[Le téléphone magique]

[Année 2014- 2015]

Noms et Prénoms des élèves : Gaël Launay (4ème), Fanny Duval-Dachary (4ème), Léon Guillement (6ème), et Adélie Defrenne (6ème)

Établissements : Collége Victor Hugo à Nantes, jumelé avec le collège du Haut Gesvres à Treillères.

Enseignant-e-s : Mme Le Guyader et Mr Guérin

Chercheur : Damien Gobin, de l'Université de Nantes

Tout d'abord, **nous tenons à remercier le CNRS pour son soutien financier** dans notre projet MATh.en.JEANS.

Présentation du sujet :

Notre sujet est « Le téléphone magique ». L'énoncé est le suivant:
Sur les 9 touches d'un clavier de téléphone, on choisit trois chiffres de telle sorte qu'il y ait exactement un chiffre par colonne et par ligne.On calcule ensuite la somme de ces trois chiffres.

1. Que constate-t-on ?
2. Existe-t-il un résultat similaire pour un téléphone avec 16 touches rangées dans un carré 4 par 4 ? Que peut-on dire d'un téléphone plus grand ?

Annonce des conjectures et résultats obtenus :

Nous avons constaté que, pour un téléphone à 9 touches, la somme des trois chiffres choisis est toujours 15, et que, pour un téléphone à 16 touches, la somme des quatre chiffres choisis est toujours 34.
Nous avons trouvé une formule qui donne la somme pour un téléphone de taille n par n, que nous vous exposerons.

Texte de l'article :

-Pour un carré 3x3

Pour trouver la raison pour laquelle la somme de trois chiffres (un par ligne et un par colonne) était toujours quinze, nous nous sommes rendu compte qu'il fallait décomposer le clavier :

	+1	+2	+3
+0	1 (1+0)	2 (2+0)	3 (3+0)
+3	4 (1+3)	5 (2+3)	6 (3+3)
+6	7 (1+6)	8 (2+6)	9 (3+6)

Pour chaque ligne, on additionne les trois premiers multiples de trois: 0, 3 et 6 (3 car c'est un clavier de 3x3 ; pour un clavier 4x4 par exemple, on prendrait les quatre premiers multiples de quatre).

Pour les colonnes, on additionne 1, 2 et 3.

Donc, si on prend un chiffre par ligne et un par colonne, on a forcément : $1+2+3+0+3+6=15$; c'est pourquoi la somme est toujours 15.

-Pour un carré 4x4

Pour un carré 4x4, c'est pareil que pour le carré 3x3 (voir le dessin page suivante). La seule différence est que l'on utilise les multiples de 4 pour les rangées de ce carré (car c'est un carré 4x4).

Donc, si on prend un chiffre par ligne et un par colonne, on a forcément :

$1+2+3+4+0+4+8+12=34$

La somme obtenue est toujours égale à 34.

On devine alors que le système reste le même pour n'importe quel clavier.

	+1	+2	+3	+4
+0	0+1	0+2	0+3	0+4
+4	4+1	4+2	4+3	4+4
+8	8+1	8+2	8+3	8+4
+12	12+1	12+2	12+3	12+4

-Pour un carré n x n

Pour le carré n x n, on décompose le clavier de la même façon que pour les autres téléphones; ainsi si l'on additionne 1 chiffre par ligne et par colonne, nous nous retrouvons avec:

0+1n+2n+...+(n-1)n+1+2+...+n

En bleu dans le formule ci-dessus, ce sont les multiples de n (si n = 3, cela revient à 0; 3; 6) et, en vert, on a les chiffres de 1 à n.

La formule est trop longue pour que l'on puisse s'en servir ; nous avons donc cherché à la simplifier : pour cela, nous l'avons séparée en deux ; d'un côté 0+1n+2n+...(n-1)n, et de l'autre 1+2+...+n .

1) Avec la première partie 0+1n+2n+...(n-1)n, nous avons formé des compléments à (n-1)n en additionnant à la somme (n-1)n + (n-2)n + (n-3)n + … + 0 c'est-à-dire la somme en miroir :

0 + 1n + 2n + … + (n-1)n

(n-1)n + (n-2)n + (n-3)n + … + 0

On obtient : $\frac{(n(n-1)n)}{2}$ ce qui est égal à $\frac{(n^2(n-1))}{2}$

$$\frac{(n^2(n-1))}{2} = \frac{(n \times n \times n + n^2 \times (-1))}{2} = \frac{(n^3 - n^2)}{2}$$

2) Avec la seconde partie **1+2+...+n** , nous avons formé des compléments à **n+1** de la même façon qu'avec la première !

0 + 1 + 2 + ... + n

\+ n + n-1 + n-2 + … + 0

on obtient $\frac{(n(n+1))}{2} = \frac{(nxn+nx1)}{2} = \frac{(n^2+n)}{2}$

Désormais on peut rassembler les deux formules on obtient

$$\frac{(n^3-n^2)}{2} + \frac{(n^2+n)}{2} = \frac{(n^3-n^2+n^2+n)}{2} = \frac{(n^3+n)}{2} \text{ ou } \frac{(n(n^2+1))}{2}$$

Conclusion:

On obtient toujours une même somme pour un type donné de clavier, un résultat qui s'explique par une formule littérale, que les plus forts du groupe (en 4ème) sont fiers d'avoir trouvée et expliquée aux autres élèves du club Math.en.Jeans !