies et les stratégies adaptatives il aurait pu être intéressant de s'intéresser à des stratégies "mixtes" ou l'on ne reste pas forcément fixé sur un même critère quelque soit le tour mais de pouvoir varier de manière établie à l'avance. Par exemple, que donnerait la stratégie : les deux premier tours je ne m'arrête que sur un 6, mais si j'arrive jusqu'au tour 3 je m'arrête sur un 5 ou un 6.

Les élèves ont aussi eu la bonne initiative d'étudier un autre type de dé, cependant aucun lien entre les deux dés n'est fait. Une conjecture sur le type de stratégie optimale en augmentant le nombre de faces aurait pu être intéressant.

Le changement d'un autre paramètre aurait aussi pu être pertinent : le nombre de tours. Les stratégies optimales le restent-elles si l'on diminue ou augmente le nombres de tours ?

(4) Les élèves ont ici pris une notation peu commune consistant à considérer que les entrées du tableau font aussi partie du tableau. Ainsi la colonne (1;k) correspond au nombre de tours et la ligne (k;1) correspond à la valeur que l'on souhaite dépasser. Avec cette notation, la case (4;3) correspond bien à 2 tours et à la valeur 3.

(5) Bien que très intéressante, cette partie ne fournie pas hélas de stratégie. Il aurait été intéressant de choisir une stratégie adaptative (par exemple on ne relance que lorsque la probabilité de faire mieux est supérieur à 50%) et ensuite étudier le gain moyen pour le comparer aux précédentes stratégies.

De plus, le résultat final que l'on souhaite est le meilleur gain moyen possible, donc il aurait peut-être été intéressant de faire des stratégies qui s'adaptent non pas aux probabilités qui vont suivre mais aux espérances de gains qui vont suivre. (L'idée de base n'est pas la même mais dans les faits est-ce que cela revient au même ?)