

Le transport dans tous ses états !

G. BESSON

CNRS - Université Grenoble Alpes

MATH.en.JEANS

Rennes, 30 mars 2019



Sommaire

Inégalité de Brunn-Minkowski

Transport optimal : origines

Transport optimal contemporain

Courbure

Inégalité de Brunn-Minkowski

A et B deux ensembles compacts de $\mathbf{R}^2$.

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$$

Inégalité de Brunn-Minkowski

A et B deux ensembles compacts de $\mathbf{R}^2$.

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$$



Inégalité de Brunn-Minkowski

A et B deux ensembles compacts de $\mathbf{R}^2$.

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$$



Alors,

$$\sqrt{\text{Aire}(A + B)} \geq \sqrt{\text{Aire}(A)} + \sqrt{\text{Aire}(B)}.$$

Inégalité de Brunn-Minkowski

A et B deux ensembles compacts de $\mathbf{R}^2$.

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$$



Alors,

$$\sqrt{\text{Aire}(A + B)} \geq \sqrt{\text{Aire}(A)} + \sqrt{\text{Aire}(B)}.$$

Une variante,

$$\sqrt{\text{Aire}\left(\frac{A + B}{2}\right)} \geq \frac{\sqrt{\text{Aire}(A)} + \sqrt{\text{Aire}(B)}}{2}.$$

Sommaire

Inégalité de Brunn-Minkowski

Transport optimal : origines

Transport optimal contemporain

Courbure

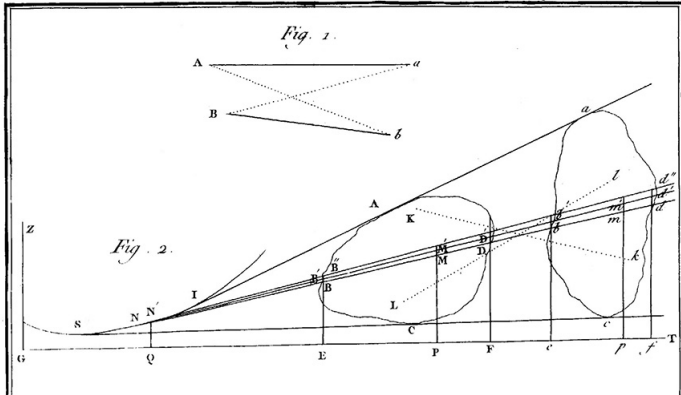
Gaspard Monge (1746-1818)



Le problème des remblais et déblais (Monge, XVIII^{ème} siècle)

Pl. 1.

Mém. de l'Ac. R. des Sc. An. 1781. Page. 704. Pl. XVIII.



Mémoire de Monge sur la Théorie des Déblais & des Remblais,
1781 Source gallica.bnf.fr / BnF

Version combinatoire

Version combinatoire

$$\text{Coût} = \sum_1^4 \text{dist}(A_i, B_{\sigma(i)}),$$

Version combinatoire

$$\text{Coût} = \sum_1^4 \text{dist}(A_i, B_{\sigma(i)}), \# \{\sigma\} = N! = N(N-1)(N-2) \cdots 1,$$

Version combinatoire

$$\text{Coût} = \sum_1^4 \text{dist}(A_i, B_{\sigma(i)}), \quad \#\{\sigma\} = N! = N(N-1)(N-2) \cdots 1,$$

$$\text{Version alternative : Coût}_p = \sum_1^4 (\text{dist}(A_i, B_{\sigma(i)}))^p, \quad p > 0.$$

Version combinatoire

$$\text{Coût} = \sum_1^4 \text{dist}(A_i, B_{\sigma(i)}), \quad \#\{\sigma\} = N! = N(N-1)(N-2) \cdots 1,$$

$$\text{Version alternative : Coût}_p = \sum_1^4 (\text{dist}(A_i, B_{\sigma(i)}))^p, \quad p > 0.$$

Algorithme : N^3 .

Influence du coût

Soit N livres contigus de même épaisseur sur une étagère représentée par un segment.

Influence du coût

Soit N livres contigus de même épaisseur sur une étagère représentée par un segment. On veut les réarranger toujours de façon contiguë mais avec un décalage sur la droite égal à l'épaisseur d'un livre.

Influence du coût

Soit N livres contigus de même épaisseur sur une étagère représentée par un segment. On veut les réarranger toujours de façon contiguë mais avec un décalage sur la droite égal à l'épaisseur d'un livre.

Choix 1 : On déplace tous les livres vers la droite d'une distance égale à l'épaisseur d'un livre.

Influence du coût

Soit N livres contigus de même épaisseur sur une étagère représentée par un segment. On veut les réarranger toujours de façon contiguë mais avec un décalage sur la droite égal à l'épaisseur d'un livre.

Choix 1 : On déplace tous les livres vers la droite d'une distance égale à l'épaisseur d'un livre.

Choix 2 : On déplace le livre le plus à gauche d'une distance égale à N livres et on laisse les autres à leur place.

Influence du coût

Soit N livres contigus de même épaisseur sur une étagère représentée par un segment. On veut les réarranger toujours de façon contiguë mais avec un décalage sur la droite égal à l'épaisseur d'un livre.

Choix 1 : On déplace tous les livres vers la droite d'une distance égale à l'épaisseur d'un livre.

Choix 2 : On déplace le livre le plus à gauche d'une distance égale à N livres et on laisse les autres à leur place.

Question : quel est le meilleur choix ?

Influence du coût

Soit N livres contigus de même épaisseur sur une étagère représentée par un segment. On veut les réarranger toujours de façon contiguë mais avec un décalage sur la droite égal à l'épaisseur d'un livre.

Choix 1 : On déplace tous les livres vers la droite d'une distance égale à l'épaisseur d'un livre.

Choix 2 : On déplace le livre le plus à gauche d'une distance égale à N livres et on laisse les autres à leur place.

Question : quel est le meilleur choix ?

Réponse : Cela dépend

Influence du coût

Soit N livres contigus de même épaisseur sur une étagère représentée par un segment. On veut les réarranger toujours de façon contiguë mais avec un décalage sur la droite égal à l'épaisseur d'un livre.

Choix 1 : On déplace tous les livres vers la droite d'une distance égale à l'épaisseur d'un livre.

Choix 2 : On déplace le livre le plus à gauche d'une distance égale à N livres et on laisse les autres à leur place.

Question : quel est le meilleur choix ?

Réponse : Cela dépend du coût !

Influence du coût

Soit N livres contigus de même épaisseur sur une étagère représentée par un segment. On veut les réarranger toujours de façon contiguë mais avec un décalage sur la droite égal à l'épaisseur d'un livre.

Choix 1 : On déplace tous les livres vers la droite d'une distance égale à l'épaisseur d'un livre.

Choix 2 : On déplace le livre le plus à gauche d'une distance égale à N livres et on laisse les autres à leur place.

Question : quel est le meilleur choix ?

Réponse : Cela dépend du coût ! Les deux choix sont optimaux pour le coût égal à la distance, le choix 1 est le seul optimal pour le coût quadratique.

Un autre acteur : Leonid Kantorovich (1912-1986)



Un autre acteur : Leonid Kantorovich (1912-1986)



- Mathématicien, Économiste.

Un autre acteur : Leonid Kantorovich (1912-1986)



- ▶ Mathématicien, Économiste.
- ▶ Organise le ravitaillement de Leningrad pendant le siège (septembre 1941- janvier 1944).

Un autre acteur : Leonid Kantorovich (1912-1986)



- ▶ Mathématicien, Économiste.
- ▶ Organise le ravitaillement de Leningrad pendant le siège (septembre 1941- janvier 1944).
- ▶ Prix Nobel d'économie en 1975 (pour la théorie de l'allocation optimale des ressources).

Sommaire

Inégalité de Brunn-Minkowski

Transport optimal : origines

Transport optimal contemporain

Courbure

Modification d'images : le perroquet



Modification d'images : le perroquet



Modification d'images : le perroquet



- Représentation dans l'espace tridimensionnel des couleurs.

Modification d'images : le perroquet



- ▶ Représentation dans l'espace tridimensionnel des couleurs.
- ▶ Couleur la plus probable d'un pixel en fonction du voisinage.

Modification d'images : le perroquet



- ▶ Représentation dans l'espace tridimensionnel des couleurs.
- ▶ Couleur la plus probable d'un pixel en fonction du voisinage.
- ▶ Déformation par transport optimal.

Modification d'images : le perroquet



- ▶ Représentation dans l'espace tridimensionnel des couleurs.
- ▶ Couleur la plus probable d'un pixel en fonction du voisinage.
- ▶ Déformation par transport optimal.
- ▶ Travaux de Jean-Michel Morel et son équipe.

Interpolation de formes



Interpolation de formes



Quentin Mériqot, 2010.

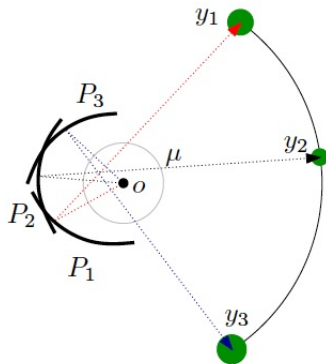
Un film de Charlie Chaplin

Modélisation de l'évacuation

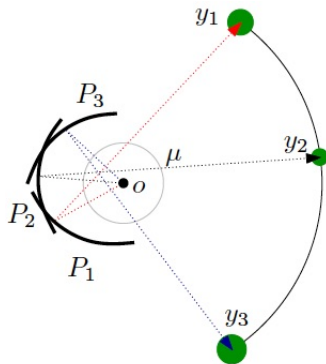
Modélisation de l'évacuation

Travaux de Bertrand Maury

Optique : transport semi-discret



Optique : transport semi-discret

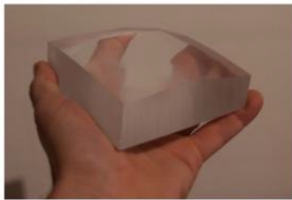
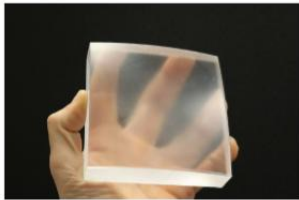


Travaux de Jocelyn Meyron, Quentin Mérigot et Boris Thibert.

Optique : image



Optique : polissage



Sommaire

Inégalité de Brunn-Minkowski

Transport optimal : origines

Transport optimal contemporain

Courbure

Courbure

Un approche de la courbure par les triangles,

Courbure

Un approche de la courbure par les triangles,

- ▶ la courbure est positive si la somme des angles des triangles est supérieure à π ,

Courbure

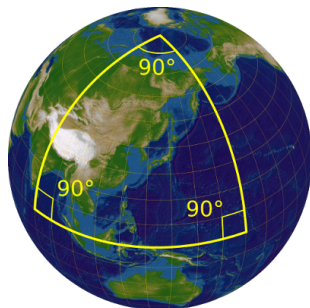
Un approche de la courbure par les triangles,

- ▶ la courbure est positive si la somme des angles des triangles est supérieure à π ,
- ▶ la courbure est négative si c'est l'inverse.

Courbure

Un approche de la courbure par les triangles,

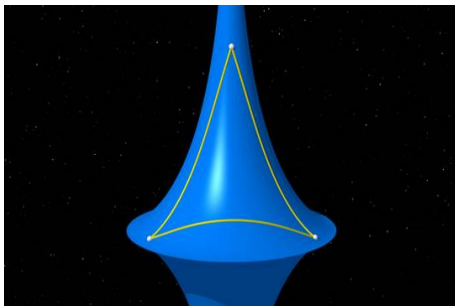
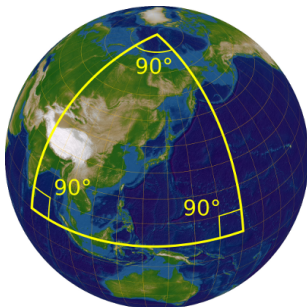
- ▶ la courbure est positive si la somme des angles des triangles est supérieure à π ,
- ▶ la courbure est négative si c'est l'inverse.



Courbure

Un approche de la courbure par les triangles,

- ▶ la courbure est positive si la somme des angles des triangles est supérieure à π ,
- ▶ la courbure est négative si c'est l'inverse.



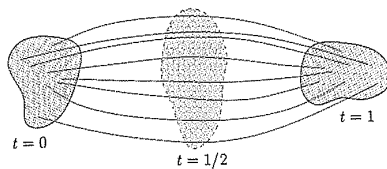
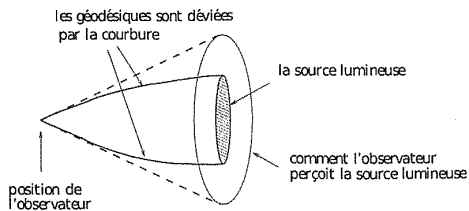
Courbure

Une autre définition par le mouvement.

Courbure

Une autre définition par le mouvement.

Transport optimal et courbure



Deux acteurs modernes



Yann Brenier, 1957

Deux acteurs modernes



Yann Brenier, 1957



Cédric Villani, 1973

Remerciements

- ▶ Hervé Pajot, Boris Thibert pour les discussions et quelques images.
- ▶ Le site « Image des mathématiques » pour les articles sur Monge (<https://images.math.cnrs.fr/>).
- ▶ Le site « Interstices » pour l'article de Yann Brenier (<https://interstices.info/la-brouette-de-monge-ou-le-transport-optimal/>).
- ▶ Les locaux : Benjamin Boutin, Françoise Dal'Bo-Milonet, Barbara Schapira et Rémi Coulon.