LE VENDEUR DE POLYEDRES

année 2012

Elèves de 4ème et de 5ème
CAMUS Octavie, CULOT Maxime, DUPUY Merlin et DUVAL Lucie
Etablissement :
Collège Charles Péguy, 37 avenue du général Leclerc 91120 Palaiseau
Enseignante :
DAMONGEOT Cécile
Chercheur :
COULAUD Olivier

Le sujet :

«Je voudrais un polyèdre avec 6 arêtes, 4 faces et 2 sommets.»

Est-ce que le vendeur peut toujours satisfaire son client? Y a t-il des familles de demandes pour lesquelles il n'hésite pas à prendre un polyèdre ?

I Introduction

1.1 Stratégie :

Nous avons cherché de deux manières différentes :
- la première était, en connaissant un triplet de nombres,de voir le solide que ça donnait. Cette technique était compliquée dans la mesure où nous ne connaissions pas de liens concrets entre les différents polyèdres.
- la seconde était de chercher des liens entre les polyèdres de la même famille, en partant de polyèdres connus comme la pyramide. **(1)**

1.2 Définition du polyèdre :

Un polyèdre est une forme géométrique en trois dimensions ayant des polygones pour faces qui se rencontrent selon des segments de droite qu'on appelle arêtes.

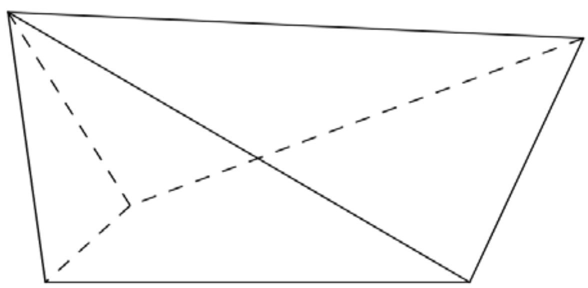


fig1

1.3 Convention de notation

f désigne le nombre de faces.
s désigne le nombre de sommets.
a désigne le nombre d'arêtes.
Nous obtenons le triplet faces/sommets/arêtes (f,s,a).
n désigne le nombre de sommets d'une base.

II Pyramides:

2.1 Définition:

Une pyramide est un solide à base polygonale et à faces latérales triangulaires, et dont les sommets se réunissent en un point.

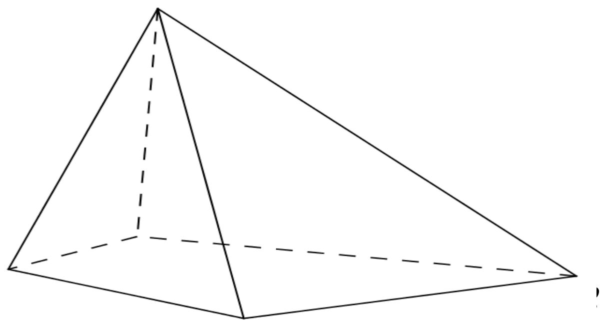


fig 2

2.2 Valeurs minimales :

Le plus petit nombre de faces possibles pour un polyèdre est 4 : on obtient un tétraèdre.
C'est une pyramide à base triangulaire : 4 faces, 4 sommets et 6 arêtes.

Base	f	s	a
Triangle n = 3	4	4	6
Quadrilatère n = 4	5	5	8
Pentagone n = 5	6	6	10
Hexagone n = 6	7	7	12
Heptagone n = 7	8	8	14

On observe une relation entre f, s, a :
- **f = s**
- **a=2n**

De plus f = n+1 et s = n+1
On en déduit que : f + s = n + 1 + n + 1
= 2n + 2

Donc f + s = a + 2.

III Prismes

3.1 Définition :

Un prisme est un polyèdre dont les bases sont deux polygones égaux à côtés parallèles et dont les faces latérales sont des parallélogrammes.

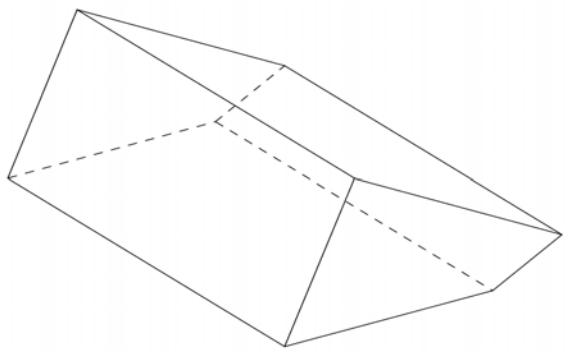


fig 3

3.2 Valeurs minimales :

Le plus petit prisme possible est un prisme à base triangulaire. Il possède 5 faces, 6 sommets et 9 arêtes. Les valeurs minimales pour f,s et a sont donc 5, 6 et 9.

Base	n	f	s	a
Triangle	3	5	6	9
Quadrilatère	4	6	8	12
Pentagone	5	7	10	15
Hexagone	6	8	12	18
Heptagone	7	9	14	21

En comparant n, f, s et a, on remarque que :

- **f = n+2**
- **s = 2n**
- **a = 3n**
- **f+s = a+ 2**

3.3 Pyramide tronquée :

Une pyramide tronquée est une pyramide sans sommet principal. Elle possède les mêmes caractéristiques qu'un prisme. Mais elle ne conserve pas toujours les bases parallèles.

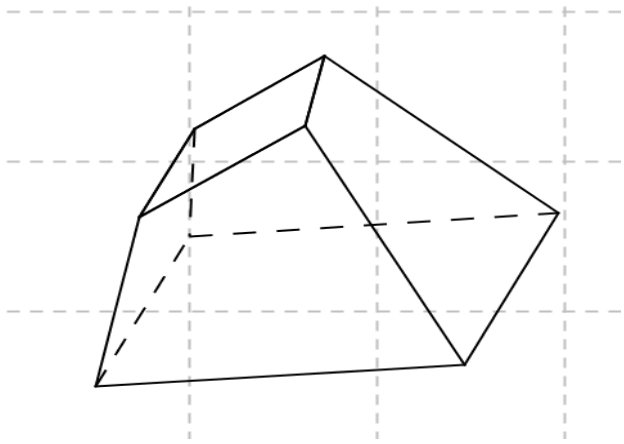


fig 4

On obtient les mêmes valeurs pour f, s, a.

IV Addition de polyèdres

4.1 Prisme + 1 pyramide à la base :

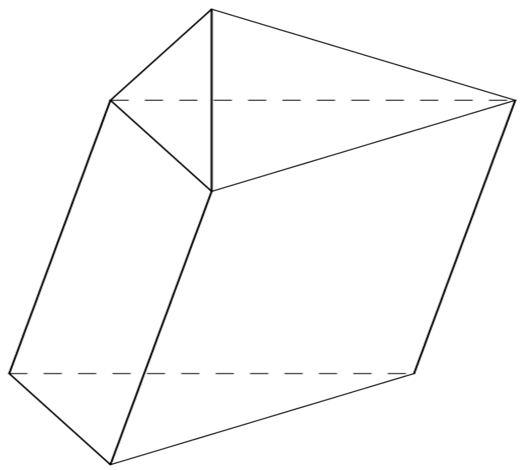


fig 5

- **f = 2n + 1** : une des faces du prisme disparaît sous la pyramide, le prisme initial a donc n+1 faces, et la pyramide rajoute n faces.

- **s = 2 n + 1** : le prisme initial a 2n sommets et la pyramide rajoute son sommet commun.

- **a=4n** : le prisme initial a 3n arêtes et la pyramide en rajoute n.

On obtient (f, s, a) = (2n+1, 2n+1, 4n)

De plus on retrouve la relation **f + s = a + 2.**

4.2 Prisme + 2 pyramides aux bases :

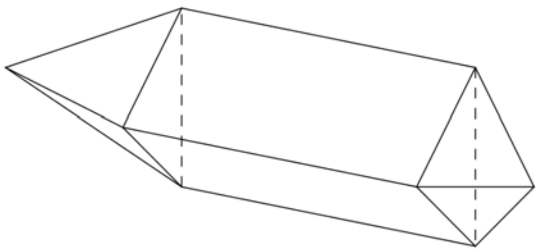


fig 6

- **f = 3n** : le prisme a n faces latérales et chaque pyramide a n faces latérales.

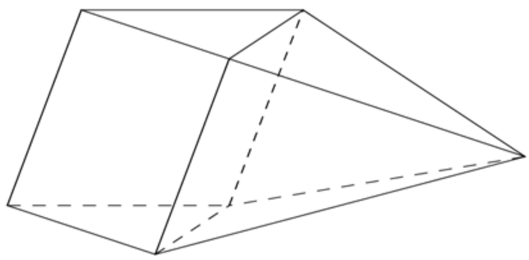
- **s = 2 n + 2** : le prisme initial a 2n sommets et les pyramides rajoutent 2 sommets .

  a = 5n : le prisme initial a 3n arêtes et les pyramides en rajoutent 2n.

On obtient (f, s, a) = (3n, 2n+2, 5n)

De plus on retrouve la relation **f + s = a + 2.**

4.3 Prisme + 1 pyramide sur une face latérale :



○

fig 7

- **f = n + 5** : Le prisme initial a n faces latérales plus ses 2 bases moins 1 qui a disparu sous la pyramide. La pyramide a 4 faces.

- **s = 2 n + 1** : le prisme initial a 2n sommets et la pyramide rajoute 1 sommet .

- **a = 3n + 4 :** le prisme initial a 3n arêtes et la pyramide a 4 arêtes latérales.

On obtient (f, s, a) = (n+5, 2n+1, 3n+4)

On observe toujours la relation **f + s = a + 2.**

4.4 Prisme + pyramides sur deux faces latérales :

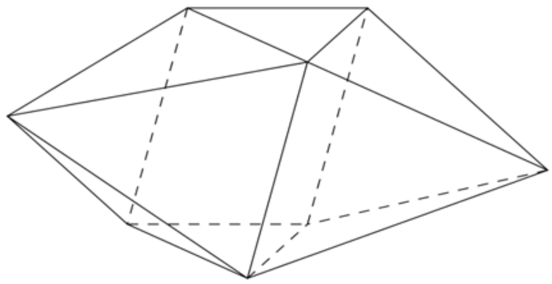


fig 8

- **f = n + 8** : le prisme initial a n faces latérales plus ses 2 bases moins 2 qui ont disparu sous la pyramide. Les pyramides ont en tout 8 faces.

- **s = 2 n + 2** : le prisme initial a 2n sommets et les pyramides rajoutent 2 sommets .

- **a = 3n + 8 :** le prisme initial a 3n arêtes et les pyramides ont en tout 8 arêtes latérales.

On obtient (f, s, a) = (n + 8, 2n+2, 3n+8)

On observe toujours la relation **f + s = a + 2**

4.5 Prisme + pyramides sur toutes les faces latérales :

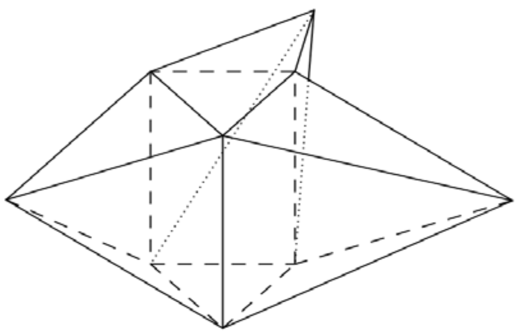


fig 9

- **f = 4n + 2** : toutes les faces latérales du prisme disparaissent sous les pyramides et il ne garde que ses deux bases. Les n pyramides latérales ont en tout 4n faces.

- **s = 3 n** : le prisme initial a 2n sommets et les n pyramides rajoutent n sommets .

- **a = 7n :** le prisme initial a 3n arêtes et les n pyramides ont en tout 4n arêtes latérales.

On obtient (f, s, a) = (n + 8, 2n+2, 3n+8)

On observe toujours la relation **f + s = a + 2.**

4.6 Prisme + pyramides sur toutes les faces :

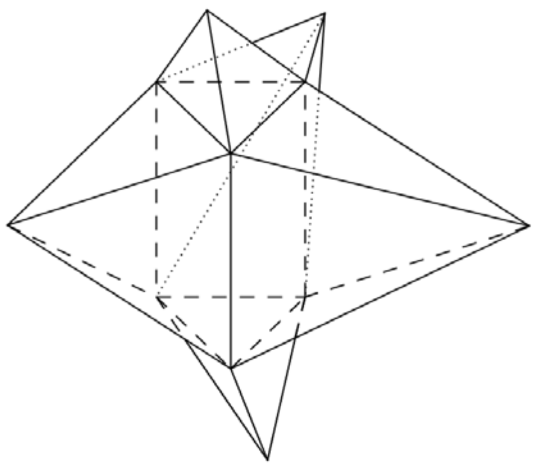


fig 10

- **f = 6n** : toutes les faces du prisme disparaissent sous les pyramides. Les n pyramides latérales et les deux pyramides des bases ont en tout 6n faces.

- **s = 3 n + 2** : le prisme initial a 2n sommets et les n + 2 pyramides rajoutent n + 2 sommets .

- **a = 9n :** le prisme initial a 3n arêtes. Les n pyramides latérales ont en tout 4n arêtes latérales. Les deux pyramides des bases ont en tout 2n arêtes.

On obtient (f, s, a) = (6n, 3n+2, 9n)

On observe toujours la relation : **f + s = a + 2.**

__V Conclusion__

Pour n supérieur ou égal à 3 :

	F	**S**	**A**
Pyramide	n+1	n+1	2n
Prisme	n+2	2n	3n
Prisme + 1 pyramide à la base	2n+1	2n+1	4n
Prisme + 2 pyramides aux bases	3n	2n+2	5n
Prisme + 1 pyramide latérale	n+5	2n+1	3n+4
Prisme + 2 pyramides latérales	n+8	2n+2	3n+8
Prisme +n pyramides latérales	4n+2	3n	7n
Prisme + pyramides sur toutes les faces	6n	3n+2	9n

Ce tableau fournit au vendeur de polyèdres un stock non négligeable de polyèdres !

Première application :

Cela permet donc de choisir un polyèdre à partir de n'importe quel nombre n. Mais les trois valeurs f, s et a ne peuvent pas être choisies librement.

__Exemple pour une pyramide avec 11 sommets à la base :__
Le nombre de faces est 12.
Le nombre de sommets est aussi égal à 12.
Le nombre d'arêtes est égal 22.

__Pour un prisme à base triangulaire avec des pyramides sur toutes les faces:__
Le nombre de faces est 18.
Le nombre de sommets est égal à 11.
Le nombre d'arêtes est 27.

Deuxième application :

On peut choisir le nombre de faces, de sommets ou d'arêtes sans tenir compte des autres paramètres. On en déduit ensuite le nombre n et cela nous permet de choisir un polyèdre avec le bon nombre de faces, de sommets ou d'arêtes. Cependant, il y a quelques restrictions.

<u>A partir du nombre de faces :</u>

- Quel que soit le nombre imposé de faces , on peut considérer une pyramide, un prisme, un prisme+1 pyramide latérales ou un prisme+2 pyramides latérales ayant le bon nombre de faces.
- Si le nombre imposé de faces est impair, on peut aussi considérer un prisme avec une pyramide à la base.
- Si le nombre imposé de faces est un multiple de 3, on peut considérer un prisme avec deux pyramides aux bases.
- Si le nombre imposé de faces est un multiple de 6, on peut considérer un prisme avec des pyramides sur toutes les faces.
- Seul un nombre imposé de faces de la forme 4n + 2 (exemples : 14, 18, 22...) peut engendrer un prisme avec des pyramides sur toutes les faces latérales.

<u>Exemple pour 21 faces</u> :
le vendeur proposera tous les polyèdres de notre tableau, sauf le prisme avec des pyramides sur toutes ses faces latérales, et le prisme avec des pyramides sur toutes les faces.

<u>A partir du nombre de sommets :</u>

- Quel que soit le nombre de sommets, on peut construire une pyramide ayant ce nombre de sommets.
- Si le nombre imposé de sommets est impair, on peut construire un prisme avec une pyramide sur une base ou sur une face latérale.
- Si le nombre imposé de sommets est un multiple de 3, on peut considérer un prisme avec des pyramides sur toutes les faces latérales.
- Si le nombre imposé de sommets est un multiple de 2 supérieur à 8, on peut considérer un prisme ou un prisme avec deux pyramides aux bases ou latérales.
- Pour pouvoir choisir un prisme avec des pyramides sur toutes les faces, le nombre imposé de faces doit être de la forme 3n + 2, par exemple 11, 13, 15, 17...

<u>Exemple :</u>

Pour 21 sommets, le vendeur proposera :

1. une pyramide dont la base a 20 sommets. (f,s,a)=(21, 21, 20) ;
2. un prisme avec une pyramide à la base dont la base est un décagone. (f,s,a)=(21, 21, 40)
3. un prisme avec une pyramide latérale dont la base est un décagone. (f,s,a)=(15, 21, 34)
4. un prisme avec 7 pyramides latérales dont la base est un heptagone. (f,s,a)=(30, 21, 49)

<u>A partir du nombre d'arêtes :</u>

Les choix sont plus limités que lorsque l'on impose le nombre de faces ou de sommets. Il y-a même des cas où l'on ne peut pas construire de polyèdre adapté avec les classes de polyèdres que l'on a décrites.

- Si le nombre imposé d'arêtes est un multiple de 2, 4, 5, 7 ou 9, il existe un polyèdre ayant le bon nombre d'arêtes dans ceux que l'on a décrits.
- Si le nombre imposé d'arêtes est de la forme 3n + 4 ou 3n + 8 on peut choisir respectivement un prisme avec une pyramide latérale et un prisme avec deux pyramides latérales. Ce sont des nombres de la forme 13, 16, 20....ou 17, 25, 33...

<u>Exemple :</u>

Pour 21 arêtes, le vendeur proposera :

1. un prisme à base triangulaire. (f,s,a)= (9, 14, 21)
2. un prisme à base triangulaire avec trois pyramides latérales. (f,s,a)=(14, 9, 21).

Note d'édition :
(1) : il est question de deux stratégies, mais la deuxième est la seule à être exposée dans la suite de l'article.