# Comment bien gérer sa taverne ?

2017-2018

Florentin Boullet, Tom Ginguené, Prince Kougang et Célian Lagrange, élèves de 1ere S

Encadrés par Anne Balliot et Max Lekeux

Établissement : Lycée Victor et Hélène Basch (Rennes)

Chercheur : Vincent Guirardel (IRMAR, Université de Rennes 1)

## I) Enoncé du problème

Celui-ci consiste à étudier les probabilités de résultats économiques d'un modèle de taverne admettant à la fin de chaque mois soit une perte, soit un gain dont la valeur à été préalablement déterminée. Notre travail sera centré sur une étude sur un an, où le capital initial est de 100 pièces et où chaque mois on perd ou on gagne 5 pièces d'or, gains et pertes étant équiprobables.

## II) Étude des différents résultats possibles

En étudiant un arbre de probabilité représentant la situation et comportant deux issues (gain ou perte), on constate que au bout de deux mois, on obtient trois valeurs possibles : 110, 90, 100 (capital de départ), qu'au bout de quatre mois, on obtient cinq valeurs possibles : 120, 110, 100, 90, 80, qu'au bout de six mois on en obtient sept : 130, 120, 110, 100, 90, 80, 70, etc. À chaque fois que l'on passe d'un mois pair au mois pair suivant, on conserve les valeurs de résultats possibles précédentes, en y ajoutant deux supplémentaires, la première calculée en ajoutant dix au précédent maximum et la seconde en retranchant dix au précédent minimum : on obtient donc une symétrie des résultats possibles autour de 100 (le capital initial).

Cela s'explique par le fait que la valeur initiale est un nombre de dizaines (100), et que les gains ou pertes chaque mois sont de cinq. En effet, au bout de deux mois, soit on a eu deux fois des gains ou deux fois des pertes soit une perte et un gain. Si on est dans la première configuration, on obtient un gain ou une perte totale de 10 ($5+5=10$), et vu que la valeur initiale, à partir de laquelle est calculée tous les résultats possibles au bout d'un certain nombre de mois, est un nombre de dizaines (100), on obtient forcément un résultat étant le nombre de dizaines juste avant ou juste après le résultat précédent, qui était lui-même un nombre de dizaines. Si on est dans la seconde configuration, le résultat après ces deux mois demeure le même que le résultat auparavant, il ne change pas, car gains et pertes s'équilibrent ($5–5=0$)

Pour déterminer les résultats possibles au bout d'un an (=12 mois), il suffit de trouver le nombre de nombres pairs entre 1 et 12. Il y en a 6. On ajoute donc à 100, $6 \times 10$ (6 mois pairs donc il aura été ajouté 10 au capital initial six fois) pour obtenir le maximum, et retrancher à 100, $6 \times 10$ pour obtenir le minimum. Il suffit ensuite de relier les deux valeurs (minimum et maximum) passant de dix en dix pour obtenir l'ensemble des résultats possibles au bout d'un an, ce qui nous donne : 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160.

## III) Déterminer le nombre de branches de l'arbre

Déterminer le nombre de branches possibles dans l'arbre de probabilités représentant cette situation, c'est-à-dire déterminer le nombre de combinaisons gains/pertes différentes possibles sur les douze mois de l'année est simple.

En effet, comme à chaque mois il y a deux issues différentes (gains ou pertes), pour trouver le nombre de combinaisons d'issues possibles après sur un certain nombre de mois, il suffit d'élever 2 exposant ce nombre de mois :

1 mois, $2^1 = 2$ issues

2 mois, $2^2 = 4$ issues

12 mois, $2^{12} = 4096$, il y a donc 4096 issues

## IV) Calcul de la répartition des différentes branches entre les différents résultats possibles

Calculer la répartition des différentes branches entre les différents résultats possibles signifie déterminer quel est le nombre de combinaisons gains/pertes donnant chacun des résultats possibles (déterminés partie **I**). Une fois que cela aura été fait, il sera possible de déterminer les résultats les plus probables en comparant le nombres de combinaisons permettant d'obtenir chacun d'entre eux (plus un résultats aura été obtenu par un nombre important de combinaisons différentes, plus il sera probable).

Pour faire cela, on assimile chaque branche à une suite de +5 (gains) et de -5 (pertes)

Pour donner un certain résultat, cette suite doit comporter un nombre précis (et constant) de +5 et de -5 : prenons un exemple, les branches donnant 130 seront celles qui comportent neuf +5 et trois -5.

Afin de calculer toutes les combinaisons possibles comportant neuf +5 et trois -5 (continuons avec cet exemple), procédons avec l'image suivante : il s'agit de trouver toutes les manières possibles de placer trois objets (les -5) dans une suite de douze boîtes (les mois). Le premier dispose de douze emplacements différents possibles. Le second de onze (une des douze boîtes étant occupée par le premier objet) et le troisième de dix. Pour obtenir le nombre de branches donnant 130, il faut donc faire le calcul $12 \times 11 \times 10 = 1320$.

Il s'agit maintenant d'effectuer le même processus pour chaque résultat possible. Néanmoins, quand on additionne les nombres ainsi obtenus, on obtient un nombre total de branches de loin supérieur à 4096. Comment cela se fait-il ?

## IV bis) Correction de notre erreur

Après quelques temps de réflexion, nous avons compris l'erreur que nous avions faite. Celle-ci peut s'expliquer ainsi : Dans le modèle que nous avions auparavant mis au point afin de calculer le nombre de branches par résultat possible, certaines branches étaient comptées plusieurs fois. En effet, avec cette manière de calculer, quand les -5 (ou les +5 quand les -5 sont majoritaires) ont été placés aux mêmes emplacements (on a donc la même branche) mais dans un ordre différent, c'était compté comme deux branches différentes. Gardons notre exemple des combinaisons gains/pertes donnant 130. Imaginons, une combinaison où il y a un -5, au troisième, septième et onzième emplacement. Avec notre méthode de modélisation, il est possible que ce soit le premier (quand les douze emplacements sont libres) qui soit placé au troisième emplacement, le second au septième et le troisième au onzième. Néanmoins, il est également possible que le premier ait été placé au onzième, le second au septième et le troisième au troisième. On obtient donc la même suite de +5 et de -5, la même branche, mais elle sera comptée plusieurs fois.

Il faut donc calculer combien de fois chaque branche aura été répétée et diviser le nombre précédemment obtenu par ce nombre afin de trouver le bon nombre de branches par gain. La question est de savoir, si on a un certain nombre de +5 (ou de -5), le premier, le deuxième et le troisième etc, répartis sur un même nombre d'emplacements, de combien de manière différentes pourra-t-on les ordonner sur ces emplacements (premier-deuxième-troisième, deuxième-premier-troisième, etc). Imaginons que l'on a deux -5 (un résultat de 140). Représentons les par le chiffre 1 et 2. Il y a deux manières différentes de les ordonner, 1-2 et 2-1. Il faudra donc diviser le nombres de branches obtenu précédemment par 2. Imaginons que l'on a trois -5 (notre résultat de 130). On a donc 3 chiffres : 1, 2 et 3. Cela devient plus complexe. Mais divisons nos différentes manières de les ordonner en trois catégories : celles où 1 est le premier chiffre, celles où c'est 2 et celles où c'est 3. Pour chacune de ces trois catégories, on se retrouve donc avec deux chiffres à ordonner, les deux qui ne sont pas premiers. Or nous avons vu plus haut qu'il n'y avait que deux manières différentes d'ordonner deux chiffres. Pour trouver le nombre de manières différentes d'ordonner trois chiffres, il faut donc faire $3\times 2=6$. En suivant cette logique, pour trouver le nombre de manières d'ordonner 4 chiffres, il faudra faire 4 × 6 (nombre de manières d'ordonner trois chiffre) = 24. Or ce calcul s'apparente à un calcul de factorielle, pour pouvoir trouver le nombre de manières d'ordonner un certain nombre de chiffres (et plus largement de n'importe quelles choses), il faudra calculer la factorielle de ce nombre. On obtient donc la formule suivante :

$$\textit{nombre de branches}=\frac{12\times(12-1)\times(12-2)\times\ldots\times(12-n+1)}{n!}. \qquad \text{(1)}$$

avec $n$ le nombre de pertes quand gains majoritaires ou gains quand pertes majoritaires.

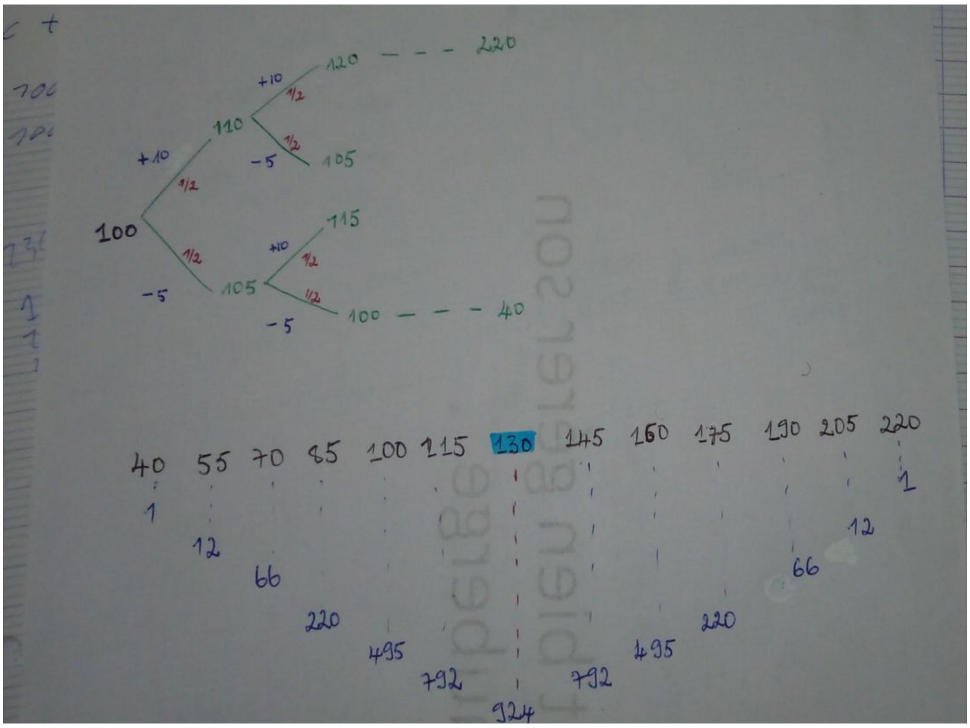
Cela nous permet de découvrir combien de fois chaque branche a été répétée (en fonction du nombre de -5 pour les branches contenant plus de +5 et de +5 pour les branches contenant plus de -5) et de trouver donc enfin la répartition des branches par résultat. Cette répartition est (en allant de 160 à 40) : 1-12-66-220-495-792-924-792-495-220-66-12-1. Si on additionne ces nombres, on obtient bien 4096. On remarque une symétrie du nombre de branches autour de 100 (qui est par ailleurs la valeur dont l'obtention est la plus probable, avec 924 branches), ce qui signifie que le résultat que l'on peut espérer obtenir en moyenne est 100, gains et pertes s'équilibrent.

| 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | 1 |
| | 12 | | | | | | | | | | 12 | |
| | | 66 | | | | | | | | 66 | | |
| | | | 220 | | | | | | 220 | | | |
| | | | | 495 | | | | 495 | | | | |
| | | | | | 792 | | 792 | | | | | |
| | | | | | | 924 | | | | | | |

## V) Étude en variant les paramètres

On observe qu'en variant les gains et les pertes, et en conservant l'équiprobabilité, la symétrie des probabilités autour du résultat moyen se conserve, mais que cette valeur moyenne se déplace (vers le haut si les gains augmentent, vers le bas si ce sont les pertes). De plus, l'écart entre deux résultats possibles successifs évolue également.

- *Symétrie* : On conserve la situation avec deux issues possibles équiprobables chaque mois (1 chance sur 2).
- *Variation résultat moyen* : Si les gains deviennent plus importants que les pertes, et que gains/pertes restent équiprobables, le résultat espéré moyen augmente, car on gagne aussi souvent que l'on perd mais l'on gagne plus quand l'on gagne que l'on ne perde quand l'on perd.
- *Écart :* Chaque résultat possible est défini par la différence "gains/pertes". Quand l'on passe d'un résultat à un autre directement inférieur (respectivement supérieur), on aura un écart qui sera dû à la différence qu'il y a entre le gain et la perte. Par exemple, le fait d'avoir la probabilité de gagner 5 pièces d'or ou d'en perdre 5 chaque mois nous donne une différence de 10 pièces d'or entre les deux résultats possibles après chaque mois. De même, si on peut gagner 10 pièces d'or ou en perdre 5 chaque mois (comme dans l'arbre en image ci-dessous), on aura une différence de 15 pièces d'or entre deux résultats possibles après chaque mois.
- Dans l'exemple en image ci-dessous, la valeur de gain est plus importante (+10) que la valeur de perte (-5) chaque mois. Le minimum reste le même (40) puisqu'on perd toujours -5, mais le maximum augmente (220) puisque le gain est passé de +5 à +10. Par ailleurs, le nombre de branches pour arriver à chaque résultat ne change pas, mais l'écart entre ces valeurs change, on observe un écart de 15, puisqu'on peut gagner 10, ou perdre 5 pièces chaque mois avec 1 chance sur 2. De plus, la valeur moyenne se déplace vers le haut, ici on a 130 avec le plus grand nombre d'issue possible (924).



## VI) Conjecture d'une formule générale

- Nous avons enfin cherché à obtenir une formule générale qui nous permettrait d'avoir le nombre de pièces d'or que la taverne peut avoir en moyenne au bout d'un, dix ou cent ans.

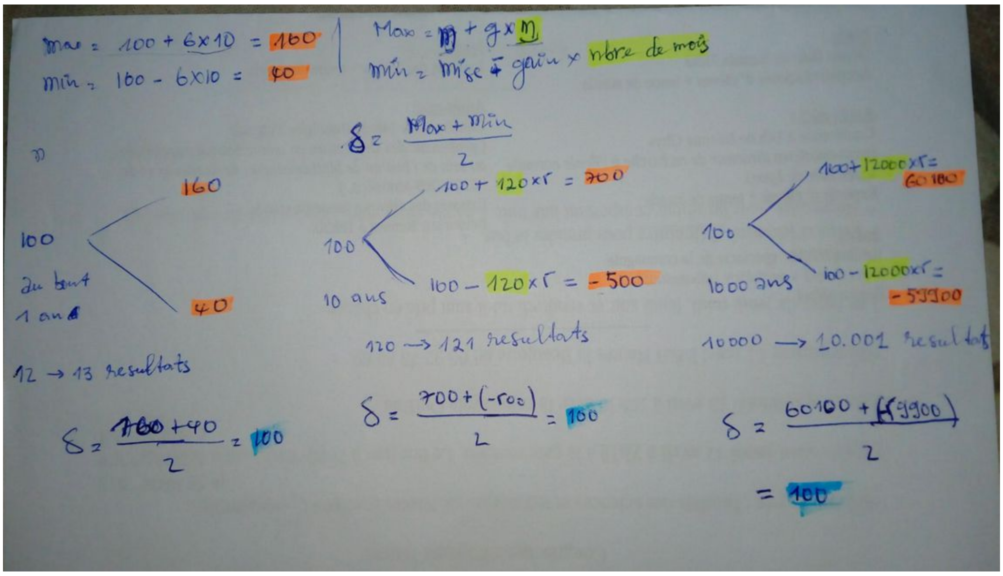
En effet, on a pu trouver des formules qui nous donneraient le maximum et le minimum du nombre de pièces d'or obtenu par la taverne, telles que :

- Max = nombre de pièces de départ + gain × nombre de mois
- Min = nombre de pièces de départ – perte × nombre de mois

Ainsi, le nombre de pièces d'or moyen ($) obtenu serait tel que

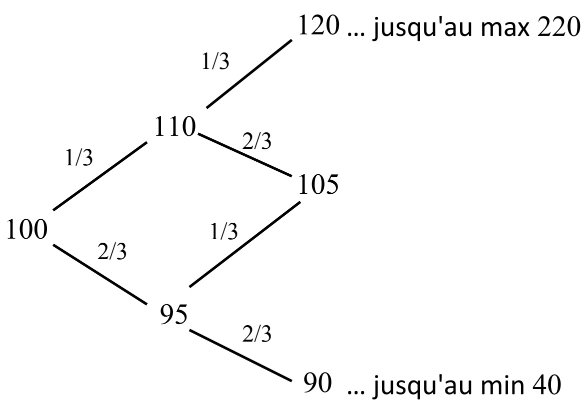
$(moyenne) = (max + min)/2

En image, on a des exemples de nombre de pièces d'or que la taverne peut espérer en moyenne au bout d'un an, 10 et 100 ans. On observe que pour avoir cette valeur moyenne il suffit d'appliquer la formule ci-dessus, ce qui fait qu'on a toujours 100 comme valeur moyenne espérée avec la probabilité d'une chance sur deux de gagner ou de perdre 5 pièces d'or. De même, avec l'image ci-dessus (partie **V**) on voit que 130 qui est la valeur moyenne espérée est obtenue en appliquant la formule générale.




- Cependant, afin d'avérer notre notre conjecture, nous avons modifié un autre paramètre, c'est à dire qu'au lieu d'avoir une probabilité de 1/2 de gagner ou de perdre les pièce d'or, on a pris par exemple une probabilité de 1/3. Et pour étudier ce cas, on a soumis notre étude à une épreuve de Bernoulli, et donc une loi binomiale pour vérifier notre formule (2). Autrement dit, vérifier que : *espérance (moyenne) = (max + min)/2.*

Pour cela, on considère donc que *"gagner 10 pièces d'or"* est le succès, *"perdre 5 pièces d'or"* est l'échec, la probabilité du succès étant de 1/3, soit l'arbre :



$X$ (3) suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 1/3$, et $P(X{=}k)$ est la probabilité d'avoir $k$ succès.
Soit la loi de probabilité :

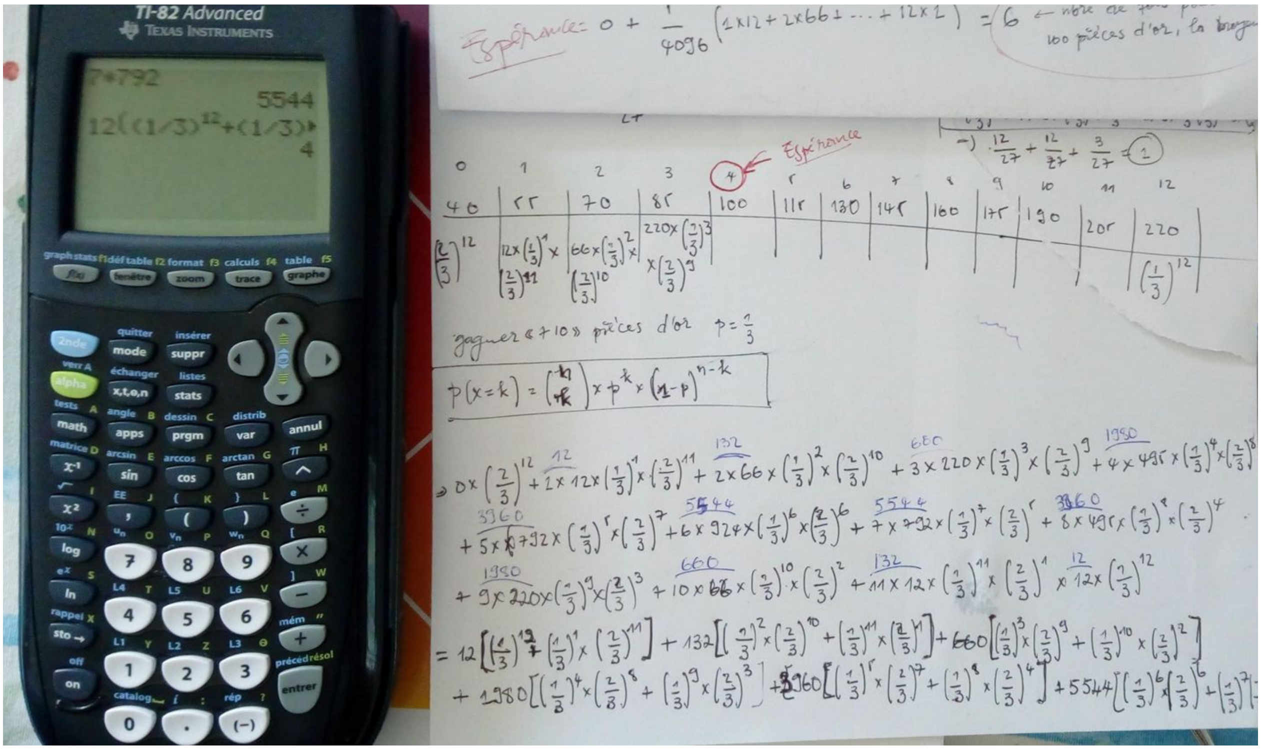
| Valeurs obtenues | 40 | 55 | 70 | 85 | 100 | 115 | 130 | 145 | 160 | 175 | 190 | 205 | 220 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $P(X = k)$ | $(2/3)^{12}$ | $12\times(1/3)^1 \times(2/3)^{11}$ | $66\times(1/3)^2 \times(2/3)^{10}$ | … | … | … | … | … | … | … | … | … | $(1/3)^{12}$ |
| Valeur approchée | 0,008 | 0,046 | 0,127 | 0,212 | 0,238 | 0,191 | 0,111 | 0,048 | 0,015 | 0,003 | 4,9E$^{-4}$ | 4,5E$^{-5}$ | 1.8E$^{-6}$ |

On admettra que

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial, nombre de combinaisons de $k$ parmi $n$.

Et on sait que la moyenne, ou l'espérance, est $E(X)=\sum_{k=o}^{n} k\times P(X=k)$ .




En image ci-dessus, toute l'opération rentrée dans la calculatrice, le résultat est 4.
En fait, dans un schéma de Bernoulli et une loi binomiale, l'espérance vaut $E(X)=n\times p$ , d'où

$E(X)=12\times\frac{1}{3}=4.$

On en déduit donc que la valeur moyenne espérée au bout de $12$ mois est de $100$ (4). Par contre, ce résultat nous permet de réfuter notre conjecture, car on a trouvé $100$ comme valeur moyenne et non $130$ comme cela était prévu en appliquant la formule générale (5).

## VII) Conclusion

A travers ce travail, nous avons utilisé les mathématiques, et plus particulièrement le domaine des probabilités, afin d'avoir un aperçu efficace du potentiel économique d'une taverne. Ainsi, nous sommes désormais convaincus de l'utilité pratique des mathématiques dans la vie de tous les jours.

### Notes d'édition

(1) Ce nombre est le nombre de combinaisons de $n$ éléments parmi $12$ ; C'est le coefficient binomial $\binom{12}{n}=\frac{12!}{n!(12-n)!}$, noté aussi $C_{12.}^{n}$

(2) il s'agit bien ici d'un *schéma* de Bernoulli : une succession d'épreuves aléatoires résultant en un succès ou un échec, indépendantes et de même probabilité de succès. La loi de probabilité du nombre de succès est la loi binomiale de paramètres $n$, le nombre d'épreuves, et $p$, la probabilité de succès de chaque épreuve.

(3) $X$ désigne le nombre total de succès. La loi de probabilité de $X$ est la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, autrement dit $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$ (formule après le tableau). Cela s'explique avec l'arbre représenté au-dessus : d'après l'étude du **IV bis**, il y a $\binom{n}{k}$ branches aboutissant à $k$ succès (voir note 1), et pour chacune de ces branches aboutissant, on a sur la branche $k$ coefficients $p$ et $n–k$ coefficients $1–p$, donc la probabilité est de $p^k(1-p)^{n-k}$.

(4) $100$ est la valeur finale obtenue avec $4$ succès, et c'est bien aussi la valeur moyenne espérée. En effet, avec $k$ succès et $n-k=12-k$ échecs, on obtient une valeur finale de $100+10k-5\,(12\text{-}k)=100-60+15k=40+15k$ ; la valeur moyenne est $\sum_0^n(40+15\,k)P(X=k)=40+15\sum_0^n k\,P(X=k)=40+15\,E(X)$, autrement dit la valeur correspondant à $E(X)=4$ succès.

(5) Il doit être clair que, les valeurs des gains et des pertes étant fixés, la valeur moyenne espérée dépend des probabilités de succès et d'échec. La conjecture est vérifiée lorsque ces probabilités sont égales à $1/2$, parce qu'alors on a toujours une symétrie de part et d'autre de la valeur centrale, mais cette moyenne ne peut pas rester la même si on change les probabilités.