Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

# Les tatamis

Année 2016-2017

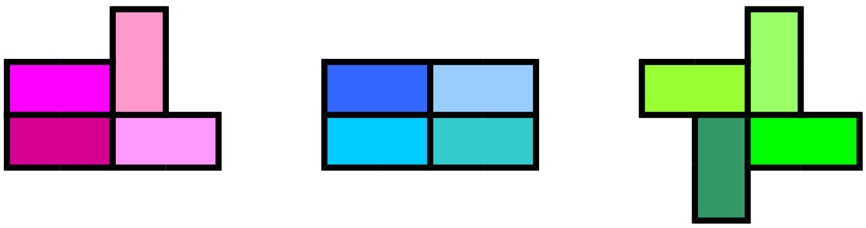
Auteurs : MALFAIT Charlie et POËTTE Camille (1ère S).
Établissement : Lycée Condorcet, Saint-Quentin (02).
Encadrés par : Fabien AOUSTIN.
Chercheur : Fabien DURAND, Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée, LAMFA, UMR CNRS 7352, Université de Picardie Jules Verne.

## 1) PRÉSENTATION DU PROBLÈME :

Le but de notre problème est de savoir si on peut recouvrir une surface donnée avec des tatamis de dimensions $1 \times 2$ en respectant la règle suivante :

Il n'y a jamais 4 tatamis qui se rejoignent au même point.

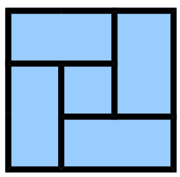
Voici quelques exemples de situations interdites :



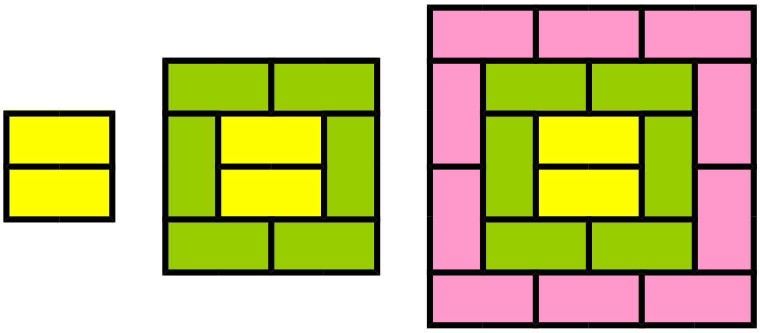
## 2) LE CAS DES CARRÉS :

Est-il possible de paver un carré de taille $n \times n$ en respectant la règle des tatamis ?

L'aire d'un tatami est de 2 petits carrés et lorsque $n$ est impair le nombre de petits carrés l'est aussi. On ne peut donc pas paver un carré $n \times n$ avec des tatamis quand $n$ est impair.



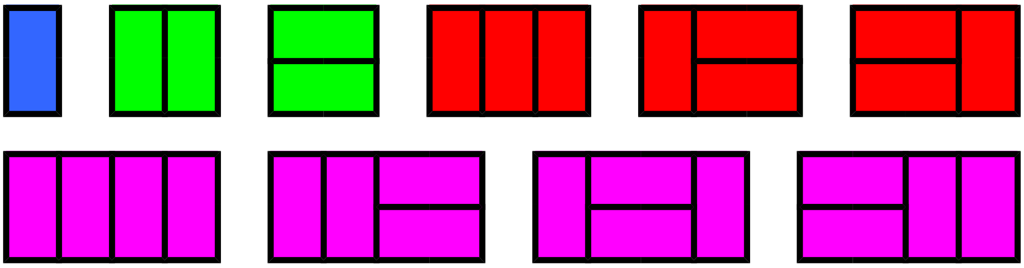
Si $n$ est pair, c'est toujours possible. On utilise des couronnes successives. [1]



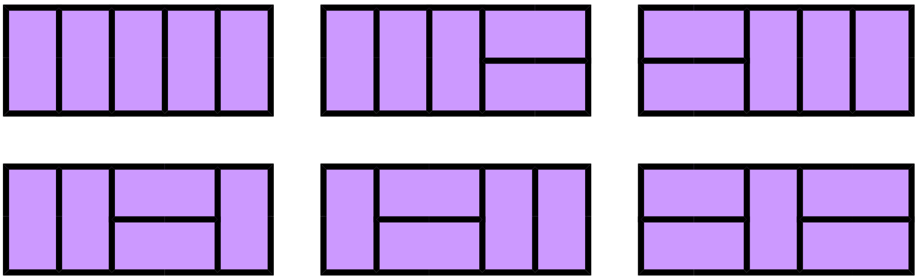
## 3) CAS DES RECTANGLES 2 × *n* :

### 3-a) Une conjecture :

On peut toujours paver un rectangle 2 × *n* en respectant la règle des tatamis.
Mais de combien de façons différentes ?
Nous avons remarqué qu'il y a une façon de paver le rectangle 2 × 1, deux façons de paver le rectangle 2 × 2, trois façons de paver le rectangle 2 × 3, quatre façons de paver le rectangle 2 × 4...

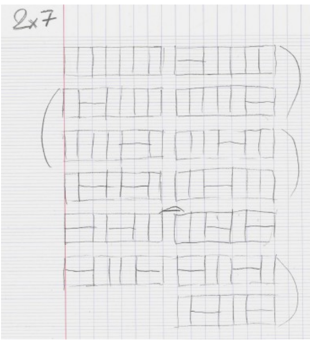


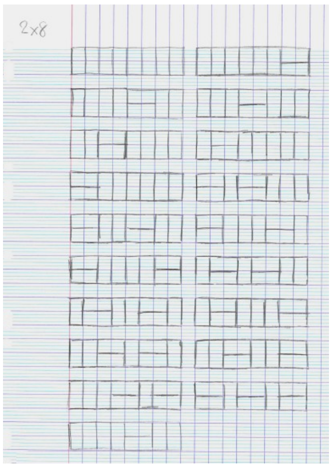
Mais il y a six façons de paver le rectangle 2 × 5 !

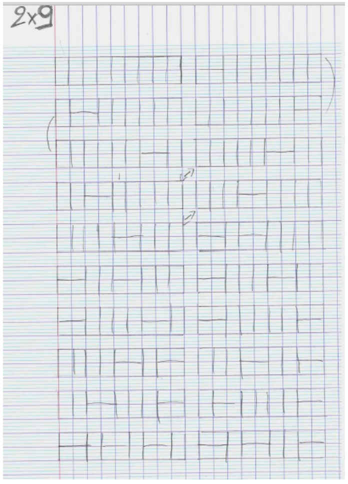


Après plusieurs essais à la main, on a obtenu les résultats suivants :

| *n* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de pavages possibles | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 13 | 19 | 28 | 41 |








Nous avons alors remarqué que pour obtenir le résultat de la case $n$ il fallait additionner les résultats des cases $n-1$ et $n-3$. [2]

## 3-b) Démonstration :

Calculons le nombre de pavages possibles pour les rectangles $2 \times n$.
On peut commencer par un tatami debout suivi d'un rectangle quelconque de dimension $2 \times (n-1)$.
On peut aussi commencer par deux tatamis couchés, obligatoirement suivis d'un tatami debout (pour respecter la règle) puis par un rectangle quelconque de dimension $2 \times (n-3)$.



Un exemple de pavage qui respecte la règle des tatamis dans les rues d'Arras !

### 3-c) Un algorithme de calcul :

Nous avons écrit un algorithme qui calcule le nombre de pavages pour un rectangle $2 \times n$. [3]

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  C EST_DU_TYPE NOMBRE
  D EST_DU_TYPE NOMBRE
  IK EST_DU_TYPE NOMBRE
  P EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  A PREND_LA_VALEUR 1
  B PREND_LA_VALEUR 2
  C PREND_LA_VALEUR 3
  LIRE P
  POUR IK ALLANT_DE 1 A P-3
    DEBUT_POUR
    D PREND_LA_VALEUR A+C
    A PREND_LA_VALEUR B
    B PREND_LA_VALEUR C
    C PREND_LA_VALEUR D
    FIN_POUR
  AFFICHER C
FIN_ALGORITHME
```

Voici quelques résultats obtenus avec l'algorithme :

| $n$ | Nombre de pavages |
|---|---|
| 15 | 277 |
| 20 | 1 873 |
| 50 | 178 955 183 |
| 100 | $\sim 3{,}57\times10^{16}$ |
| 1 000 | $\sim 9{,}1\times10^{165}$ |

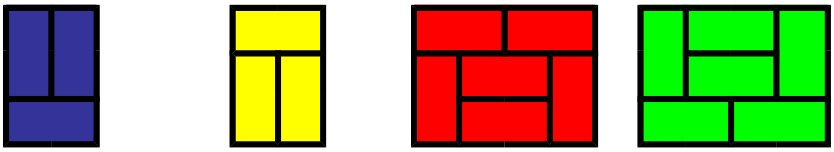
## 4) CAS DES RECTANGLES $3 \times n$ :

### 4-a) Une conjecture :

Si $n$ est impair le pavage est impossible. En effet, l'aire du rectangle serait alors impaire alors que l'aire d'un tatami est paire.
Pour $n$ pair nous avons obtenu les résultats suivants :

| $n$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de pavages possibles | 3 | 4 | 6 | 10 | 16 | 26 |

Nous avons remarqué que chaque pavage était obtenu à partir de 4 motifs et il n’y en a pas d’autres.



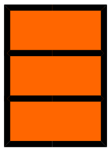
Motif A Motif B Motif C Motif D

On ne peut pas disposer le motif A à côté du motif D.
On ne peut pas disposer le motif B à côté du motif C.
On ne peut pas mettre deux fois de suite le même motif.

On note $u_n$ le nombre de pavages du rectangle $3 \times n$.
On a remarqué que :

si $n$ est impair, alors $u_n = 0$
si $n$ est pair, alors $u_n = u_{n-2} + u_{n-4}$.

Cette conjecture n’est pas valable au début car il existe un motif pour le rectangle $3 \times 2$ qui n’est pas utilisable dans les autres cas.



## 4-b) Une démonstration :

On peut commencer par un motif A suivi d’un rectangle de dimension $3 \times (n-2)$ qui commence par le motif B ou le motif C.
On peut commencer par un motif B suivi d’un rectangle de dimension $3 \times (n-2)$ qui commence par le motif A ou le motif D.
On a ainsi pris en compte tous les rectangles de dimensions $3 \times (n-2)$.
On peut commencer par un motif C suivi d’un rectangle de dimension $3 \times (n-4)$ qui commence par le motif A ou le motif D.
On peut commencer par un motif D suivi d’un rectangle de dimension $3 \times (n-4)$ qui commence par le motif B ou le motif C.
On a ainsi pris en compte tous les rectangles de dimensions $3 \times (n-4)$.
Finalement, pour trouver le nombre de pavages du rectangle $3 \times n$ il faut additionner le nombre de pavages de $3 \times (n-2)$ et $3 \times (n-4)$.

## 4-c) Un algorithme de calcul :

Nous avons écrit un algorithme qui calcule le nombre de pavages du rectangle $3 \times n$. [4]

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  C EST_DU_TYPE NOMBRE
  RESULTAT EST_DU_TYPE NOMBRE
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
```

```
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  SI ( n%2==1) ALORS
    DEBUT_SI
    RESULTAT PREND_LA_VALEUR 0
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      SI (n==2) ALORS
        DEBUT_SI
        RESULTAT PREND_LA_VALEUR 3
        FIN_SI
      SI (n==4) ALORS
        DEBUT_SI
        RESULTAT PREND_LA_VALEUR 4
        FIN_SI
      SI (n==6) ALORS
        DEBUT_SI
        RESULTAT PREND_LA_VALEUR 6
        FIN_SI
      SI (n>6) ALORS
        DEBUT_SI
        A PREND_LA_VALEUR 4
        B PREND_LA_VALEUR 6
        POUR I ALLANT_DE 1 A (n-6)/2
          DEBUT_POUR
          C PREND_LA_VALEUR A+B
          A PREND_LA_VALEUR B
          B PREND_LA_VALEUR C
          FIN_POUR
        RESULTAT PREND_LA_VALEUR C
        FIN_SI
      FIN_SINON
  AFFICHER RESULTAT
FIN_ALGORITHME
```

Voici quelques résultats obtenus avec l'algorithme :

| $n$ | Nombre de pavages |
|---|---|
| 16 | 68 |
| 20 | 178 |
| 50 | 242 786 |
| 100 | $\sim 4{,}07 \times 10^{10}$ |
| 1 000 | $\sim 4{,}51 \times 10^{104}$ |

## 5) D'AUTRES QUESTIONS :

On pourrait chercher une méthode pour compter le nombre de pavages pour des rectangles $4 \times n$, $5 \times n$, etc. et aussi $n \times n$ ou $n \times m$.
On pourrait se demander si on peut paver d'autres formes que des rectangles en respectant la règle des tatamis.

On a vu qu'une aire impaire ne peut pas être pavée avec des tatamis. On peut se demander si on peut toujours paver une aire paire en respectant la règle des tatamis.

**Notes d'édition :**

[1] Même si le dessin est assez clair, on aurait pu décrire explicitement le processus de construction. De même, une question naturelle serait : est-ce que c'est la seule façon de parver un carré de côté pair ?

[2] Autrement dit, le nombre an de pavages d'un rectangle de taille 2xn vérifie la relation de récurrence : $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ .

[3] Cet algorithme calcule le nombre $a_n$ en utilisant la relation de récurrence prouvée juste avant.

[4] On utilise ici la relation $u_n = u_{n-2} + u_{n-4}$ et les valeurs $u_2 = 3$, $u_4 = 4$ et $u_6 = 6$