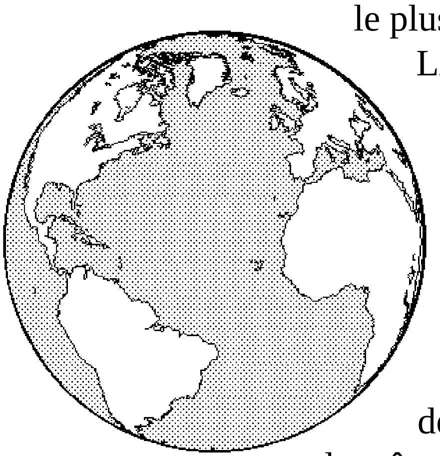
surfaces volumes et π

par Ling, Thuy Phuong, Ly Koun, Toan, Magali, Christelle, Sophie, Stéphanie

Collège Victor Hugo, rue Elsa Triolet, 93160 Noisy-le-Grand
Collège l'Arche Guédon, 77200 Torcy

Dans la nature, quelle forme volumétrique trouve-t-on le plus souvent ? LA BOULE : planète, soleil, astres, …



Si on a deux figures de même périmètre et qu'on transforme ces figures en volumes, ont-elles le même volume ?

Nous avons choisi ce sujet car ces notions nous semblaient connues. Mais de nombreuses difficultés nous ont souvent empêchés de poursuivre notre travail. Avec les conseils des professeurs de mathématiques et sciences physiques, avec l'aide des livres et des calculs, nous avons réussi à apporter des réponses à certains problèmes.

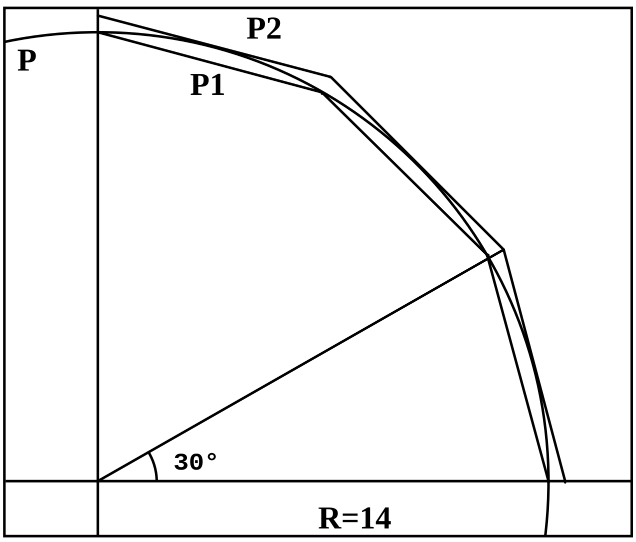
1. π

Depuis l'école primaire, nous avons appris à utiliser le nombre π pour calculer le périmètre d'un cercle, l'aire d'un disque, … On nous a toujours dit de prendre comme valeur approchée environ 3,14 sans jamais se poser la question de savoir pourquoi. Pourtant, il existe des moyens qui permettent de l'approcher. En voici un exemple : l'idée est d'encadrer le périmètre d'un cercle C de centre O et de rayon R par le périmètre de deux polygones réguliers, l'un inscrit et l'autre circonscrit, possédant le même nombre de côtés.

Soit P le périmètre du cercle C de centre O et de rayon R ; soit P_1 le périmètre du polygone inscrit ; soit P_2 le périmètre du polygone circonscrit. Donc $P_1 < P < P_2$.

Comme $\pi = P / 2R$, donc: $\dfrac{P_1}{2R} < \pi < \dfrac{P_2}{2R}$

Nous nous contentons de travailler sur un quart de cercle grâce aux axes de symétries du cercle pour approcher cette valeur. Donc voici le résultat :



$P_1 = 7{,}2 \times 12 = 86{,}4$

$P_2 = 7{,}5 \times 12 = 90$

$\dfrac{P_1}{2R} < \pi < \dfrac{P_2}{2R}$ donc

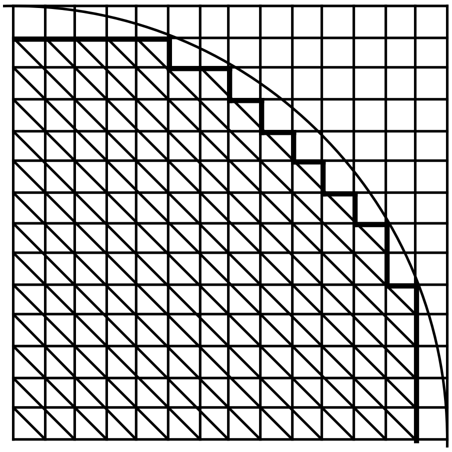
$\approx 3{,}086 < \pi < \approx 3{,}214$

Si on veut augmenter la précision de nos approximations, il suffit d'augmenter le nombre de côtés des polygones. Mais le problème est que l'on est vite limité par nos instruments de mesure.

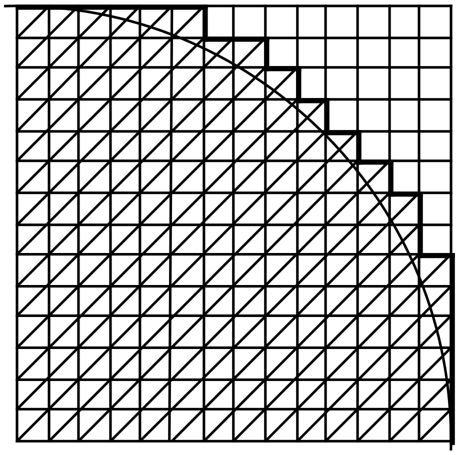
La seconde méthode, plus simple à réaliser et à programmer sur un ordinateur, consiste cette fois à encadrer l'aire d'un disque. Soit A l'aire du disque C de centre O et de rayon R ; soit A_1 l'aire du polygone inscrit ; soit A_2 l'aire du polygone circonscrit.

Donc $A_1 < A < A_2$.

Comme $\pi = P / R^2$, donc : $\frac{A_1}{R^2} < \pi < \frac{A_2}{R^2}$



J'ai pris un quart de disque dont le rayon est un nombre entier de carreaux. Je compte le nombre de carreaux qui sont à l'intérieur du cercle, c'est-à-dire tous les carreaux qui sont hachurés, puis le nombre de carreaux qui sont à l'intérieur plus ceux qui sont coupés par le cercle, c'est-à-dire tous les carreaux qui sont hachurés.

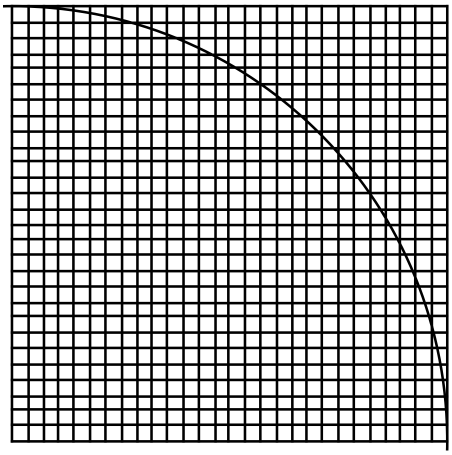


Si cette approximation ne nous plaît pas, il suffit d'augmenter le rayon.

Nombre de carreaux intérieurs :
585 x 4 = 2340
Nombre de carreaux extérieurs :
633 x 4 = 2532.

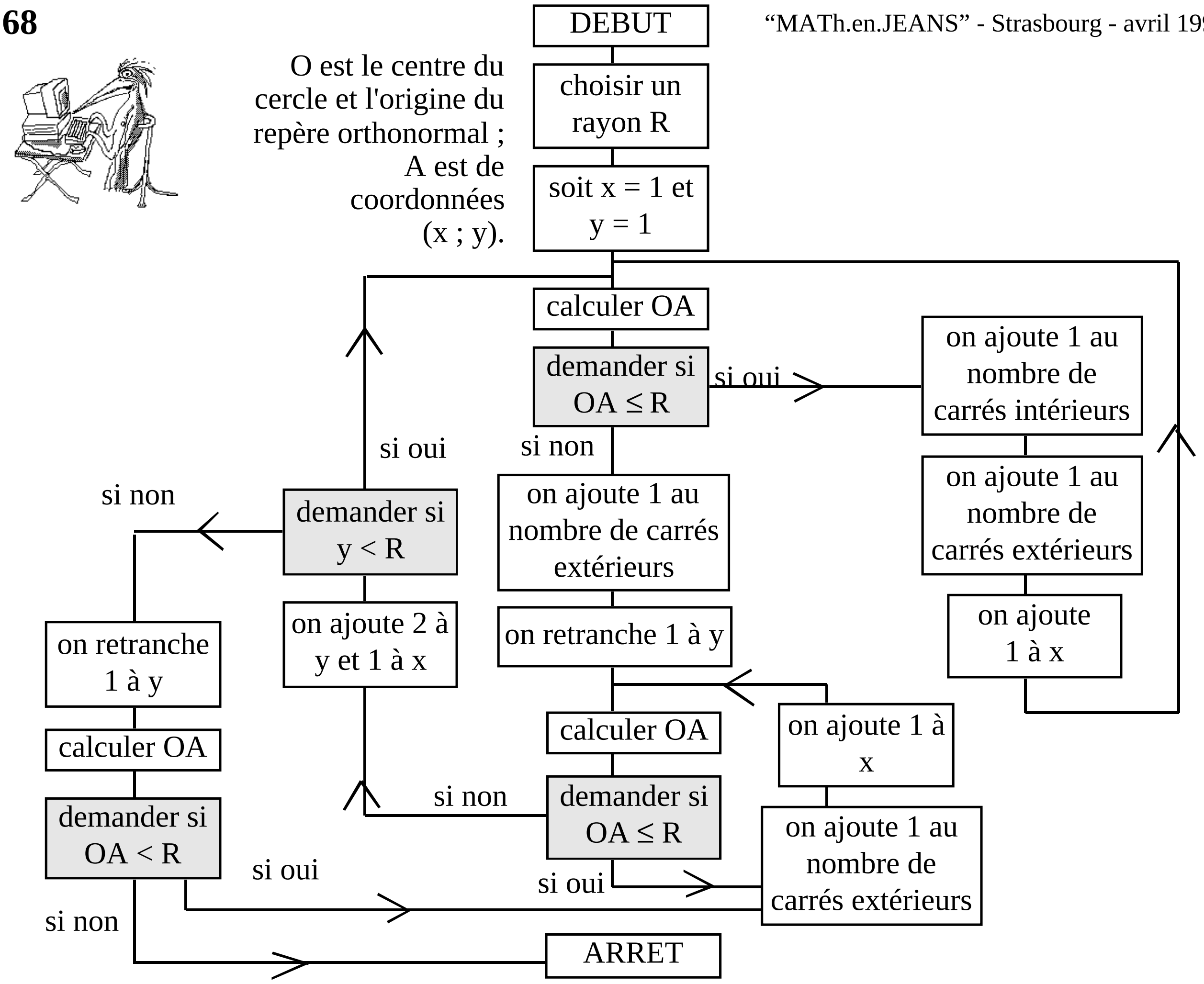
$$\frac{2340}{28^2} < \pi < \frac{2532}{28^2}$$

$$\boxed{2{,}98 < \pi < 3{,}28}$$

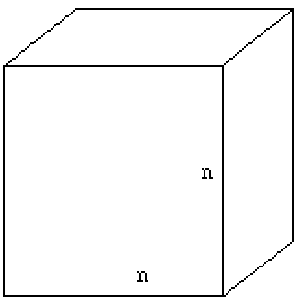


Voir page suivante le schéma d'un programme pour qu'un ordinateur fasse le travail que je viens de vous exposer.

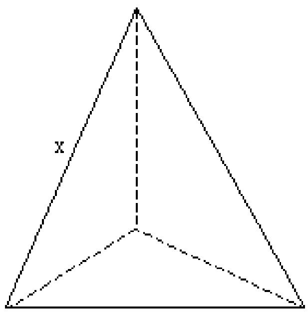
O est le centre du cercle et l'origine du repère orthonormal ; A est de coordonnées (x ; y).



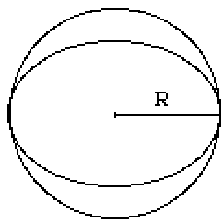
2. surface minimale



solide A



solide B



solide C

Nous avons remarqué que de nombreux objets naturels sont de forme sphérique [ex : les fruits, les astres, les planètes, etc …]. D'où la question : « Pourquoi les bulles de savon sont-elles sphériques ? » Nous avons proposé une hypothèse : « Pour un volume donné, c'est la sphère qui a la plus petite aire. » Mais nous n'avons comparé que les surfaces, les volumes et les périmètres de divers objets géométriques.

Nous avons pris trois solides de même volume, et nous essayons de comparer leurs aires. Les trois solides sont : un cube, un tétraèdre et une boule.

$$V_A = n^3 \ ; V_B = x^3 \frac{\sqrt{2}}{12} \ ; V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$

$$n^3 = x^3 \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

si $n^3 = x^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$ alors $x^3 = n^3 \frac{12}{\sqrt{2}}$ et $x \approx 2\,n$

si $n^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$ alors $R^3 = \frac{3\,n^3}{4\,\pi}$ et $R \approx 0{,}6\,n$

Conclusion : pour ces trois solides de même volume, on aura toujours l'aire de la sphère la plus petite. Notre conjecture est que de *tous* les volumes donnés, c'est la sphère qui aura l'aire la plus petite.

Quelques réponses sur la bulle de savon.

Les bulles de savon : elles sont formées d'air et d'une partie (extérieure) qui est une couche de produit organique : lessive.

1ère question : Quelle est l'aire la plus grande, celle de la figure A ou de la figure B ?

figure A

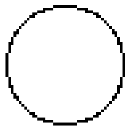
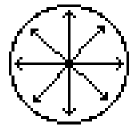


figure B

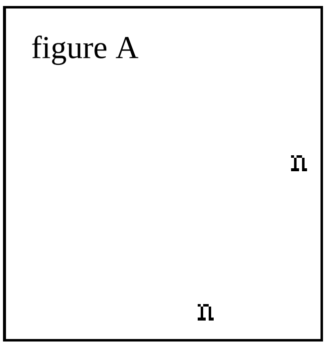
La surface A est plus grande que celle de B. Un cercle a une surface minimale par rapport aux autres.

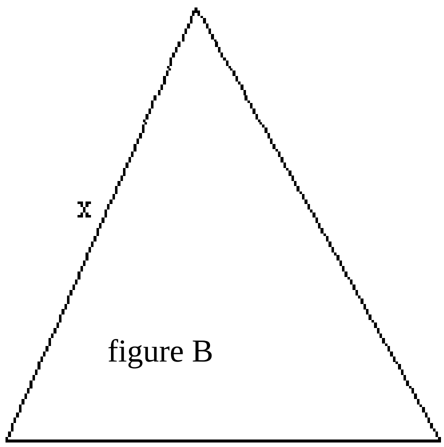
2ème question : Pourquoi la bulle de savon est-elle toujours ronde ?



C'est une question de tension, de force. Lorsqu'on souffle dans une bulle de savon, l'air se dirige vers le centre puis vers toutes les directions autour pour former une bulle. De plus, il faut que la bulle de savon soit ronde car si c'était un carré, le volume d'air serait plus important dans les coins, donc la bulle éclaterait.

3. comparaison d'aire et de volume





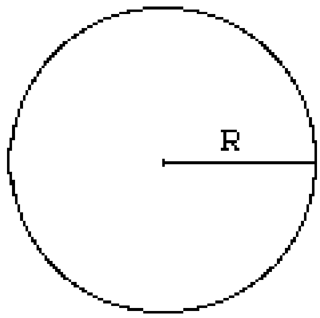


figure C

Par curiosité, nous avons voulu aller plus loin dans cette étude. Nous avons comparé l'aire et le volume pour un périmètre donné. Nous avons ensuite comparé le volume et le périmètre pour une aire donnée. Et enfin, nous avons comparé l'aire et le périmètre pour un volume donné.

figures de même périmètre.

Avec des figures simples ayant le même périmètre, nous avons voulu comparer leurs aires. Nous avons pris, pour nous faciliter la tâche, un carré de côté n (figure A), un triangle équilatéral de côté x (figure B), un cercle de rayon R (figure C). Nous avons $P_A = P_B = P_C$. Périmètre de la figure A : 4 n ; périmètre de la figure B : 3 x ; périmètre de la figure C : 2 π R.

Donc 4 n = 3 x = 2 π R. Pour pouvoir comparer les aires, on exprime chaque variable en fonction d'une même variable, par exemple n : 4 n = 3 x donc x = 4n / 3, et 4 n = 2 π R donc y = 4n / 2π. Maintenant, nous pouvons comparer les aires :

Aire A : n^2

Aire B : $x^2 \sqrt{3} = (\frac{4}{3} n)^2 \sqrt{3} \approx 0{,}77\ n^2$

Aire C : $R^2 \pi = (\frac{4\ n}{2\ \pi})^2 \approx 1{,}27\ n^2$

conclusion : $0{,}77 n^2 < n^2 < 1{,}27\ n^2$

→ Aire B < Aire A < Aire C

Nous avons voulu en plus savoir si nous obtenons des résultats identiques lorsque nous étudions des figures de l'espace. Nous avons pris : un cube dont l'une des faces est le carré de la figure A, un tétraèdre régulier qui a pour face le triangle B, une boule dont la section à l'équateur est le disque C.

$$V_A = n^3 \,;\; V_B = x^3\,\frac{\sqrt{2}}{12} = \left(\frac{4}{3}\,n\right)^3 \frac{\sqrt{2}}{12} \approx 0{,}28\;n^3\,;$$

$$V_C = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3 = \frac{4}{3}\,\pi\left(\frac{4\,n}{2\,\pi}\right)^3 \approx 1{,}08\;n^3$$

conclusion : $0{,}28\,n^3 < n^3 < 1{,}08\,n^3$
c'est-à-dire que $V_B < V_A < V_C$.

Maintenant on reprend les trois figures (précédentes) de l'espace et on compare leurs volumes.

Volume A : n^3

Volume B : $x^3\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

$$\approx (1{,}52\;n)^3\,\frac{\sqrt{2}}{12} \approx 0{,}42\;n^3$$

Volume C : $\dfrac{4}{3}\,R^3\,\pi \approx \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{n}{1{,}77}\right)^3\pi$

$$\approx \frac{4}{3}\,\frac{n^3}{5{,}5}\,\pi \approx 0{,}76\;n^3$$

Conclusion : $0{,}42\,n^3 < 0{,}76\;n^3 < n^3$
donc $V_B < V_C < V_A$.

figures de même aire.

Ensuite nous prenons des figures planes de même aire et nous cherchons à comparer leurs périmètres. Nous avons gardé un carré, un triangle équilatéral et un cercle — pour faciliter le travail. Nous avons cette fois :

Aire A = Aire B = Aire C.

Nous utilisons le même procédé que celui utilisé pour comparer les périmètres grâce à la relation suivante :

$$n^2 = x^2\,\frac{\sqrt{3}}{4} = \pi\,R^2$$

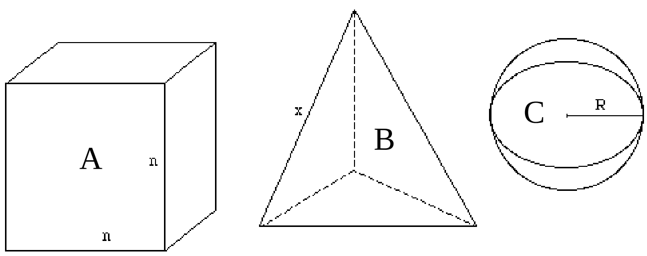
Nous trouvons : $x^2 = \dfrac{4\,n^2}{\sqrt{3}}$; $x \approx 1{,}52$ n ;

$$R^2 = \frac{n^2}{\pi}\,;\; R = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \approx \frac{n}{1{,}77}$$

Donc nous pouvons calculer les périmètres des trois figures en fonction de n afin de les comparer :

Périmètre A = 4 n ;
Périmètre B = 3 x ≈ 1,52 n x 3 ≈ 4,56 n
Périmètre C = $2\,\pi\,R \approx 2\,\pi\,(n/1{,}77) \approx 3{,}55\,n$
(or : 3,55 n < 4 n < 4,56 n)

Conclusion : $P_C < P_A < P_B$. Pour un carré, un triangle équilatéral et un cercle de même aire, le périmètre du cercle est le plus petit des trois et celui du triangle équilatéral le plus grand, contrairement à ce qu'on avait trouvé pour les figures de même périmètre.



solides de même volume.

Nous prenons un cube, un tétraèdre régulier et une sphère de même volume : nous allons comparer l'aire et le périmètre de l'une des faces du cube, d'une de celles du tétraèdre et du disque représentant la section de la sphère à l'équateur.

Vol. A = n^3 ; Vol. B = $x^3\dfrac{\sqrt{2}}{12}$; Vol. C = $\dfrac{4}{3}\,R^3\,\pi$

$x^3 = \dfrac{12}{\sqrt{2}}\,n^3 \approx 8{,}48\;n^3$; $x \approx 2$ n ; $R^3 = \dfrac{3}{4}\,\dfrac{n^3}{\pi}$;

$R \approx 0{,}62$ n. Aires … du carré = n^2, du triangle = $x^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\approx 1{,}73\;n^2$, du disque : $R^2\pi \approx 1{,}2\;n^2$

Conclusion : $A_A < A_C < A_B$.

Périmètres … du carré = 4 n , du triangle ≈ 6 n ,

du cercle ≈ 2 (0,62 n) $\pi \approx 3{,}89$ n

Conclusion : $P_C < P_A < P_B$.

<u>Figures planes de même périmètre</u>
aire(triangle) < aire (carré) < aire(disque)

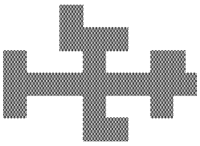
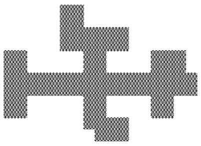
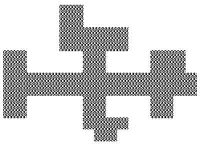
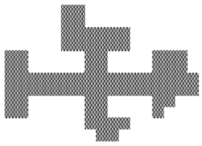
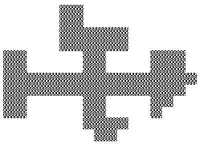
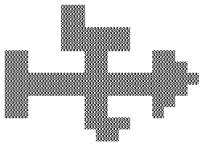
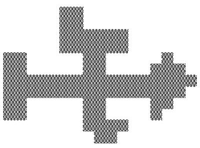
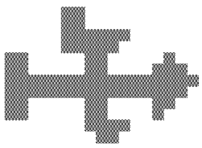
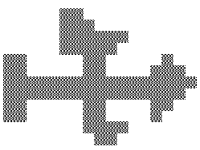
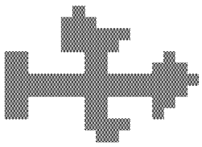
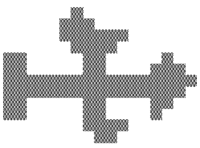
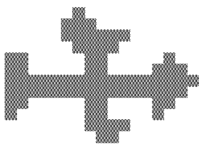
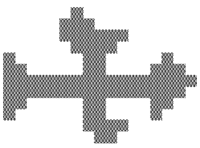
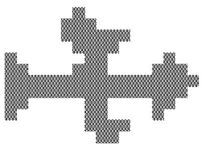
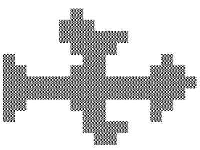
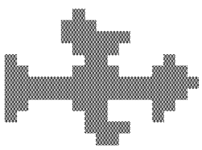
<u>Volumes issus de figures planes</u>
vol.(tétraèdre) < vol.(cube) < vol.(boule)

<u>Figures planes de même aire</u>
Péri.(cercle) < Péri.(carré) < Péri.(triangle)

<u>Volumes issus de figures planes</u>
vol.(tétraèdre) < vol.(boule) < vol.(cube)

<u>Solides de même volume</u>
aire (carré) < aire(disque) < aire(triangle)

<u>Figures planes issues de solides</u>
Péri.(cercle) < Péri.(carré) < Péri.(triangle)


1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

4. les coraux

Nous avons appelé « corail » une figure constituée de petits carrés assemblés ayant au moins un côté commun, deux à deux. Deux questions se sont posées :

Avec une aire donnée, trouver le périmètre maximal.

Avec un périmètre donné, trouver l'aire minimale.

périmètre maximum pour une aire donnée.

La formule pour trouver le périmètre maximum avec une aire donnée : Aire x 2 + 2.

aire minimale pour un périmètre donné.

Pour obtenir la plus petite aire sans changer le périmètre il faut enlever et remettre le même nombre de longueurs, mais uniquement dans "certains coins".

conclusion générale.

Notre recherche s'arrête ici. Nous trouvons tous ensemble que "Math en jeans" nous a fait découvrir des horizons nouveaux dans des domaines mathématiques différents de ce que nous avons l'habitude d'étudier. Il nous a permis de nous poser plus de questions sur des formules, sur des constructions qui nous semblent bizarres, alors que jusqu'ici nous ne faisions qu'admettre des résultats.

Tous nous avons trouvé "Math en Jeans" très intéressant mais parfois énervant, surtout lors des moments de découragement. De nombreuses questions restent pour le moment sans réponses complètes, mais nous espérons pouvoir les résoudre un jour !