Topins & Gelins

(année 2015-2016)

- Louis Rey, Guillaume Brochier, Johan Félisaz, Bastien Converset TS

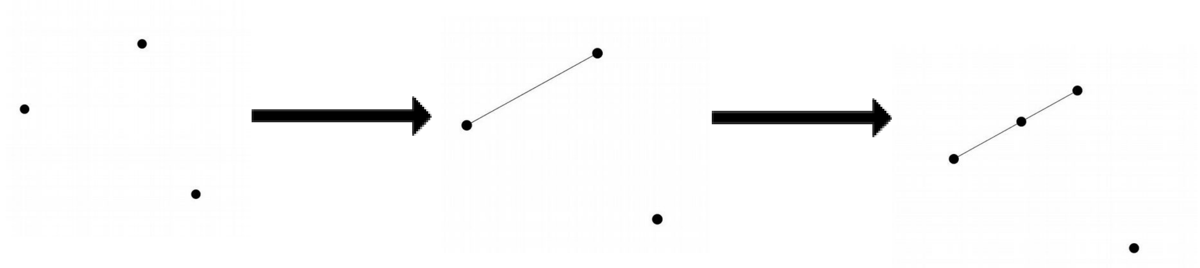
- Lycée de la Versoie, à **Thonon-les-Bains**, jumelé avec l'institut Florimont à **Genève**

- Mme Biglione et M. Lamboley

- Mounir Benheddi, de l'Université de Genève

Présentation du problème

Nous allons étudier le fonctionnement ainsi que les stratégies d'un jeu à deux joueurs au premier abord assez simple, mais qui peut se révéler très complexe. Une partie commence avec trois points. Chacun leur tour, les deux joueurs tracent une ligne entre deux points déjà existants puis placent un nouveau point sur cette ligne. Ainsi à chaque tour, les joueurs créent 1 point et 2 lignes.



Une ligne n'est pas nécessairement droite : elle peut être courbe. On ne peut pas former une ligne à partir d'un point appartenant déjà à 3 lignes ; on ne peut pas non plus relier un point à lui-même. La partie se termine quand il n'y a plus de points reliables : le joueur qui ne peut alors plus jouer perd.

De plus, chaque joueur peut utiliser, une fois par partie, un joker. Il permet d'effacer une partie d'une ligne avant de relier deux points. Toutes les nouvelles lignes pourront ainsi la traverser, que ce soit celles d'un joueur ou de l'autre.

Notre but va être de tout d'abord vérifier si le jeu est nécessairement fini, puis de tenter de trouver une stratégie gagnante pour un des deux joueurs, et enfin de généraliser le problème en changeant le nombre de points de départs, ou le nombre maximum de lignes que l'on peut former à partir d'un point.

Définitions et notations

- Une ligne sert à relier un point à un autre. Ce n'est qu'un segment reliant 2 points : à chaque tour les joueurs créent donc 2 lignes. (1)
- Le degré d'un point p au temps n, noté $deg(p, n)$ est le nombre de lignes auxquelles le point p appartient au temps n. (un point qui appartient à 2 lignes sera de degré 2). Le degré maximal est noté d_{max}. Un point de degré d_{max} est dit mort : on ne peut plus l'utiliser pour former de nouvelles lignes.

- Un coup est le fait qu'un joueur relie deux points existants et place un nouveau point sur la ligne ainsi créée (il peut éventuellement utiliser son joker au préalable).
- Le joker se dessine en supprimant une partie de ligne déjà existante, permettant le passage de plusieurs lignes à travers une autre.
- Pour plus de clarté, nous désignerons par la suite le joueur qui commence et le second joueur par J1 et J2, respectivement.
- On note k le nombre de points de départ.
- Une partie classique est une partie commençant avec 3 points de départ et où un point ne peut pas appartenir à plus de 3 lignes. On a donc $k=3$ et . $d_{max}=3$

Premiers résultats : la limite du jeu

Nous avons donc commencé par faire des parties classiques. La première étape était de savoir si le jeu se terminait tout le temps, ou s'il existait des configurations de jeu potentiellement infinies. Pour cela, nous allons étudier un modèle simplifié de partie, en étudiant seulement le nombre de points et leur degré.

On pose n l'avancement de la partie : lorsque $n=0$, personne n'a encore joué, et quand $n=2$, J1 a joué une fois, et J2 aussi. On définit aussi un nouvel attribut des points : leur nombre de vie. Le nombre de vie d'un point p , noté $v(p,n)$ correspond au nombre de lignes que l'on peut potentiellement former depuis ce point au temps n . On a donc : $v(p,n)=d_{max}-deg(p,n)$. (2)

On définit la suite (V_n) , en fonction de l'avancement de la partie, correspondant au nombre de vie total de tous les points : $V_n=\sum_{(p\in P)} v(p,n)$

où P est l'ensemble des points de la partie. Celle-ci commence avec *k* points de départ, donc : . $V_0=k\cdot d_{max}$

Ainsi dans une partie classique , .

Quand un joueur joue, il relie deux points, et forme un nouveau point sur la ligne. Il va donc enlever une vie à un premier point, puis une autre à un deuxième. En créant un point, il va ajouter d_{max} vies à V_n, mais il faudra en soustraire 2 : le point étant déjà sur une ligne, 2 de ses vies sont déjà utilisées. Cela se traduit par la relation de récurrence :

$$V_{n+1}=V_n-2+(d_{max}-2)=V_n+d_{max}-4$$

Le degré maximal étant constant au cours d'une partie, (V_n) est alors une suite arithmétique de premier terme $V_0=k\cdot d_{max}$, et de raison $d_{max}-4$: $V_n=kd_{max}+n(d_{max}-4)$

Une partie se termine quand les joueurs ne peuvent plus relier de points. Pour qu'elle continue après le temps n il faut donc que . $V_n\geq 2$

- On ne s'intéresse pas à des parties telles que $d_{max}<2$: elles se termineraient toutes en 1 coup voire moins .
- Si $d_{max}\geq 4$: la raison de (V_n) est positive ou nulle, la suite est constante ou croissante. Il pourra exister des parties (voire toutes) qui ne se termineront jamais.
- Si $2\leq d_{max}<4$: la raison de (V_n) est négative : la suite est décroissante. De plus, (V_n) est à valeur dans les entiers : il existe donc forcément une valeur n_0 telle que $V_{n_0}<2$ .Toutes les parties seront donc finies au temps n_0 .

Ainsi, si l'on connaît k et d_{max}, on peut déterminer le nombre maximal de coups de la partie. Celui-ci ne sera pas toujours atteint : comme deux lignes ne peuvent pas se croiser,(3) on pourrait isoler un point, et donc terminer la partie prématurément. Toutefois, si l'on atteint le plus grand temps n tel que $V_n\geq 2$, on peut savoir l'issue de la partie : celui jouant après ce temps n va gagner car jouera le dernier coup possible. Comme vu plus haut, des valeurs de d_{max} autres que 2 ou 3 ne sont pas intéressantes. On va donc choisir, pour la suite, $d_{max}=3$. En résolvant l'inéquation précédente pour trouver n :

$$V_n=kd_{max}+n\cdot(d_{max}-4)\geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3k-n\geq 2 \Leftrightarrow 3k-2\geq n$$

Comme (V_n) est de raison $d_{max}-4=-1$, deux termes consécutifs seront espacés de 1. Le plus grand entier n tel que $3k-2\geq n$ est donc

$n = 3k - 2$. Ainsi avec 3 points de départ, $n=7$. Cela signifie que si la partie atteint le temps 7, le joueur qui va jouer juste après gagnera. Le premier coup se fait après le temps 0, le deuxième après le temps 1, et ainsi de suite : une partie se terminera donc en $n+1$ coups au maximum. Il nous suffit donc d'étudier la parité de n pour déterminer le joueur gagnant. En effet, J1 joue après le temps 0, puis le temps 2, et ainsi de suite : si n est pair, J1 gagne et J2 perd, et inversement.

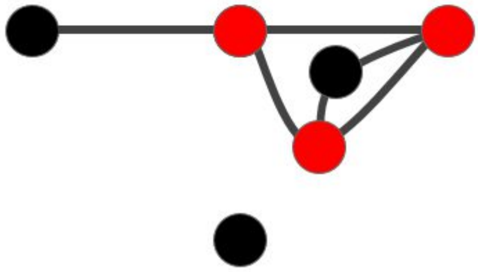
$k \equiv ... (2)$	$n \equiv ... (2)$	Joueur gagnant
0	$3\times0-2\equiv-2\equiv0$	J1
1	$3\times1-2\equiv1$	J2

Ainsi, en appliquant cela à une partie classique, on apprend qu'elle se termine au maximum en 8 coups, et que c'est J2 qui gagne à l'issue de ces 8 coups.

<u>Des stratégies gagnantes ?</u>

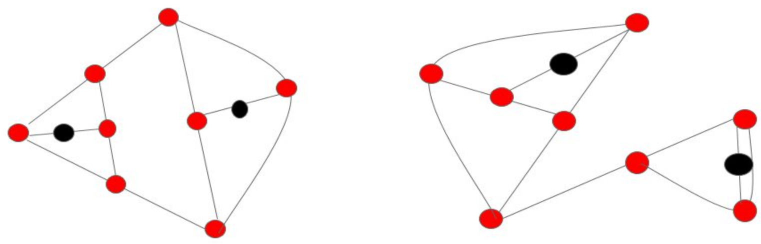
Une stratégie gagnante pour un joueur est une stratégie telle que si ce joueur la suit, quelques soient les coups de l'adversaire, celui-ci perde à coup sûr. Dans la section précédente, nous avons vu quel joueur allait gagner en fonction de k, si la partie atteint son nombre maximum de coups. Cela ne prédit cependant pas l'issue de toutes les parties, car elles peuvent se terminer avant. Cela donne toutefois une base pour la recherche de stratégie gagnante.

En effet, dans une partie classique, J1 devra donc écourter la partie s'il veut gagner : si elle se termine en 7 coups (ou tout autre nombre impair de coups) c'est lui qui remporte la victoire. Pour cela, le seul moyen est de faire en sorte qu'un point, avec un nombre impair de vies, ne soit plus utilisable, car entouré de lignes : on dit qu'il est isolé.



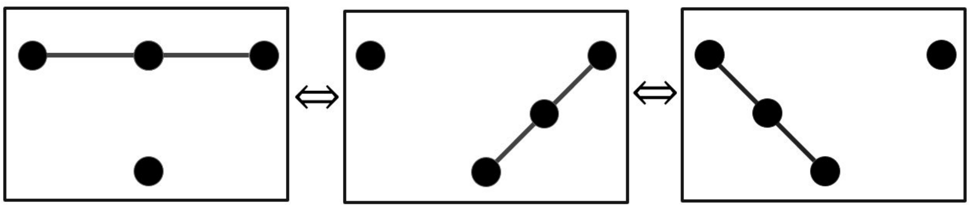
Sur l'image ci-contre, on peut voir un exemple de configuration où un point est isolé. Les points rouges sont morts, ils sont de degré 3, et les autres points sont inaccessibles sans croiser deux lignes. Il y a cependant une faille : J2 peut tout à fait utiliser son joker sur une des lignes pour libérer le point isolé. Il a donc fallu

trouver des configurations de parties où, même avec un joker, un point est isolé du reste de la partie.
En voici deux exemples :

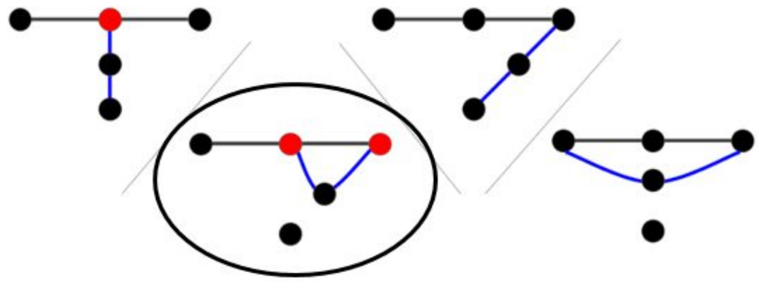


Toutefois, il est rare d'atteindre ces configurations contre un vrai adversaire : il n'en existe pas beaucoup, donc si J2 les connaît, il pourra facilement les éviter et donc gagner. Empiriquement, il nous a donc fallu trouver une configuration que J2 ne pourrait pas éviter, même en utilisant un joker. Nous en avons trouvé une. Il s'avère toutefois que ce n'est pas une stratégie gagnante elle ne permet pas de gagner toutes les parties en tant que J1, car suppose que J2 réalise un premier coup qui le désavantage.

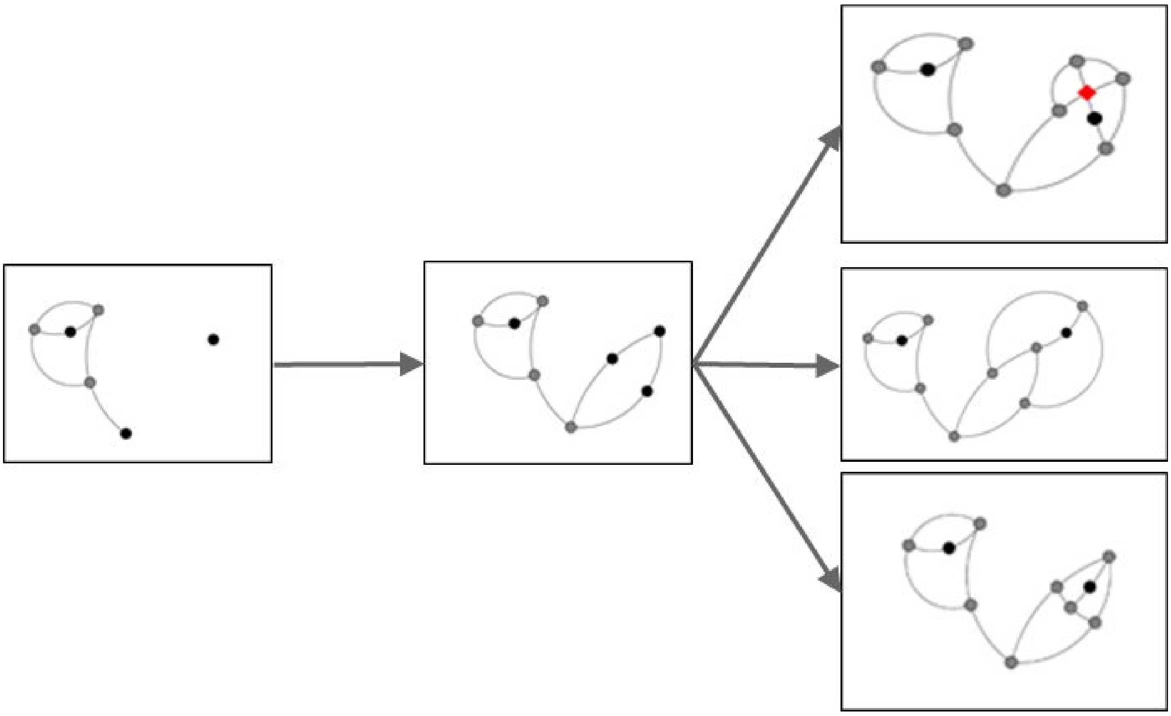
Le premier coup de J1 est toujours le même car les trois points de départ sont équivalents.



J2 a donc quatre possibilités pour son premier coup, décrites ci-dessous.

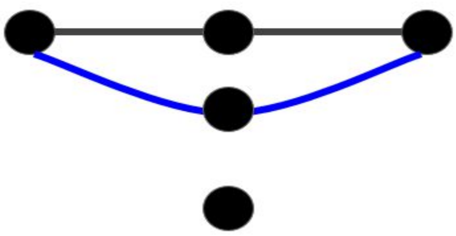


La stratégie gagnante pour J1 (qui n'en est donc pas vraiment une) que nous avons trouvée ne s'applique que si J2 réalise le coup entouré. Une telle stratégie est trop longue à exposer; c'est pourquoi nous n'avons représenté ces différentes étapes qu'en fonction des coups de J2, et en ignorant les cas



où celui-ci utilise son joker. Le losange rouge représente le joker du J1.

Après avoir étudié toutes les possibilités de ce cas précis, nous nous sommes intéressés à celui-ci :



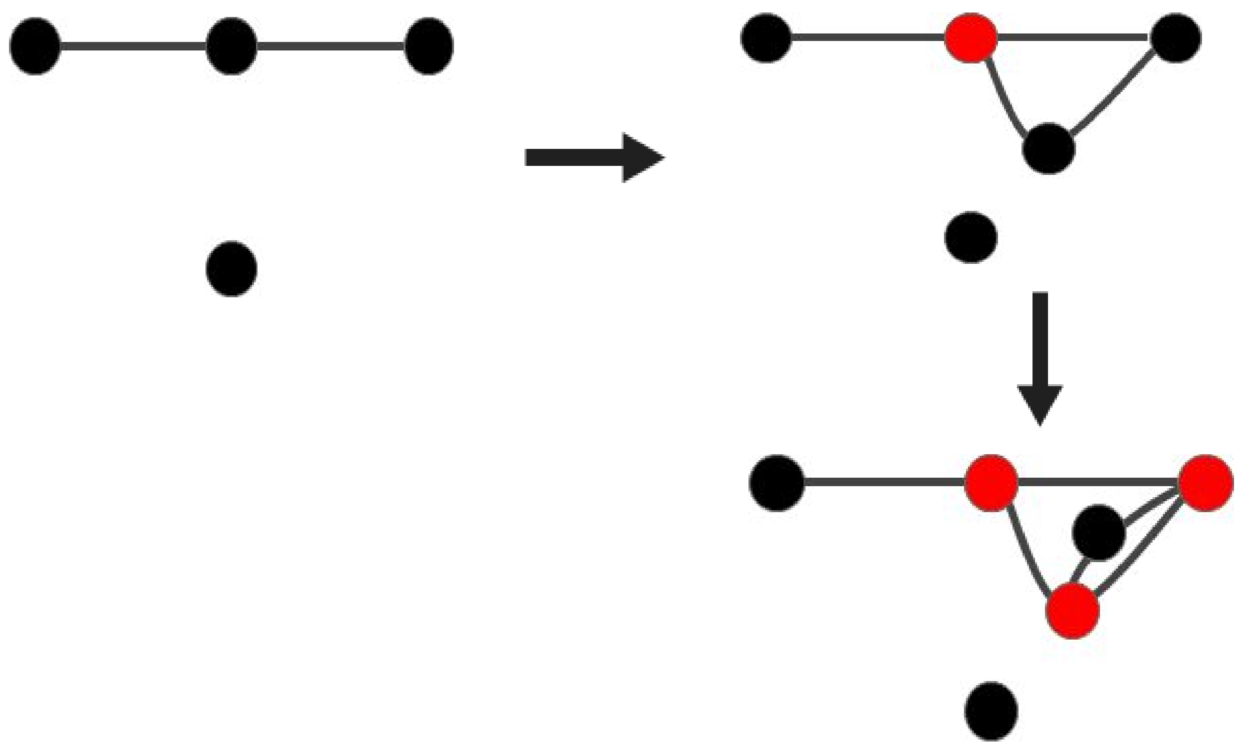
Or en explorant toutes les possibilités, nous n'avons trouvé aucune stratégie gagnante pour J1 en partant de cette configuration : si J2 choisit les bons coups, il aura toujours un moyen de gagner. Or c'est son premier coup qui détermine si la partie atteint cette configuration ou non : il existe donc une stratégie gagnante à tous les coups pour J2, dont le premier coup est d'atteindre cette configuration. Cela ne signifie cependant pas que si J2 atteint cette configuration, il gagne forcément. Malheureusement, il y a beaucoup de cas à traiter pour en être sûr ; c'est surtout une conjecture, tant le fait de commettre une erreur et oublier une branche de possibilité est facile.

Coups avantageux

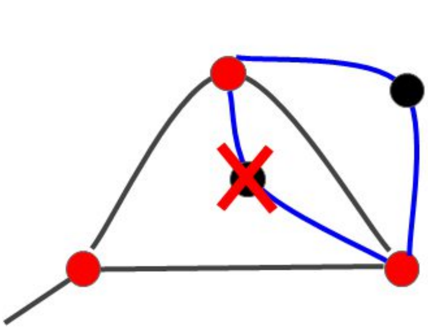
Comme nous l'avons vu plus haut, la recherche de stratégie gagnante est plutôt empirique et fastidieuse ; il est donc difficile de la généraliser avec

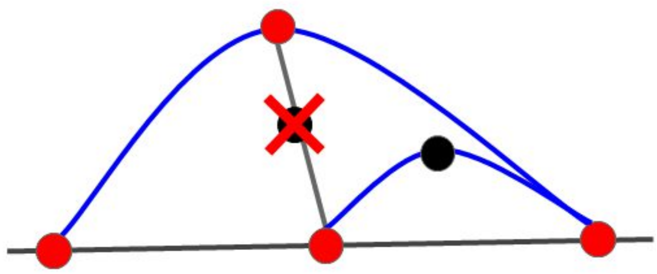
plus de trois points de départ. C'est pourquoi nous avons essayé de savoir s'il existait des coups plus avantageux que d'autres. Ce n'est pas vraiment une stratégie gagnante, mais plutôt des coups qui influenceraient la tendance de la partie, et qui seraient toujours utilisables avec plus de points de départ.

Selon les règles des parties, on va distinguer deux profils de joueurs : le joueur avantagé, et le joueur désavantagé. Le premier est celui qui gagne lorsque la partie se termine avec le nombre maximal de coups. Dans une partie classique, J1 est le joueur désavantagé et J2 le joueur avantagé. Le joueur désavantagé devra alors tenter d'isoler des points, pour que la partie se termine un nombre impair de coups plus tôt ; le joueur avantagé devra l'en empêcher. Nous avons trouvé une façon rapide d'isoler un point pour le J1, pouvant être achevée au bout du troisième coup :



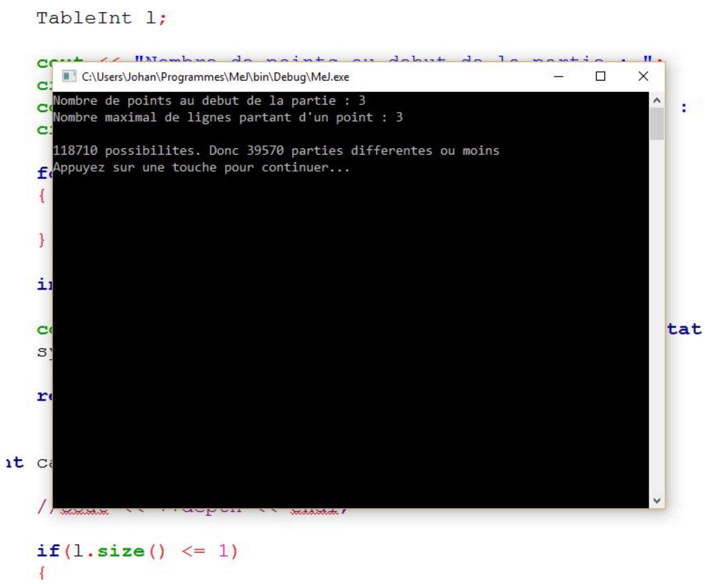
Inversement, pour le joueur avantagé, il faudra essayer de limiter au maximum les possibilités d'isolement des points. Une des solutions pour cela est par exemple de bien choisir où placer son point quand on peut le créer de part et d'autre d'une ligne. En effet, dans les schémas qui suivent, le joueur avantagé peut (entre autres) créer soit un des deux points noirs, soit l'autre. Il lui faut généralement éviter de former celui marqué d'une croix rouge et choisir l'autre, car il permettra à son adversaire d'isoler facilement un point au tour suivant.





<u>Recherches inabouties</u>

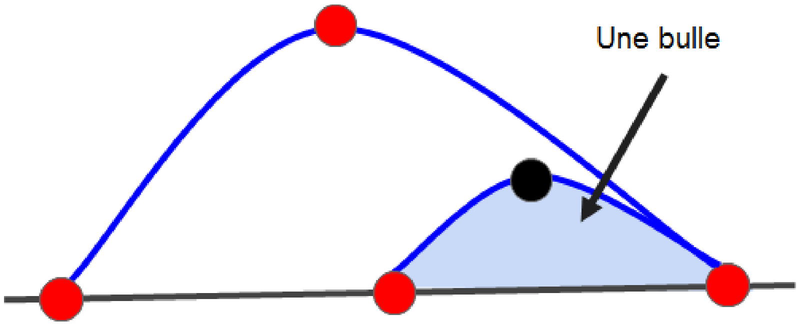
- Calcul du nombre de possibilités : nous avions créé un programme pour calculer le nombre de parties différentes auxquelles on pouvait aboutir en fonction de k et de d_{max} . Celui-ci simulait des parties de la même manière que lorsque nous avons étudié la limite du jeu : en



stockant le nombre de vie de chaque point.

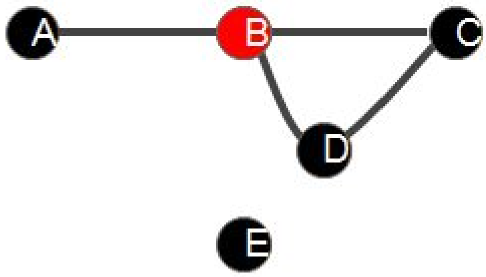
- Malheureusement, il était difficile de savoir si deux parties étaient équivalentes ou pas : beaucoup de parties ont été comptées en plusieurs fois : on obtenait 118 710. Or comme le premier coup de J1 donne toujours la même configuration, on peut diviser ce nombre par 3 et donc obtenir 39570 possibilités. Ce nombre n'est évidemment pas le nombre réel de possibilités, mais plutôt une borne maximale. Cela nous a permis de commencer une étude empirique des stratégies gagnantes en sachant que le nombre de parties n'est pas trop grand.
- Recherche d'une stratégie gagnante : en s'inspirant de travaux sur un jeu proche de Topins et Gelins, le Sprouts, nous avons trouvé un moyen de représenter une partie permettant à une machine de "jouer" toute seule. Pour cela, on introduit le concept de bulle : une bulle est un espace clos délimité par un enchaînement de points et de lignes, comme visible sur la figure ci-dessous.

-



Ces bulles peuvent avoir une ou plusieurs frontières, c'est à dire une suite de points qui délimite la bulle. Il est à noter que l'espace à l'extérieur de toutes les bulles est aussi une bulle. En donnant un nom arbitraire à chaque point, on arrive à représenter l'état d'une partie comme étant un ensemble de bulles, elles-mêmes étant des ensembles de frontières, elles-mêmes étant des suites de caractères représentant des points.

- Par exemple, l'état :



peut être représentée par l'expression : $\{(ABDCB),(E)\},\{(BCD)\}$, et même, en remplaçant les accolades par le signe '/' et les parenthèses par '-' (signifiant respectivement la fin d'une bulle et la fin d'une frontière) : $ABDCB-E-/BCD-/$. Avec une écriture comme celle-ci, il serait possible de faire calculer toutes les possibilités à l'ordinateur, et d'en déduire une stratégie gagnante, automatiquement. Malheureusement, nous avons découvert cette représentation tard, et nous n'avons pas fini de programmer tout cela avant la rédaction de cet article.

Conclusion

Ainsi, Topins et Gelins bien qu'en apparence très simple, se révèle assez complexe quand il s'agit de trouver une stratégie gagnante, et encore plus quand il s'agit de le généraliser à des parties à k points de départ.

Étudier ce problème et le présenter dans le cadre des ateliers Math.en.Jeans a été une expérience enrichissante et inoubliable. C'est pourquoi nous voudrions remercier principalement nos professeurs et encadrants, M. Lamboley et Mme Biglione, ainsi que le chercheur M. Benheddi pour son aide précieuse, et enfin toutes les autres personnes qui ont permis à cette fabuleuse expérience MATh.en.JEANS d'exister.

Notes d'édition

(1)Une ligne n'est en fait pas un segment car ce n'est pas forcément une ligne droite, comme mentionné auparavant.

(2) La définition de l'avancement de la partie n devrait plutôt apparaître dans la partie « Définitions et notations ».
Le nombre de **vie** devrait plutôt s'appeler nombre de **vies**.

(3) Il faudrait dire « deux lignes ne peuvent pas se croiser » beaucoup plus tôt dans l'article, même si c'est sous-entendu dans la présentation du jeu.