

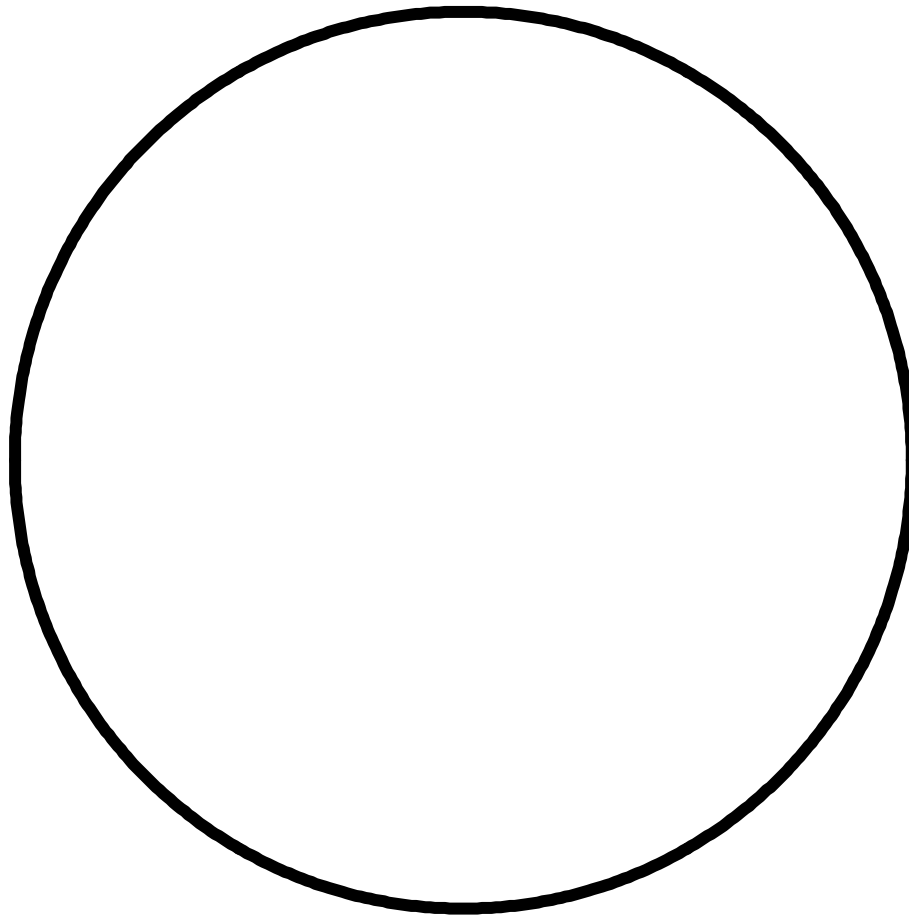
Comment le Sinus a façonné le monde

Gerhard Wanner, Genève

Congrès **J**umelant des **E**tablissements pour une **A**pproche **N**ouvelle du **S**avoir
Rennes 2019

“Nouvelle” ...c’est le moment de retourner en arrière de 4000 ans

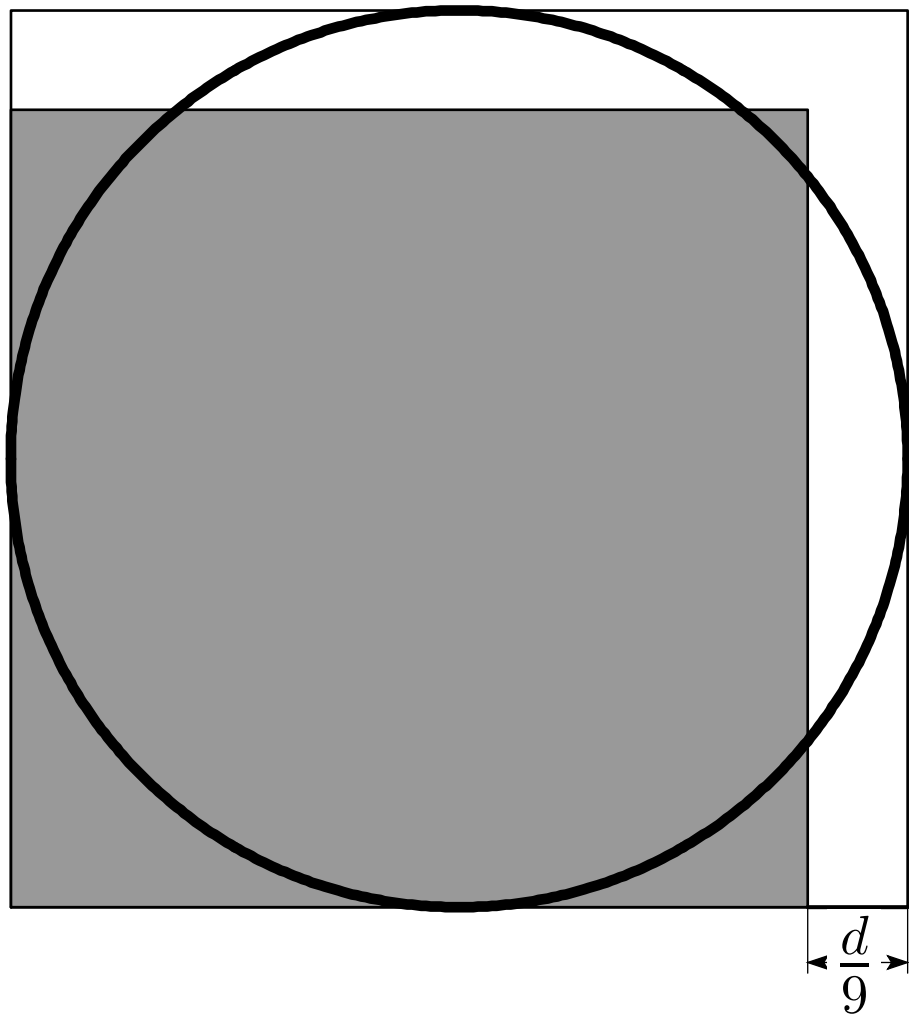
Quadrature du cercle.



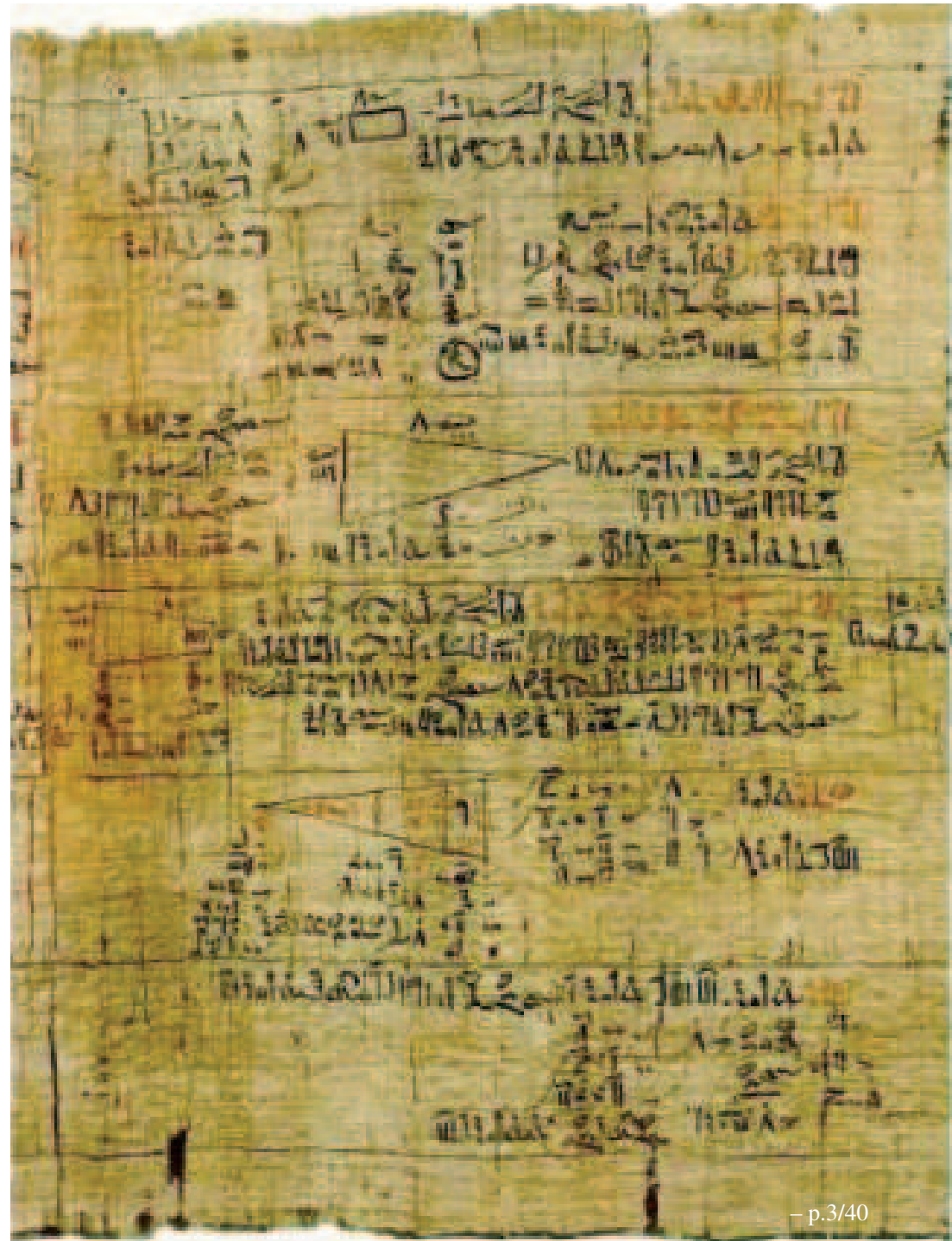
Cercle = une des plus anciennes figures mathématiques

Quelle est son aire ??

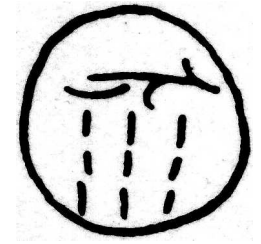
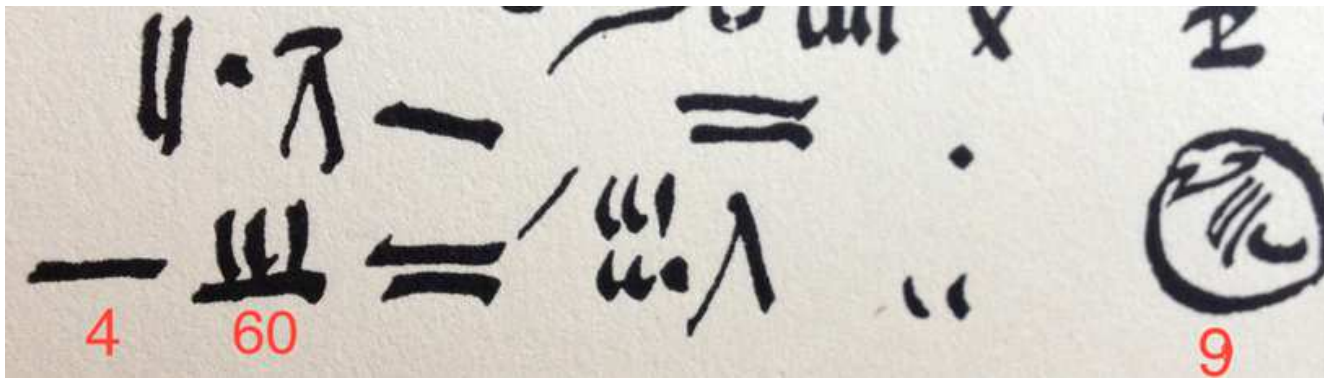
Papyrus Rhind, Égypte 1650 av.J.-C.



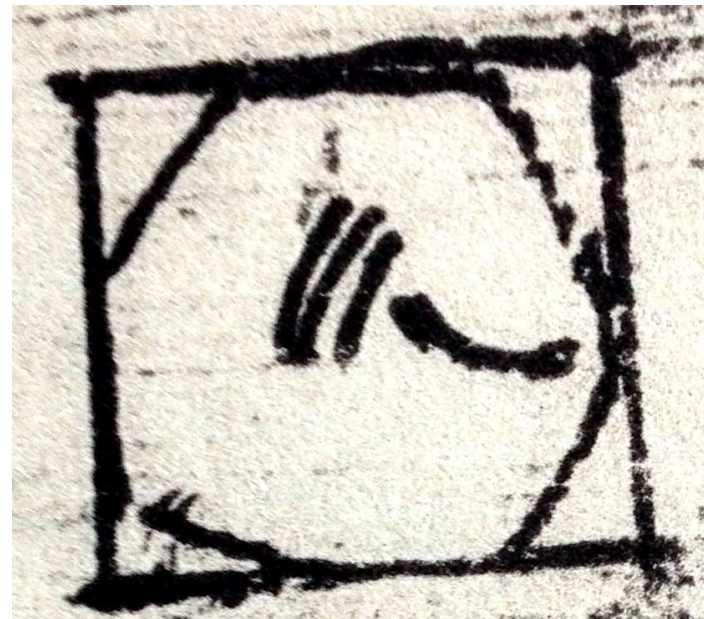
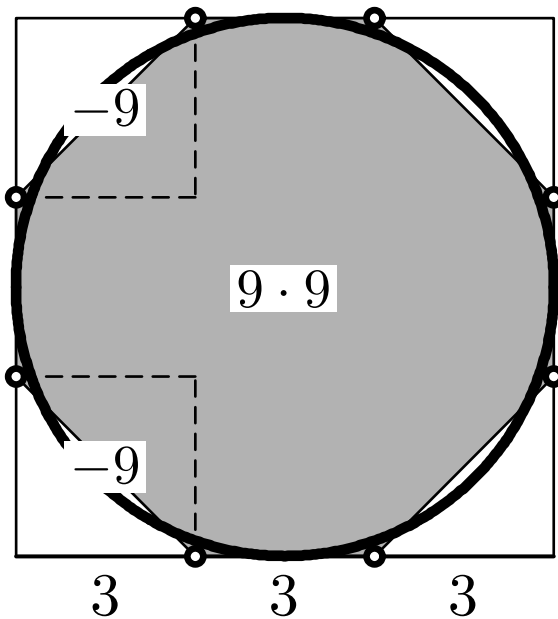
Cercle $\Rightarrow$ Carré
“Quadrature !!”



nnnn
nnnn



Rhind Nr. 50: Aire = $\left(\text{diam} - \frac{\text{diam}}{9}\right)^2$



Rhind Nr. 48:

Aire = $9 \cdot 9 - 2 \cdot 9 = 63$ (n'est pas un carré) $\approx 64 = 8^2$

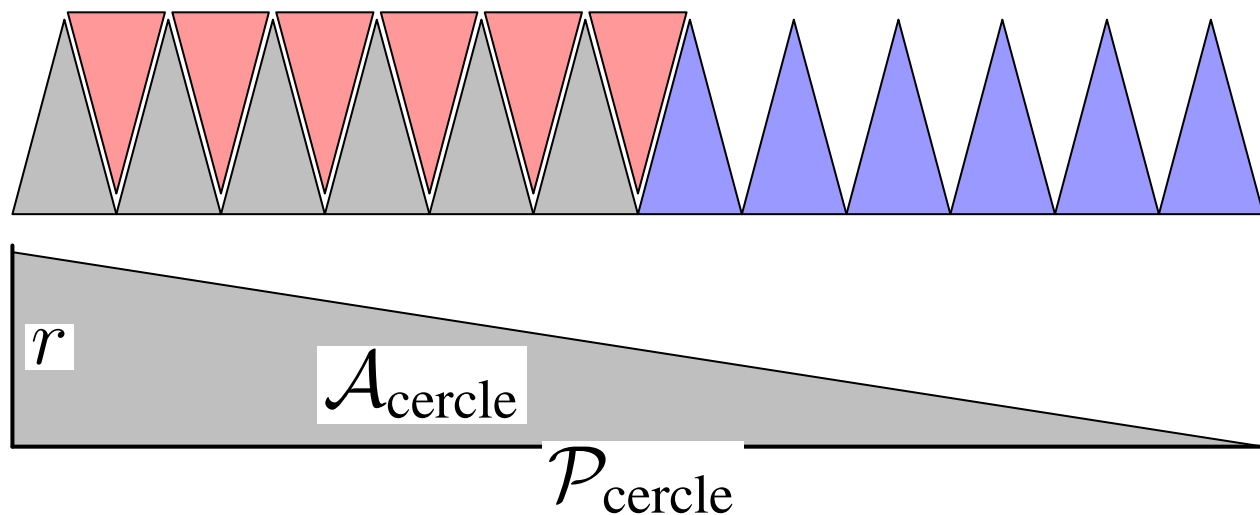
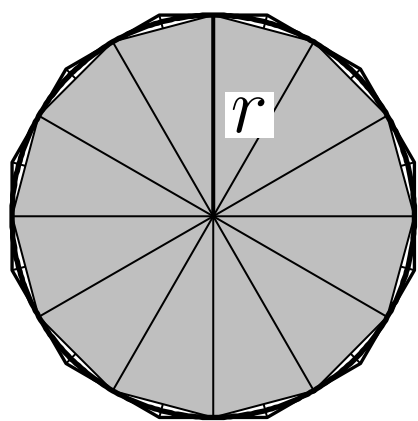
Archimedes (≈ 250 B.C.) De la mesure du cercle:

Proposition 1:

$$A_{\text{circle}} = \underbrace{\mathcal{P}_{\text{circle}}}_{2r\pi} \cdot \frac{r}{2} = r^2\pi \quad \text{si}$$

$$\pi = \mathcal{P}_{(\text{cercle diam}=1)}$$

$$\pi = A_{(\text{cercle } r=1)}.$$

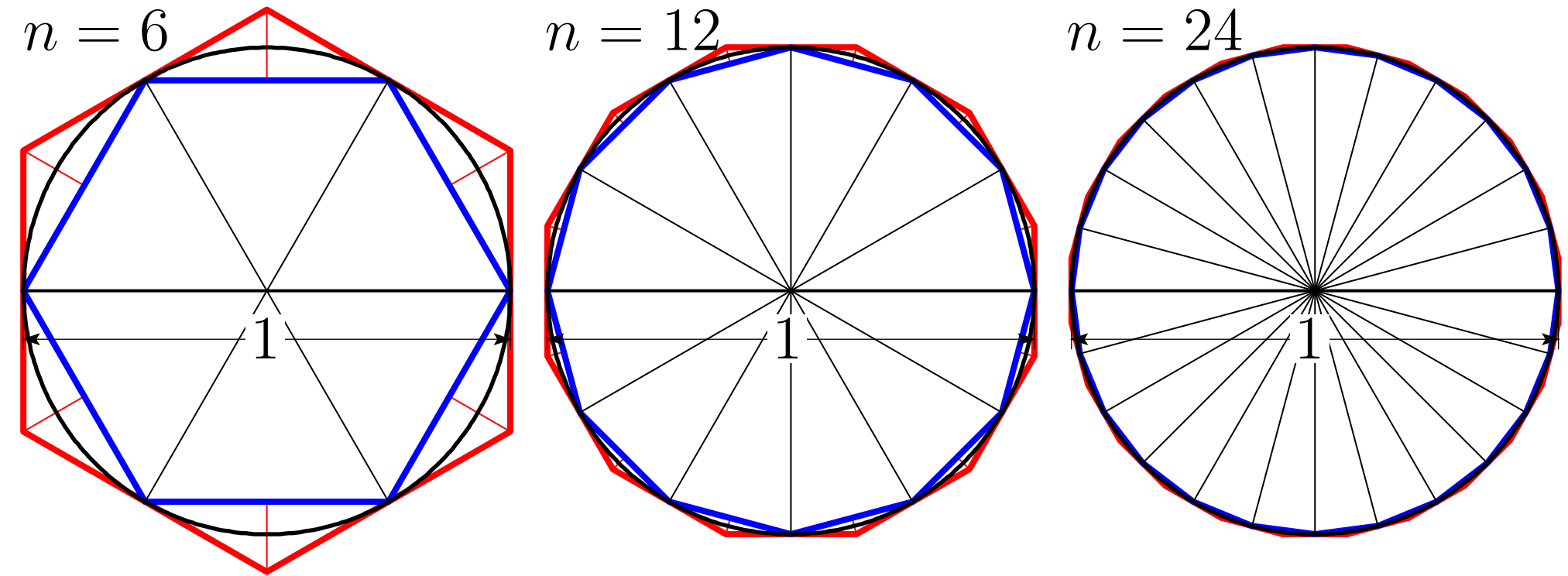


Proposition 3:

$$3.1408 = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = 3.142857$$

$$\text{Rhind: } \frac{256}{81} = 3.1605$$

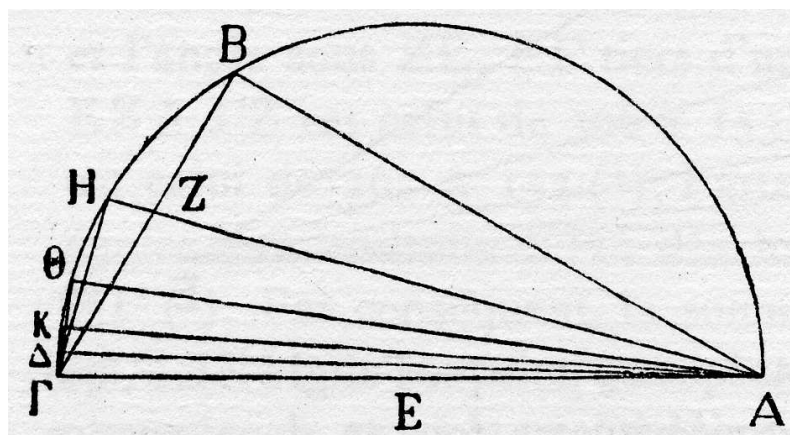
Comment Archimedes a trouvé ces valeurs ?



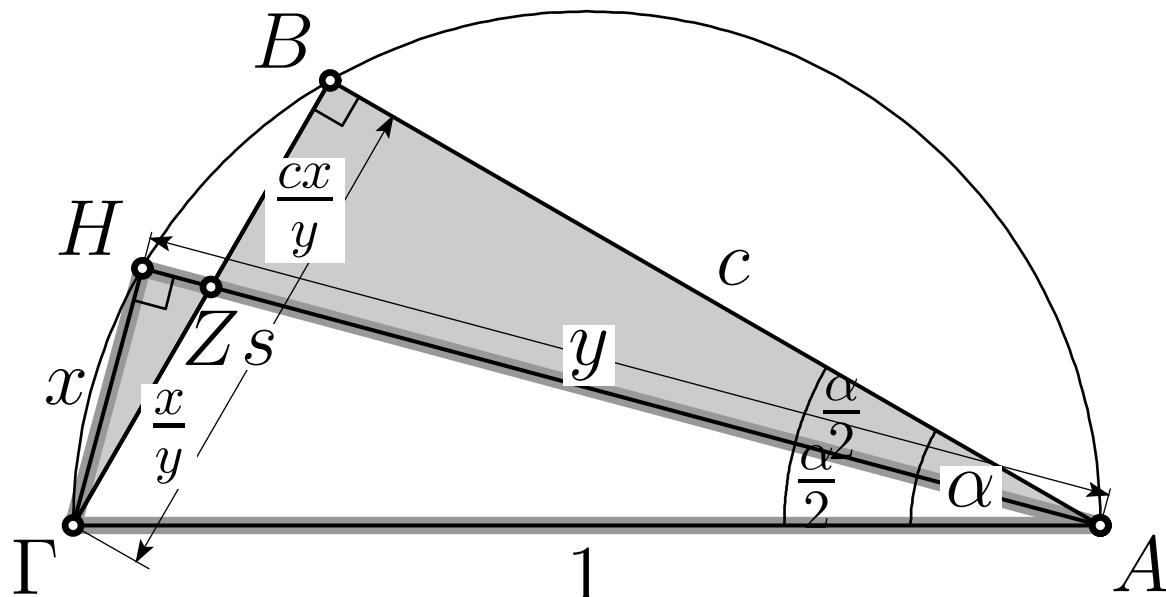
Il a calculé les périmètres des n -gons réguliers **inscrits** et **circonsrits** au cercle de diam. 1 pour $n = 6, 12, 24, 48, 96$

$\Rightarrow$

Question: Donnés s, c pour α , trouver x, y pour $\frac{\alpha}{2}$.



(dessin original d'Archimedes)



$$Z\Gamma H \approx \Gamma A H \Rightarrow \frac{\Gamma Z}{x} = \frac{1}{y}$$

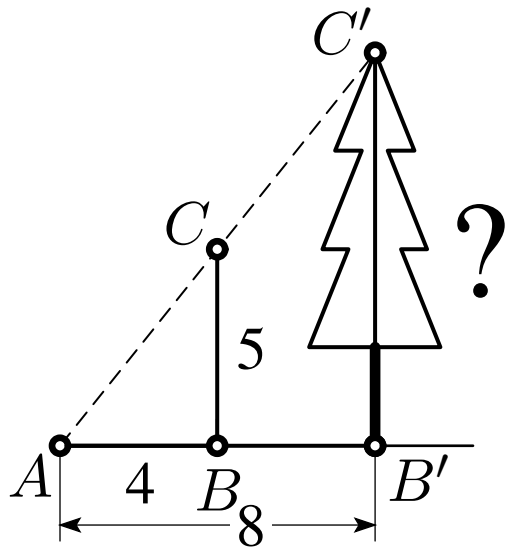
$$ZBA \approx \Gamma H A \Rightarrow \frac{ZB}{c} = \frac{x}{y}$$

$$s = \Gamma Z + ZB = \frac{(c+1)x}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{c+1}{s} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{c^2 + 2c + 1}{s^2}$$

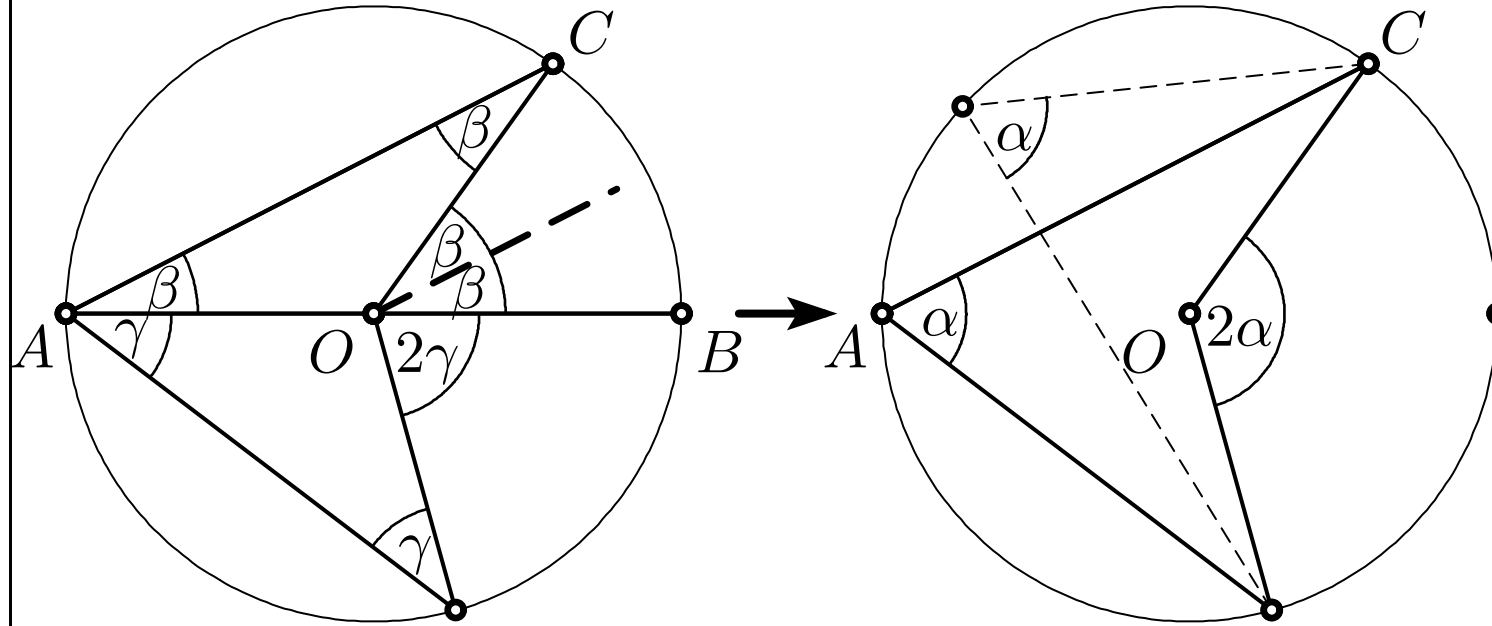
$$\frac{y^2 + x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} = \frac{c^2 + 2c + 1 + s^2}{s^2} = \frac{2c + 2}{1 - c^2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1 - c}{2}}$$

$$B\Gamma = \frac{1}{2}, H\Gamma > \frac{780}{3013\frac{3}{4}}, \Theta\Gamma > \frac{240}{1838\frac{9}{11}}, K\Gamma > \frac{66}{1009\frac{1}{6}}, \Lambda\Gamma > \frac{66}{2017\frac{1}{4}}$$

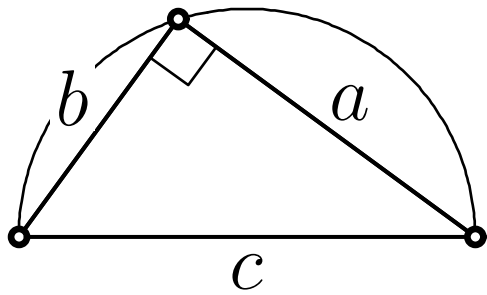
3 Théorèmes fondamentaux de Géométrie:



(Thalès 6e s. av.J.-C.)
 (= Rhind 53)
 (= Eucl. VI.2)

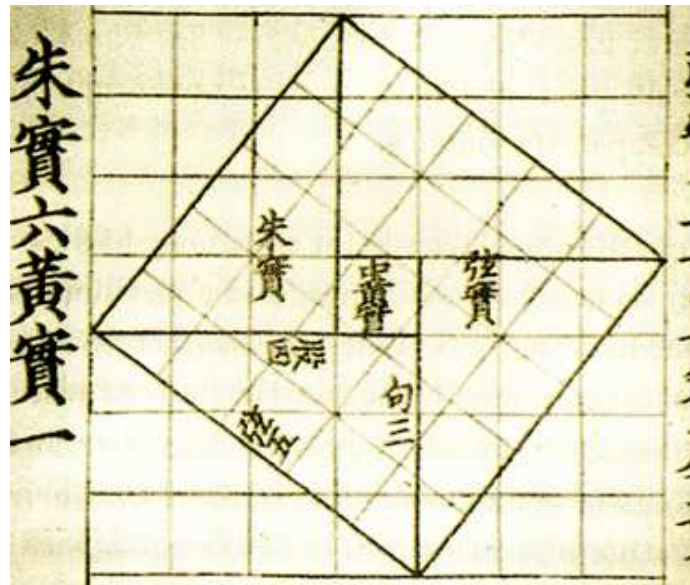


(Angle centre = 2 angle périf.; Eucl. III.20)

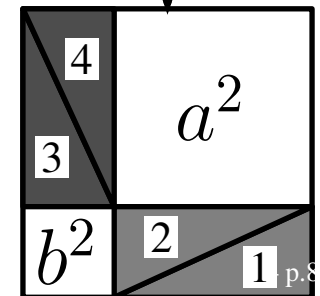
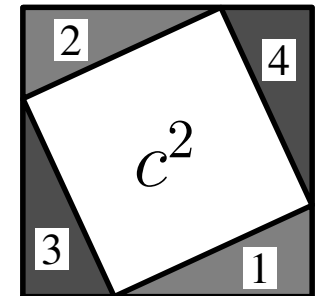


$$a^2 + b^2 = c^2$$

(Pythagoras 5e s. av.J.-C.)
 = Eucl. I.47+III.31



(Zhao Shuang 3e s. A.D.)



... et la suite ?

Zu Chongzhi (China 480 A.D.) calcule avec la même méthode:

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

Al-Kāshī (Samarkand 1424 A.D.) Alg. d'Archimedes $26\times$:

$$\pi = 3.1415926535897932$$

Scaliger (Leyden publ. 1594): Archimedes faux .. !!!

$$\pi = \sqrt{10} = 3.162278 \quad !!!$$

Cette annonce du célèbre professeur Joseph Scaliger a déclenché une vague de protestations ...

IN
ARCHIMEDIS
CIRCULI DIMENSIONEM
Expositio & Analysis.

APOLOGIA PRO ARCHIMEDE
ad Clariss. virum Iosephum Scaligerum,
EXERCITATIONES CYCLICAE
contra Iosephum Scaligerum, Orontium Finæum, & Raymarum
Vrsum, in decem Dialogos distinctæ.

AUTHORE ADRIANO ROMANO EQVITE
Auraro Matheseos Excellentissimo Professore in
Academia VVurceburgensi.



WVRCBURGI
ANNO MDCLXCVII

Adriaan van Roomen

(publ. WVRCBURGI 1597):

no, Archimedes juste ..

$$\pi = 3.1415926535897932$$

Son ami

Ludolph van Ceulen

à la fin de sa vie (1610)

(est inscrit sur sa tombe

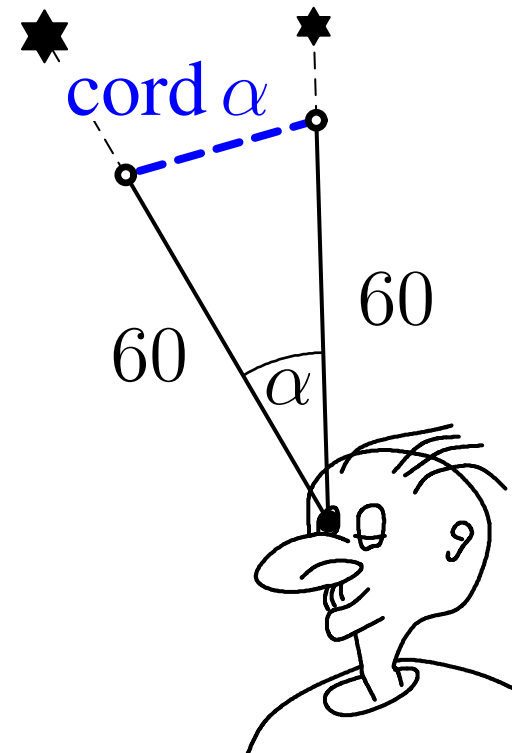
dans la Pieterskerk à Leyden)...

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288$$

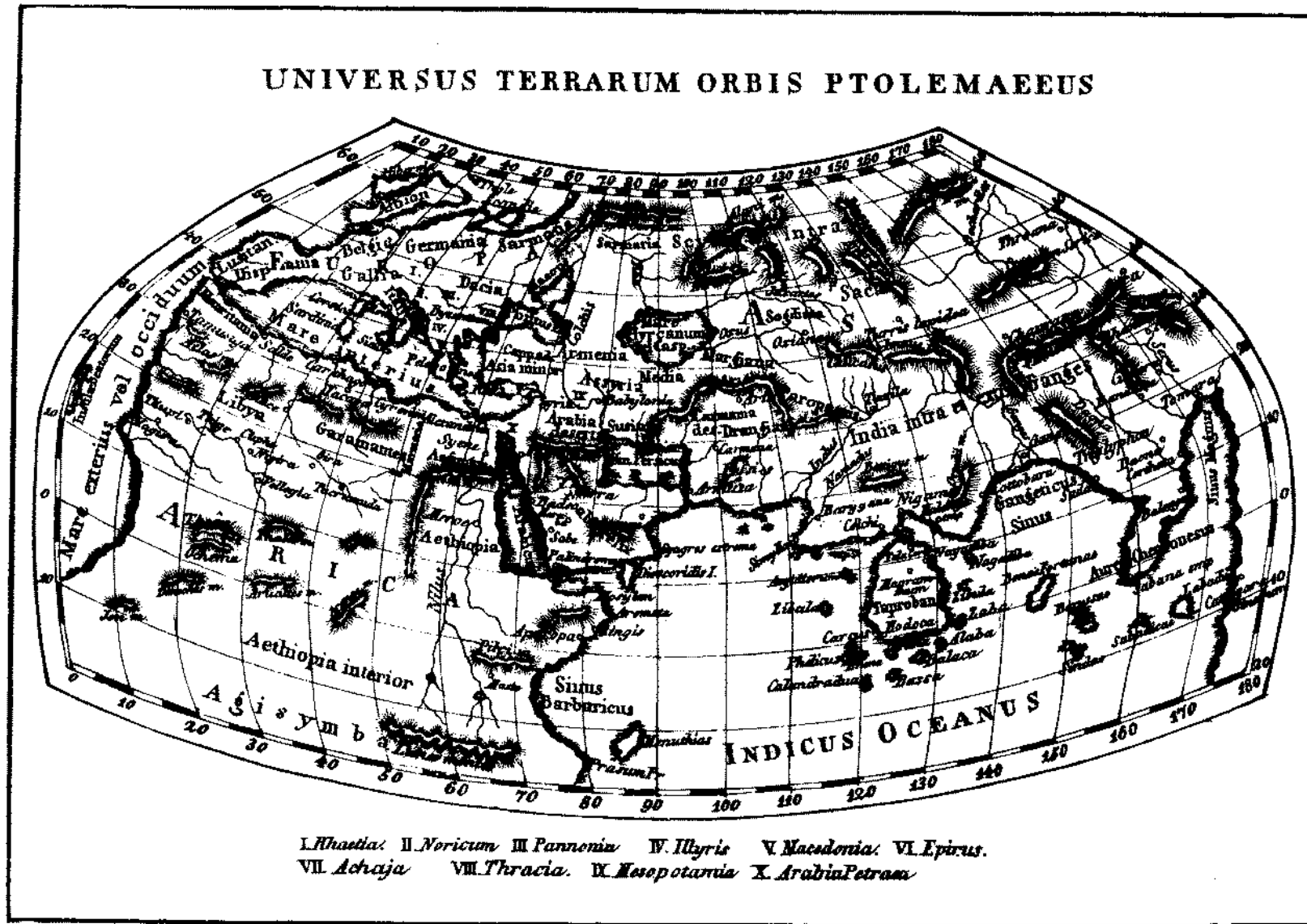
Vers le sinus...

Klaudios Ptolemaios (150 A.D., Cl. Ptolémée, Ptolemy, Tolomeo,...)
 calcule une table des “chords” (imprimée en France en 1813)

ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ.								
ΠΕΡΙΦΕ- ΡΕΙΩΝ.		ΕΥΘΕΙΩΝ.			ΕΞΗΚΟΤΩΝ.			
Μοιρῶν.		Μ.	Π.	Δ.	Μ.	Π.	Δ.	Τ.
ὀ	ς"	ὀ	λα	κε	ὀ	α	β	ν
α	ὀ"	α	β	ν	ὀ	α	β	ν
α	ς"	α	λδ	εε	ὀ	α	β	ν
β	ὀ"	β	ε	μ	ὀ	α	β	ν
β	ς"	β	λζ	δ	ὀ	α	β	μη
γ	ὀ	γ	η	κη	ὀ	α	β	μη
γ	ς"	γ	λθ	νβ	ὀ	α	β	μη
δ	ὀ"	δ	ια	εε	ὀ	α	β	μζ
δ	ς"	δ	μβ	μ	ὀ	α	β	μζ
ε	ὀ"	ε	εδ	δ	ὀ	α	β	μς
ε	ς"	ε	με	κζ	ὀ	α	β	με
ς	ὀ	ς	εε	μθ	ὀ	α	β	μδ
ς	ς"	ς	μη	ια	ὀ	α	β	μγ
ζ	ὀ"	ζ	εθ	λγ	ὀ	α	β	μβ
ς	ς"	ς	ν	νδ	ὀ	α	β	μα
η	ὀ"	η	κβ	εε	ὀ	α	β	μ
η	ς"	η	νγ	λε	ὀ	α	β	λθ
θ	ὀ	θ	κδ	νδ	ὀ	α	β	λη



Il mesure angles (étoiles, planètes, la Terre $\Gamma\eta$... μετρέω):

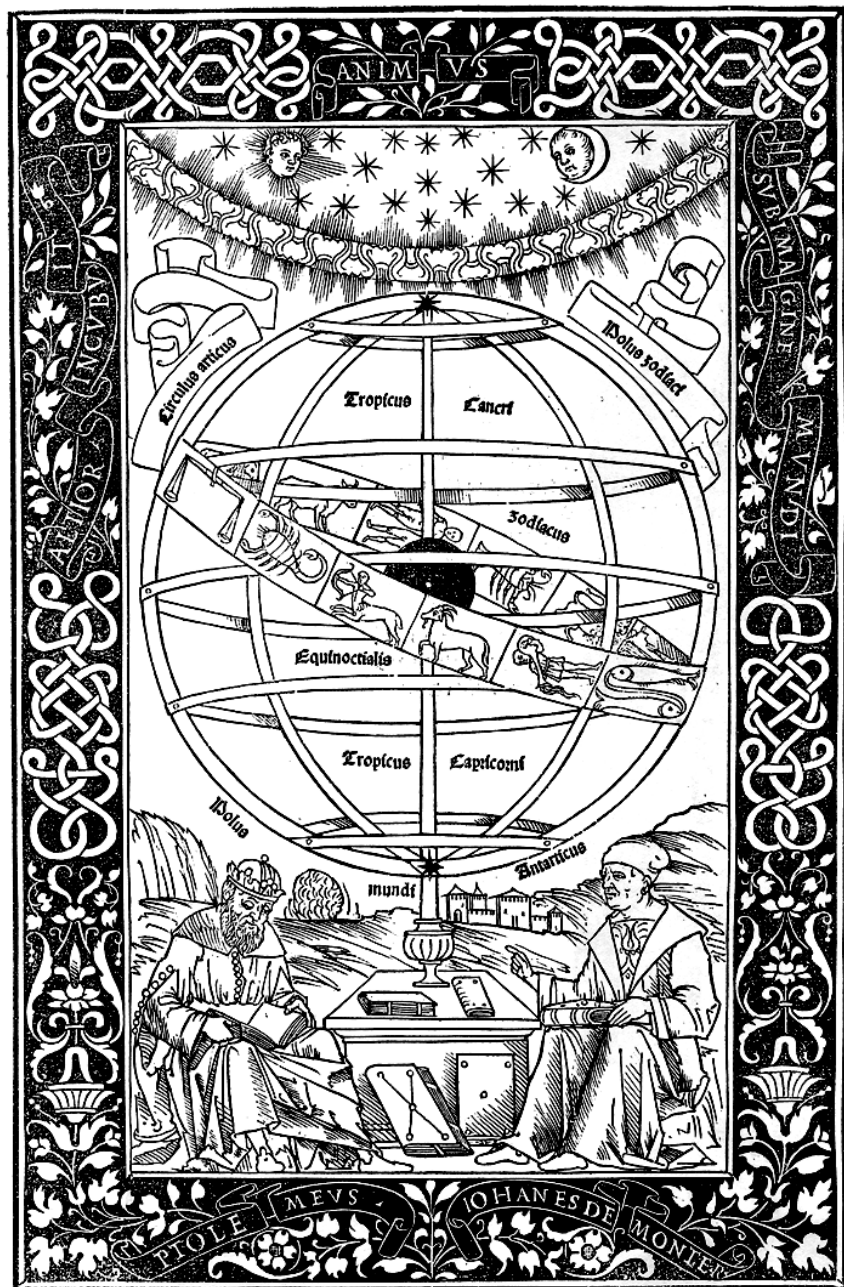


Ptolémée mesure les coord.
de 8000 villes, parmi ...

ὑφ' οὗς Παρίσιοι, καὶ πόλις

Παρισίων Λουκοτεκία κγ ʹ μη ʹ

Almagest (2e livre scient. imprimé)



(Ptolemy 150 A.D., publ. 1496)



(Copernicus, publ. 1543)

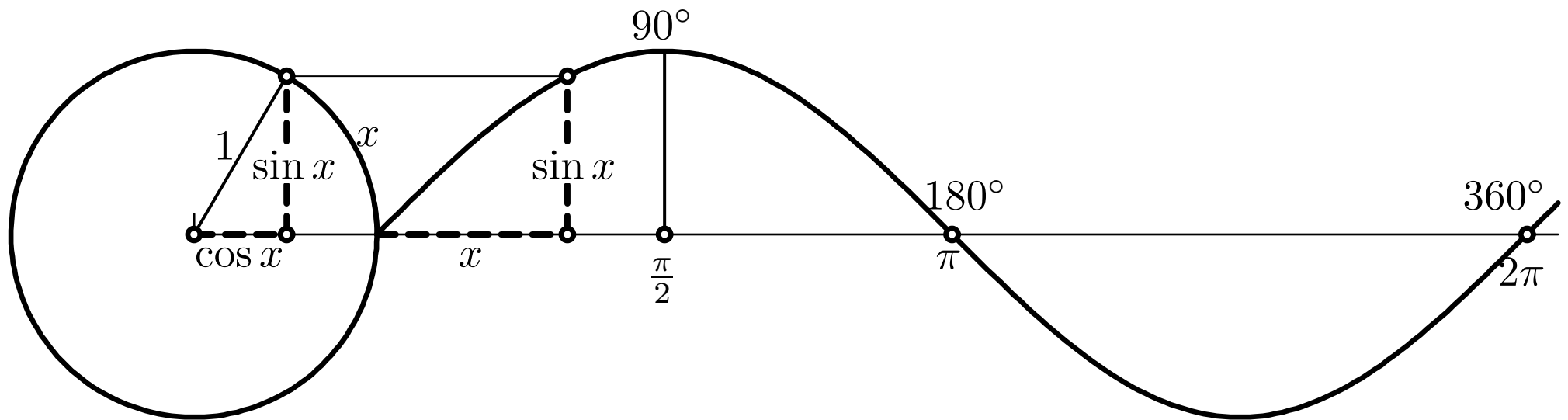
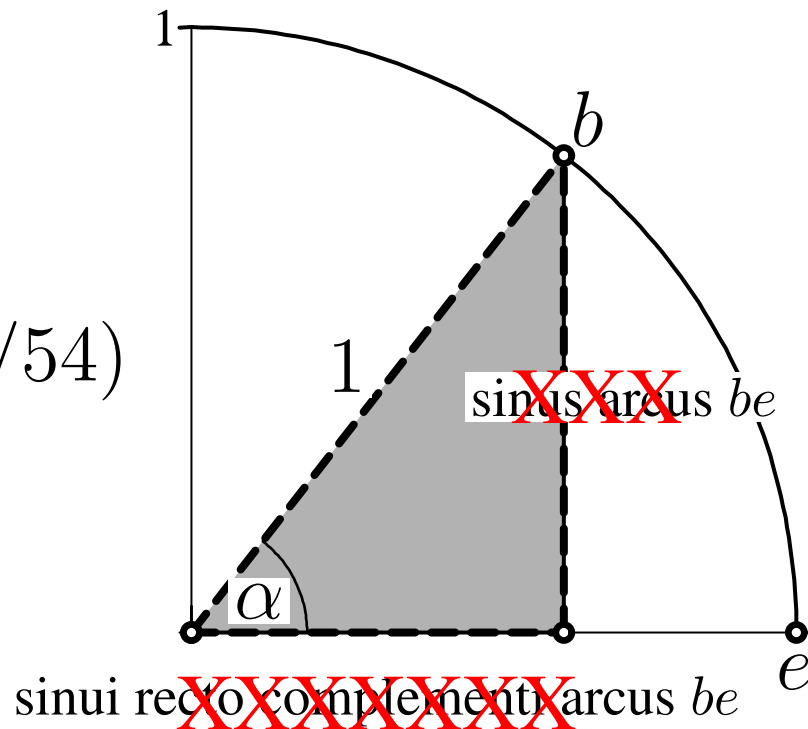
Table de Jost Bürgi (1584, 36 pages, 5 HEXAdécimales).

	0	1	2	3	4
0	0 0 0 0 0	1 2 4 9 11	2 5 38 17 29	3 8 24 34 0	4 11 17 23 54
1	1 2 49 55	3 52 32 31	6 41 5 4	9 27 18 43	12 10 4 39
2	2 5 39 49	4 55 21 49	7 43 52 38	10 30 3 22	13 12 46 12
3	3 8 29 44	5 58 11 7	8 46 40 9	11 32 47 58	14 15 25 44
4	4 11 19 38	7 1 0 23	9 49 27 38	12 35 32 31	15 18 6 12
5	5 14 9 33	8 3 49 38	10 52 15 4	13 38 16 59	16 20 46 35
6	6 16 59 27	9 6 38 51	11 55 2 24	14 41 1 25	17 23 26 53
7	7 19 49 22	10 9 28 4	12 57 49 49	15 43 45 47	18 26 7 6
8	8 22 39 16	11 12 17 15	14 0 37 9	16 46 30 5	19 28 47 15
9	9 25 29 10	12 15 6 24	15 3 24 25	17 49 14 20	20 31 27 19
10	0 10 28 19	1 13 17 55 35	2 16 6 11 39	3 18 51 58 31	4 21 34 7 18
11	11 31 8 57	14 20 44 40	17 8 58 51	19 54 42 38	22 30 47 12
12	12 33 58 51	15 23 33 40	18 11 40 0	20 57 26 42	23 33 27 12
13	13 36 48 44	16 26 22 40	19 14 33 7	22 0 10 42	24 42 6 47
14	14 39 38 37	17 29 11 53	20 17 20 11	23 2 54 39	25 44 46 27
15	15 42 28 29	18 32 0 65	21 20 2 13	24 5 38 32	26 47 26 2
16	16 45 18 22	19 34 49 35	22 22 54 12	25 8 32 21	27 50 5 32
17	17 48 8 14	20 37 38 53	23 25 41 8	26 11 6 6	28 52 44 58
18	18 50 58 5	21 40 27 51	24 28 28 2	27 13 49 47	29 55 24 18
19	19 53 47 57	22 43 16 46	25 31 14 53	28 16 32 25	30 58 3 33
20	0 20 56 37 48	1 23 46 9 40	2 26 34 1 44	3 29 18 16 59	4 32 0 42 44
21	21 59 27 39	2 48 54 35	27 36 48 27	30 22 0 29	33 3 21 50
22	22 2 17 29	25 51 43 24	28 39 35 10	31 24 43 55	34 6 0 50
23	23 5 7 19	26 54 32 14	29 42 21 51	32 27 27 18	35 8 39 40
24	24 8 57 8	27 57 21 7	30 45 8 28	33 30 16 30	36 11 16 36
25	25 10 46 57	29 0 9 18	31 47 55 3	34 32 53 51	37 12 57 22
26	26 13 36 46	30 2 58 33	32 50 41 35	35 35 37 1	38 16 30 2
27	27 16 26 33	31 5 47 16	33 53 28 5	36 38 20 6	39 19 14 27
28	28 19 16 21	32 8 35 57	34 56 14 31	37 41 2 11	40 22 35 8
29	29 22 0 8	33 11 24 37	35 59 0 55	38 43 40 10	41 24 31 32
30	0 31 24 55 54	1 34 14 13 15	2 37 1 47 10	3 40 29 4	4 42 27 9 53

	0	1	2	3	4
30	0 31 24 55 54	1 34 14 13 15	2 37 1 47 10	3 40 29 4	4 42 27 9 53
31	32 27 46 40	35 17 1 51	38 4 33 34	40 49 11 55	43 29 48 8
32	33 30 35 25	36 19 50 26	39 7 19 49	41 51 64 42	44 32 26 17
33	34 33 25 9	37 22 38 59	40 10 6 1	42 54 37 24	45 35 4 22
34	35 36 14 53	38 25 27 30	41 12 52 10	43 57 20 3	46 37 42 21
35	36 39 4 37	39 28 15 59	42 15 33 16	45 0 3 38	47 40 20 19
36	37 41 54 19	40 31 4 20	43 18 24 20	46 2 45 8	48 42 58 4
37	38 44 44 1	41 33 52 52	44 21 10 28	47 5 27 34	49 45 35 47
38	39 47 33 22	42 36 41 16	45 23 50 17	48 8 9 60	50 48 13 25
39	40 50 23 25	43 39 29 37	46 26 42 11	49 10 52 14	51 50 50 68
40	0 41 53 13 3	1 44 42 17 57	2 47 29 28 3	3 50 13 34 20	4 52 53 28 53
41	42 56 2 42	45 45 6 15	48 32 13 51	51 16 16 38	53 56 5 46
42	43 58 52 40	46 47 54 31	49 34 59 36	52 18 58 43	54 58 43 4
43	44 1 41 57	47 50 42 46	50 37 45 18	53 21 40 44	55 1 20 16
44	45 4 31 34	48 53 30 58	51 40 30 57	54 24 22 41	57 3 37 22
45	46 7 21 9	49 56 19 8	52 43 16 33	55 27 4 33	58 5 34 22
46	47 10 10 44	50 59 7 16	53 46 2 5	56 29 46 24	59 9 11 17
47	48 13 0 18	51 62 24 5	54 48 7 35	57 32 28 5	60 11 48 7
48	49 16 49 51	52 65 11 26	55 51 23 1	58 35 9 45	61 14 24 51
49	50 18 39 24	53 68 0 1	56 54 18 24	59 37 51 20	62 17 1 30
50	0 51 21 28 55	1 55 10 19 28	2 57 57 3 44	3 60 22 61	4 62 24 30
51	52 24 18 25	56 13 7 20	58 59 49 0	61 24 17 17	63 26 14 30
52	53 27 7 54	57 15 55 22	60 62 39 10	62 27 55 39	64 28 50 52
53	54 29 67 23	58 18 43 15	61 65 24 1	63 30 66 57	65 30 27 9
54	55 32 46 50	59 21 31 7	62 68 13 10	64 33 77 12	66 32 30 19
55	56 35 36 10	60 24 18 50	63 71 0 34	65 36 88 15	67 34 33 25
56	57 38 25 41	61 27 6 43	64 74 9 37	66 39 99 18	68 36 36 24
57	58 41 15 5	62 30 54 28	65 77 10 30	67 42 10 30	69 38 38 28
58	59 44 4 29	63 33 42 10	66 80 21 23	68 45 21 27	70 40 40 32
59	60 47 53 50	64 36 30 51	67 83 32 13	69 48 32 20	71 42 42 36
60	1 50 42 39	65 39 17 29	68 86 43 6	70 51 43 13	72 44 44 40

(<http://www.bibliotekacyfrowa.pl/dlibra>)

Euler E214, E246,(1753/54)



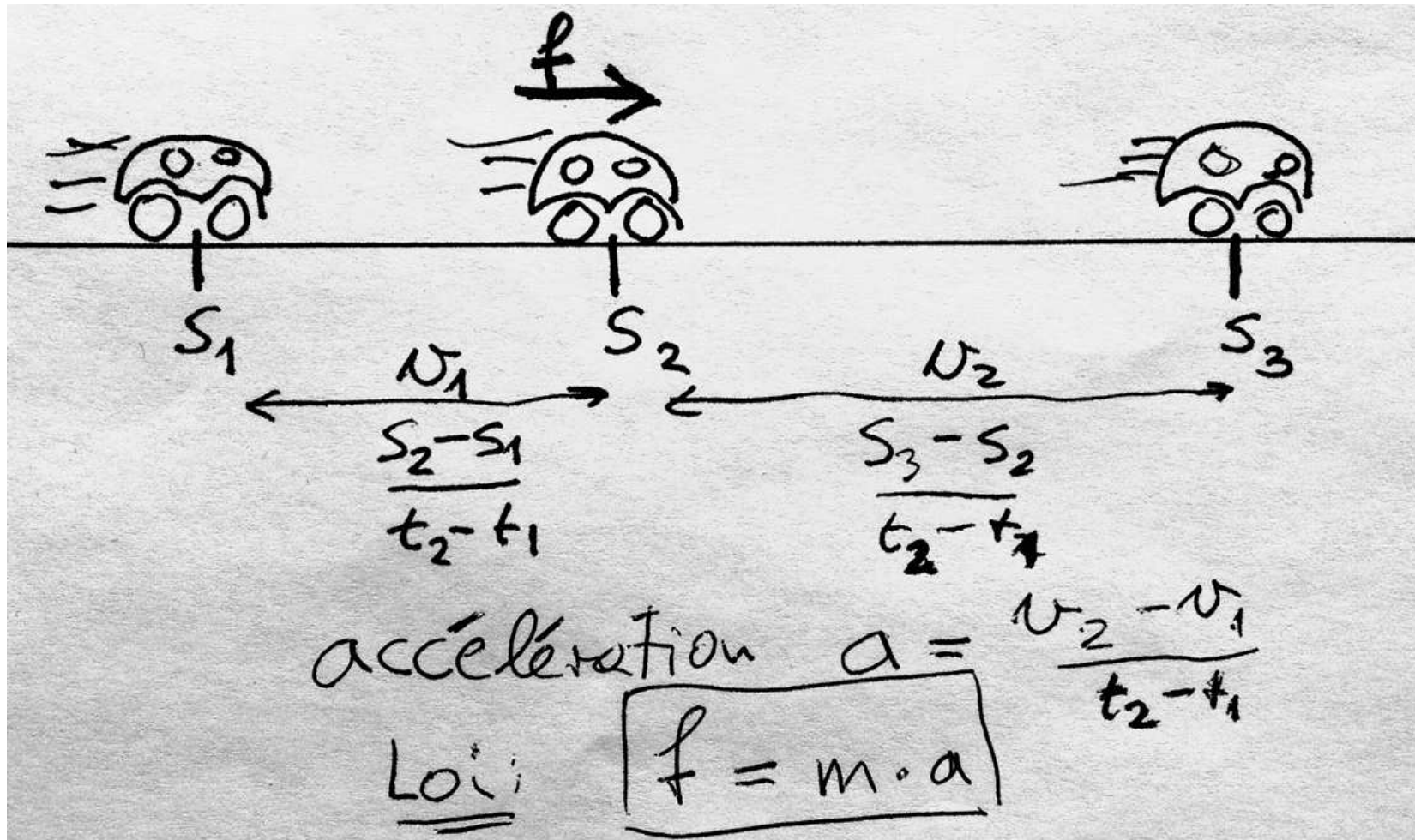
Bonne notation courte. Le sinus n'est plus une table de chiffres, mais une courbe, une fonction de x , la longueur d'arc.

Problème de mécanique:

Comment bouge un poids attaché à des ressorts ?



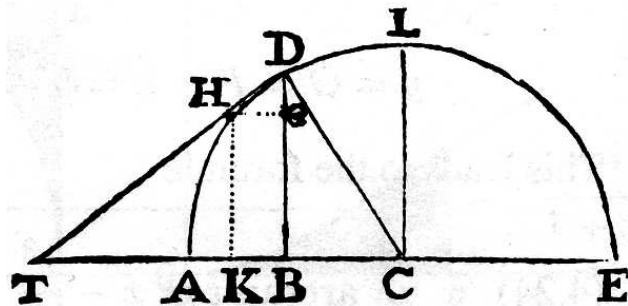
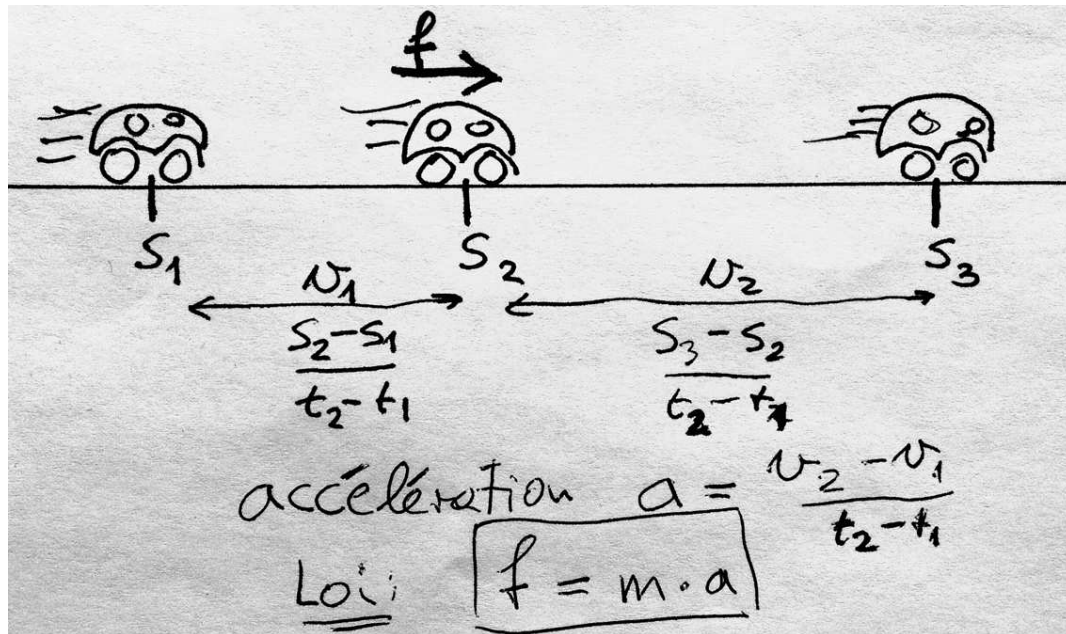
Principe fondamental de la mécanique.



I. Newton (Manuscrit 1684, *Principia* 1687):

Lex 2. Mutationem motus proportionalem esse vi impressæ

Calculons l'accélération d'un mouvement sinusoïdal:



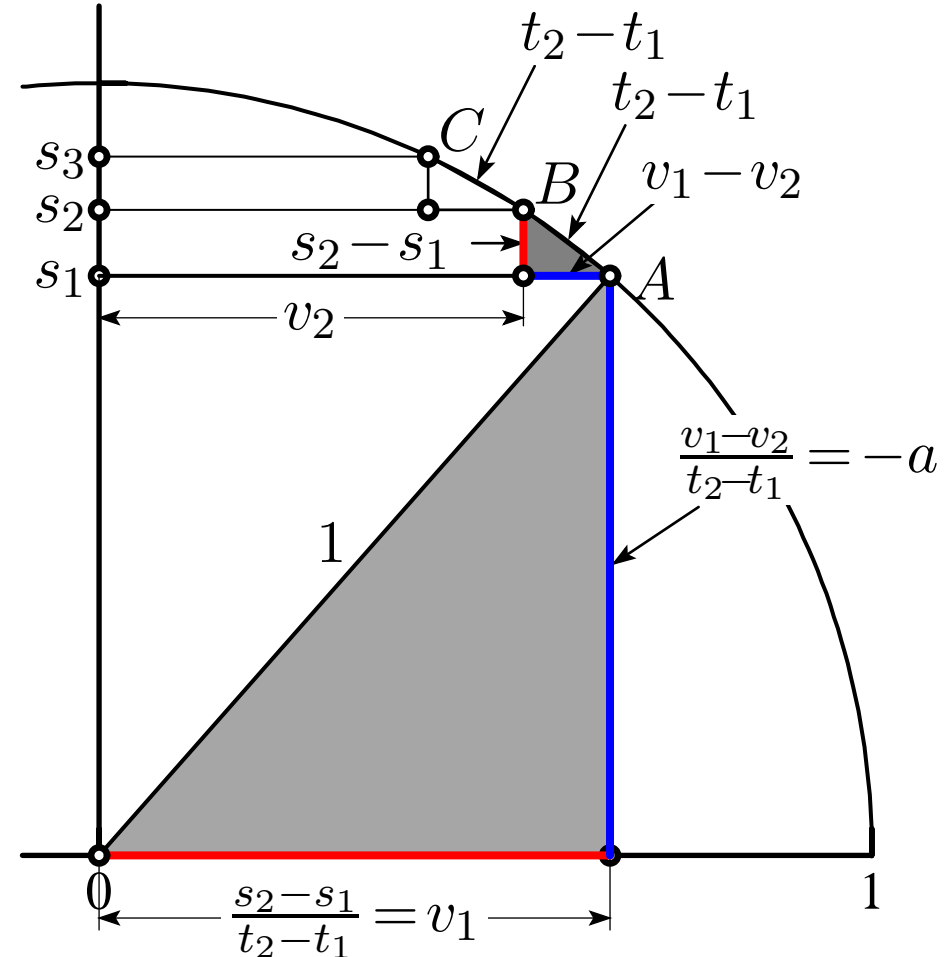
(Newton *de Analysi* 1669=350 ans !!)

A, B, C équidistants à (petite) dist. $t_2 - t_1$ avec sinus s_1, s_2, s_3 .

Les deux triangles gris sont semblables à rapport $1 : \frac{1}{t_2 - t_1}$.

Puis on trouve: $s_2 - s_1, v_1, v_2, v_1 - v_2, \frac{v_1 - v_2}{t_2 - t_1} = \boxed{-a = s_1}$. $\square$

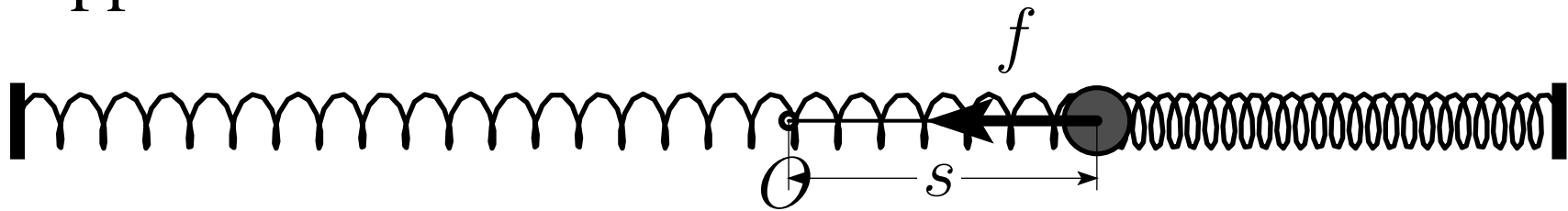
Thalès, Thalès, Thalès, Thalès,...



Mais s'il s'agit d'un ressort, **on sait** que la force est proportionnelle à l'extension, c.-à-d.

$$-a = \text{Const.} \cdot s$$

cela s'appelle **la loi de Hooke**:



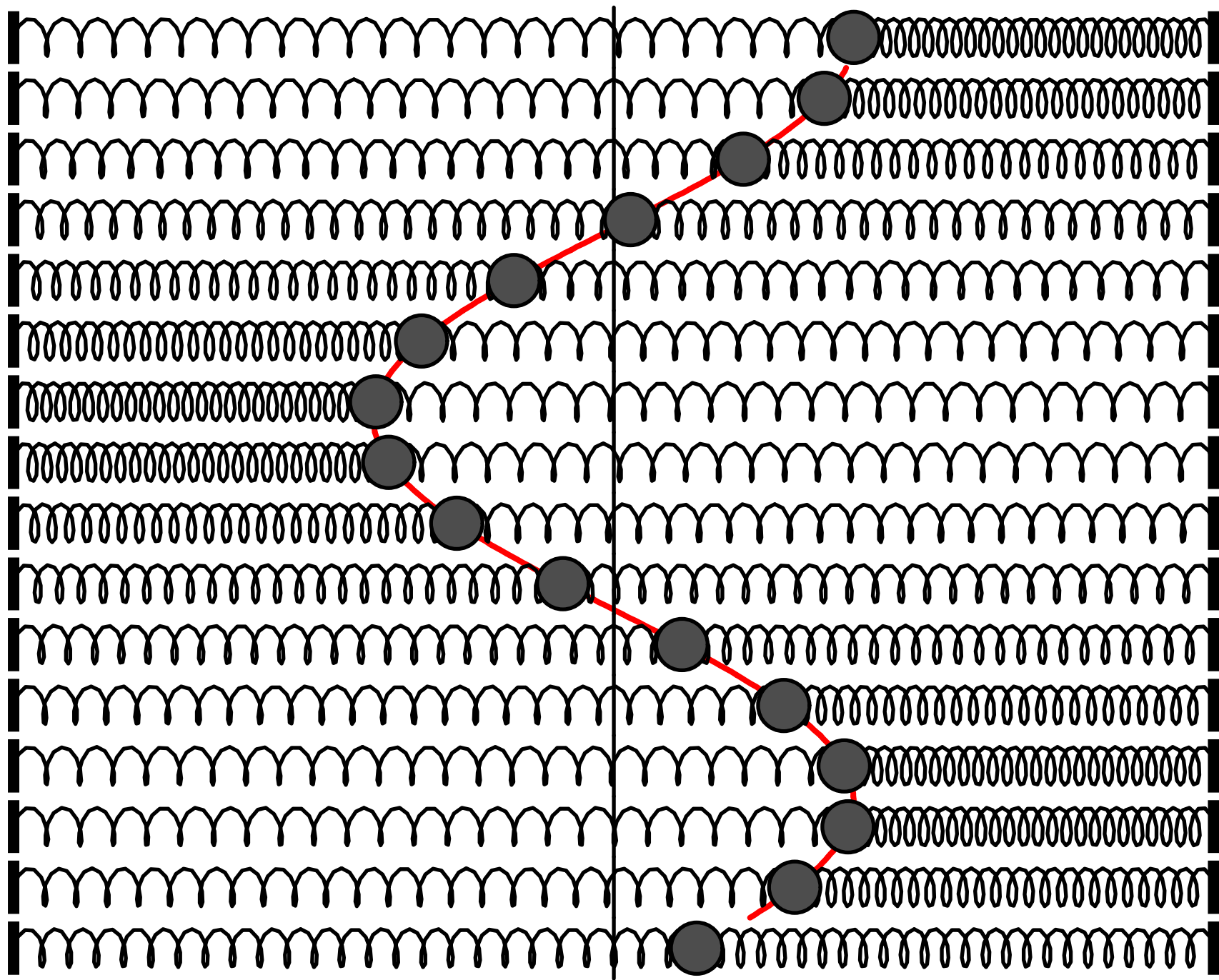
Robert Hooke (1676; source: www.efunda.com):

“The power of any springy body
is in the same proportion with the extension.”

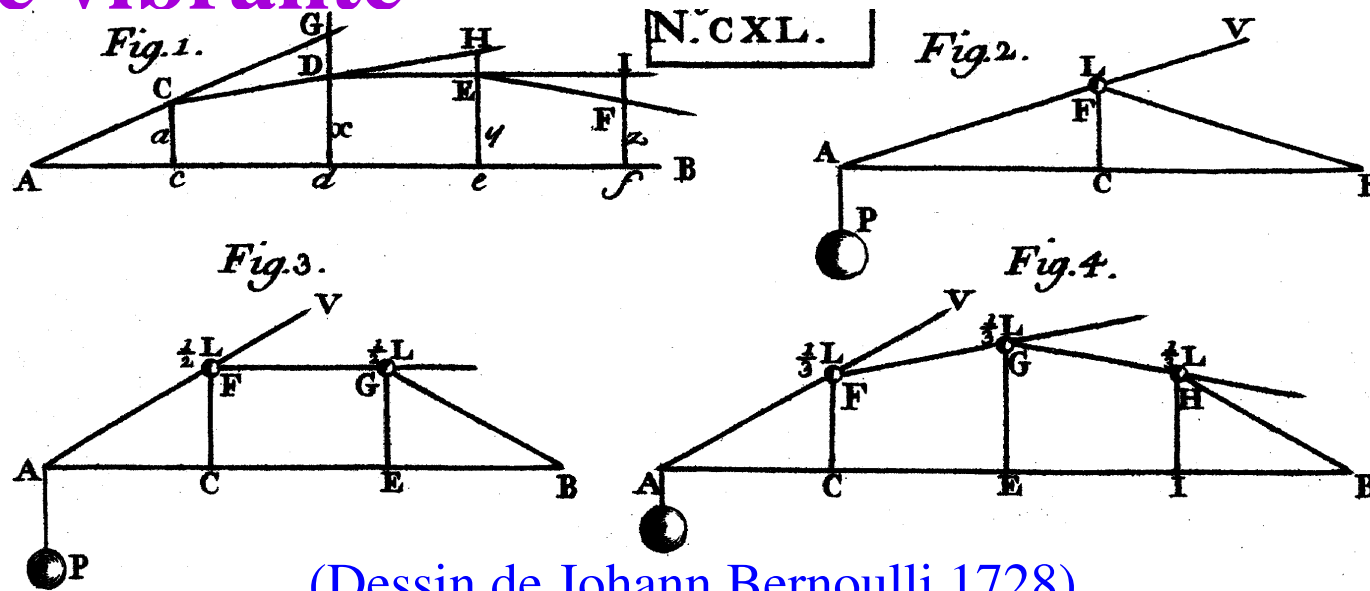
Donc: **Théorème.**

*Le mouvement du poids est **sinusoidal**.*

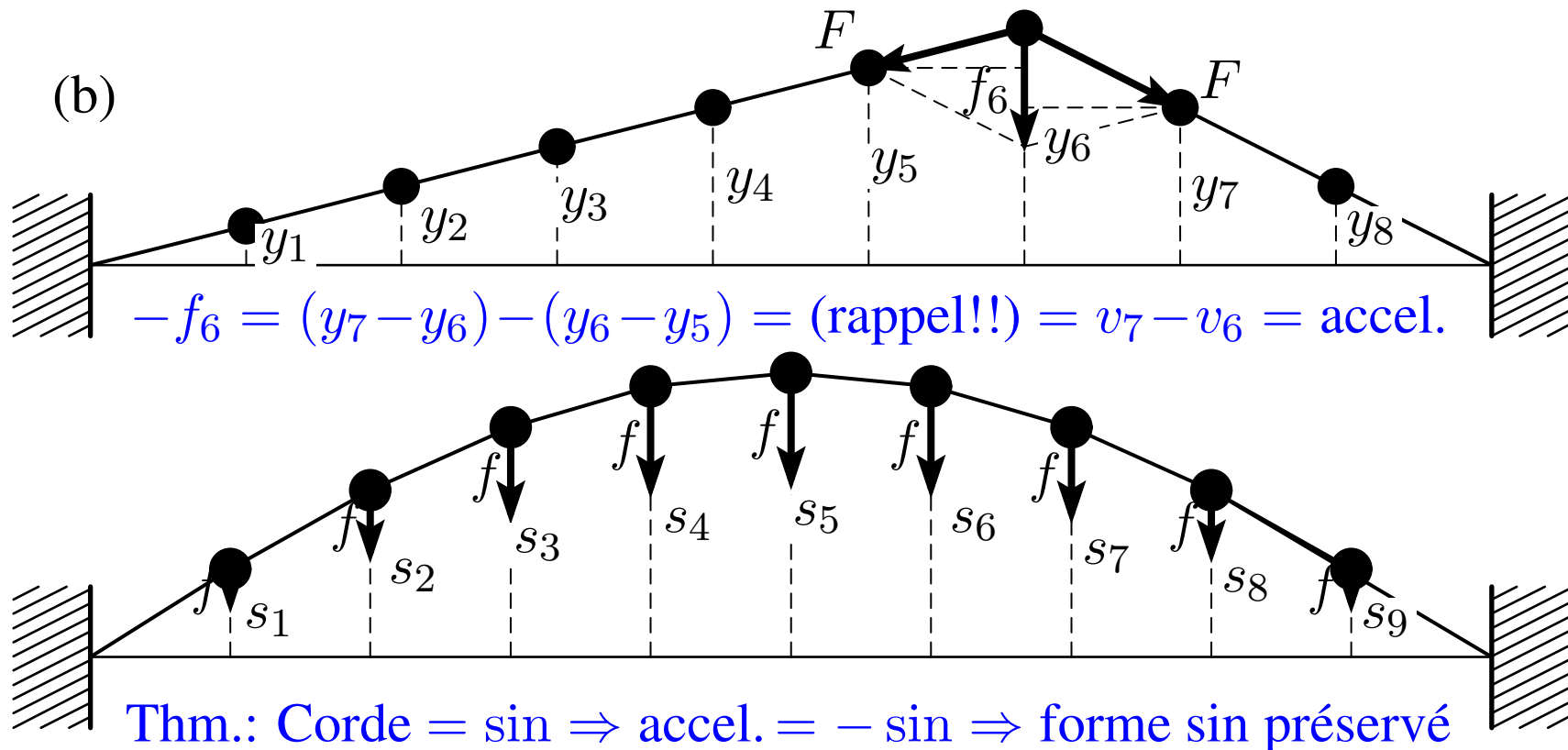
Solution.



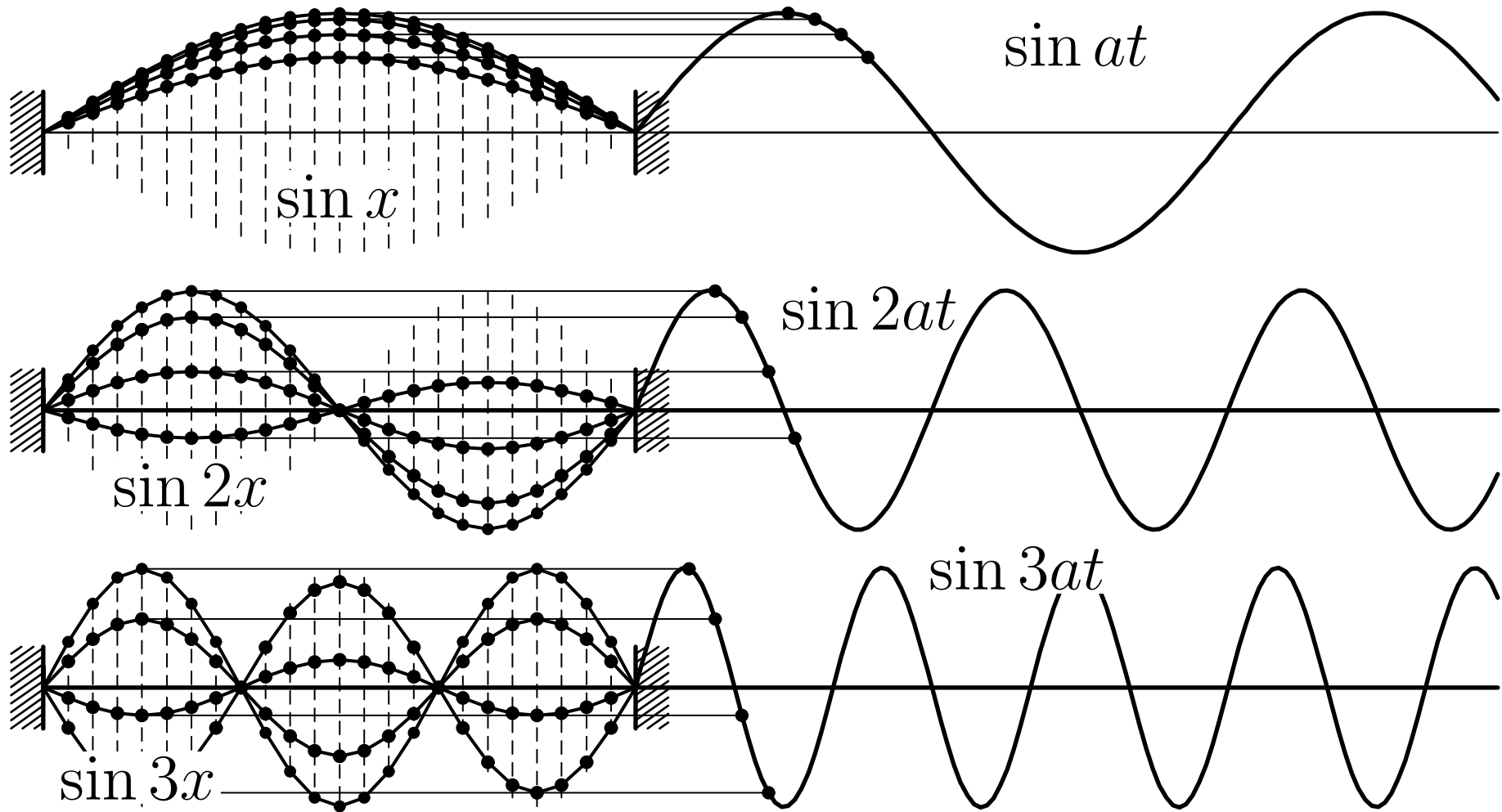
La corde vibrante



(Dessin de Johann Bernoulli 1728)



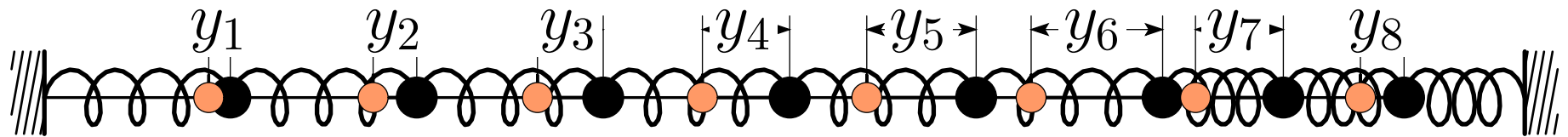
... de plus, le mouvement des maxima (le son produit!) est **la même** courbe sinusoidale ($a = \text{constante}$):



(Brook Taylor 1715, Johann Bernoulli 1728)

Théorie du son (Lagrange 1759)

Imaginons l'air dans un tube comme une suite de molécules attachées par des forces élastiques et dénotons y_i le déplacement de la i -ème molécule du point d'équilibre ...



accélération de la particule y_6 :

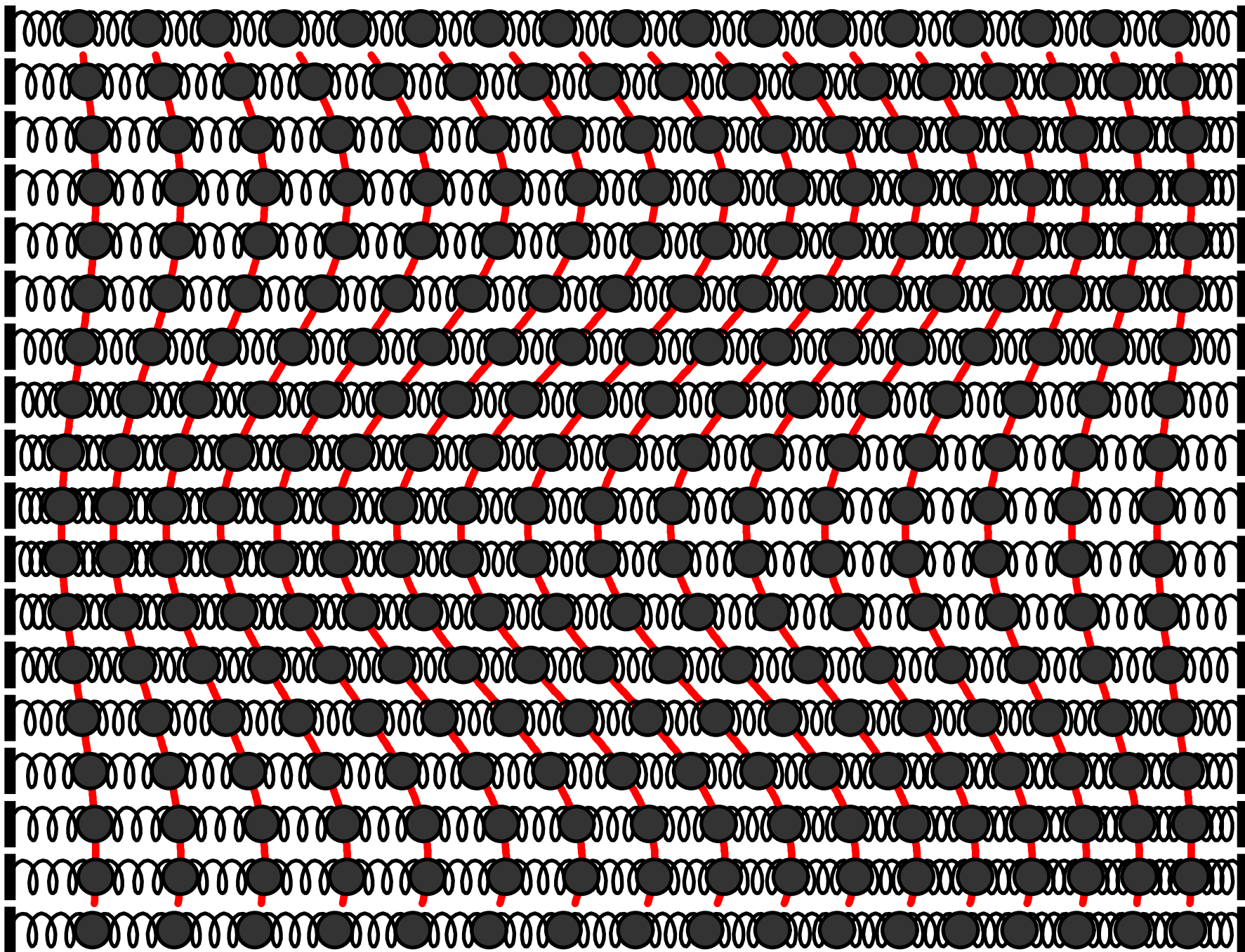
$$a_{\text{acc}} = K \cdot ((y_7 - y_6) - (y_6 - y_5)) = \dots \text{(rappel !!)} = \text{acc de la corde}$$

Lagrange (1762): “en examinant les équations, ... je me suis bientôt aperçu qu’elles ne différaient nullement de celles qui appartiennent au problème *de chordis vibrantibus*...”

$\Rightarrow$ nous avons exactement les mêmes mouvements que pour la corde, cette fois-ci horizontalement et non verticalement, constante a = vitesse du son.

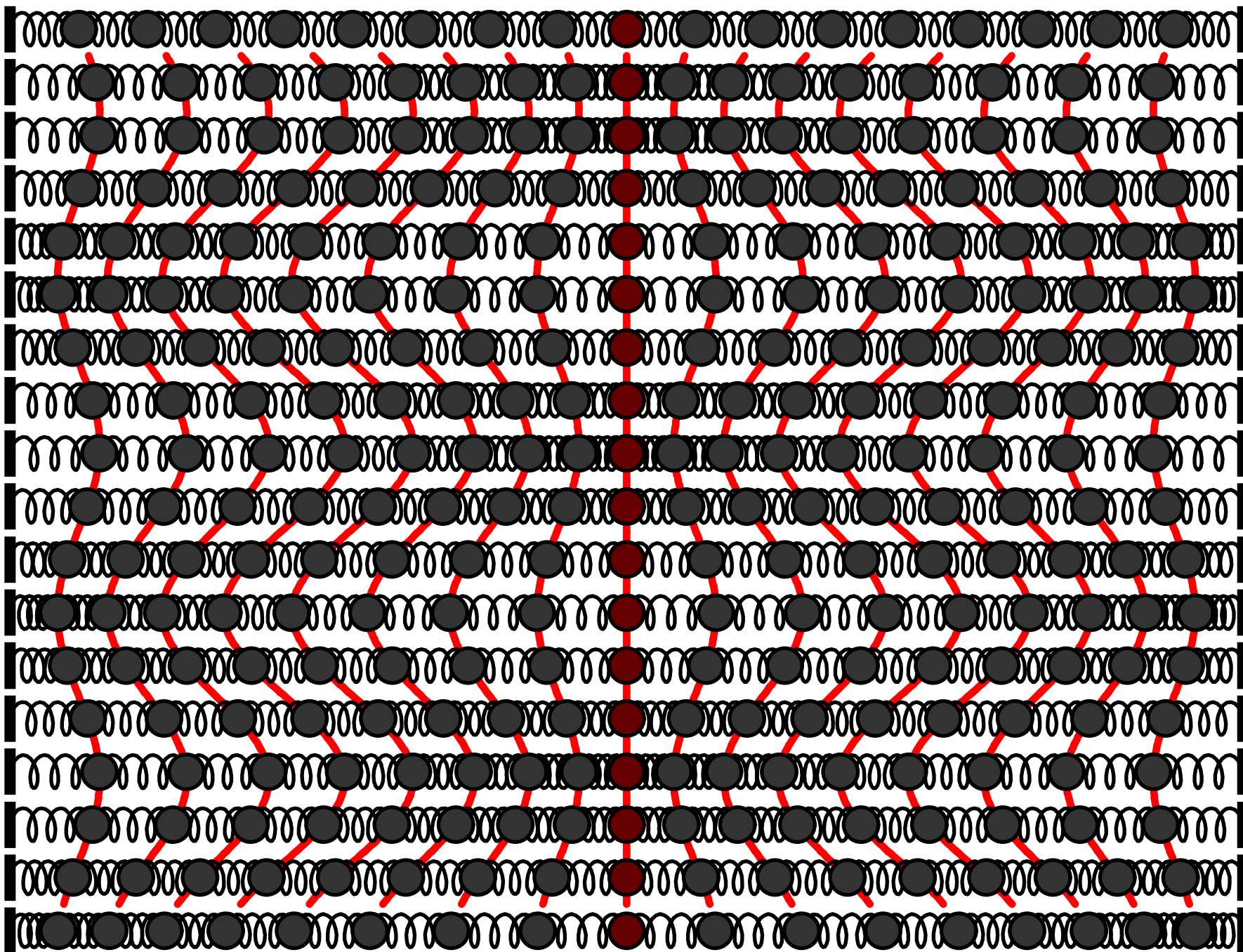
Solutions $u = \sin(x) \cdot \sin(at)$:

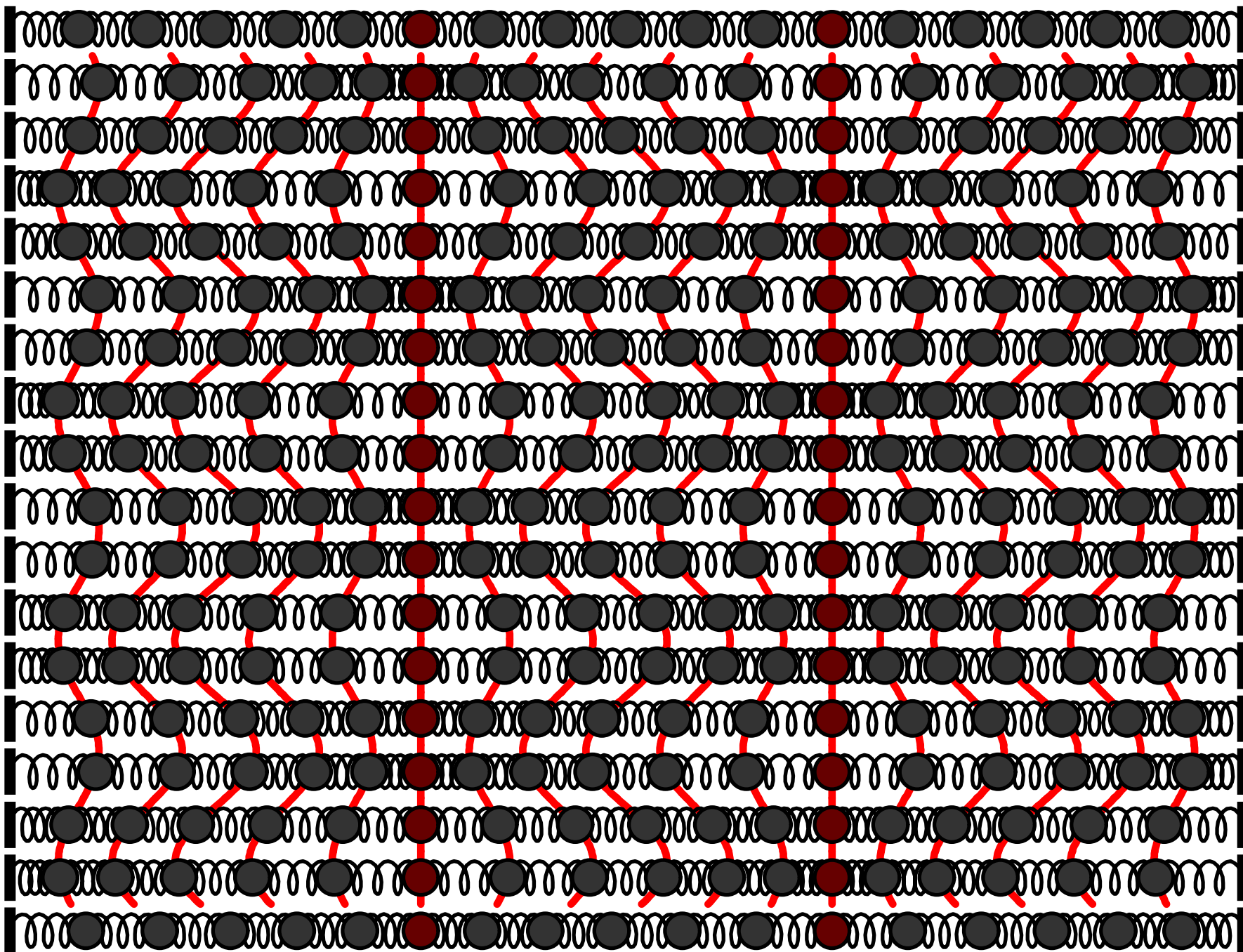
$= 1$



Solutions $u = \sin(2x) \cdot \sin(2at)$:

$= 2$

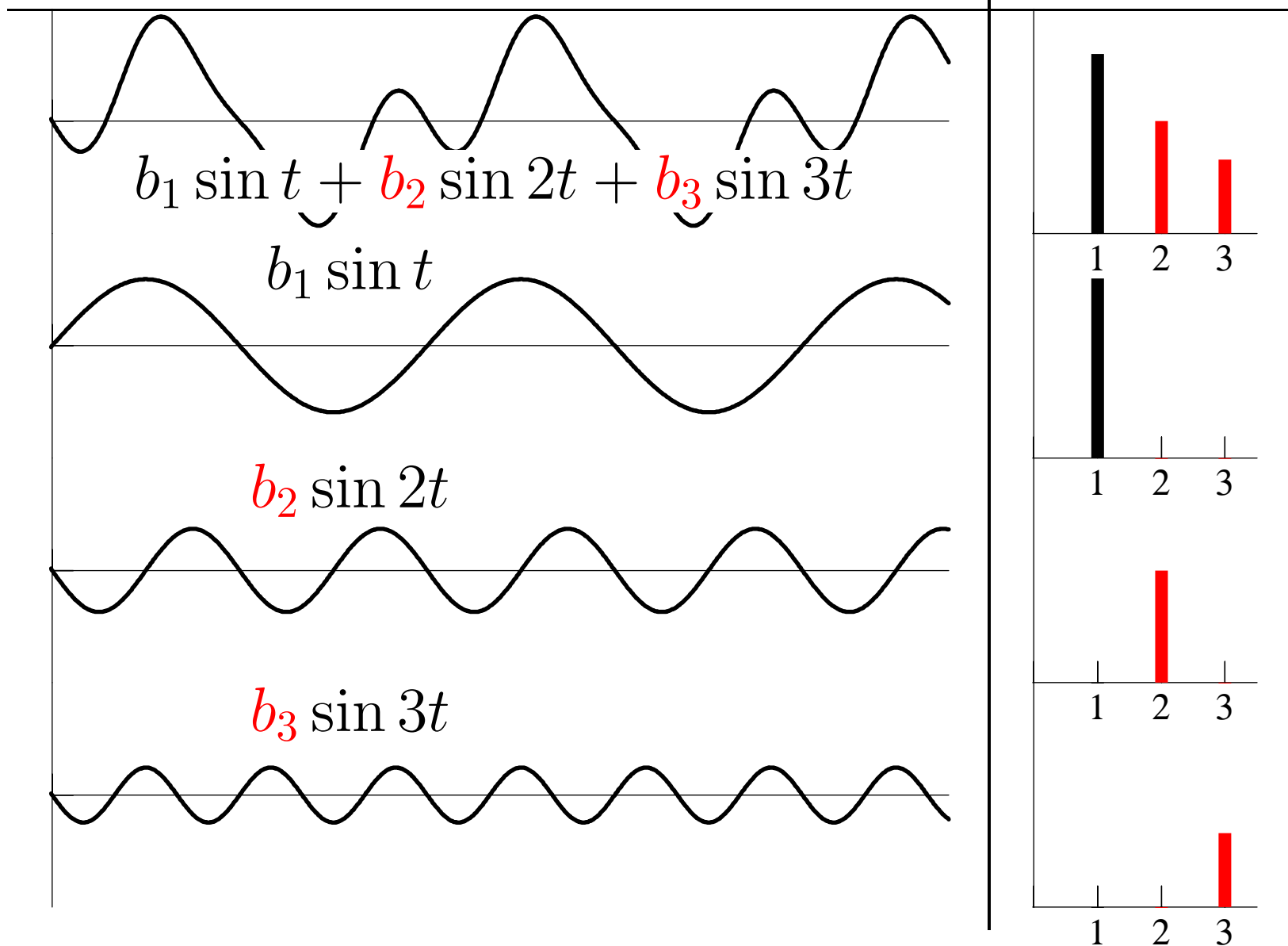


$$= 3$$


Sons composés avec plusieurs “harmoniques”:

Son composé, son fondamental, harmoniques

Spectre

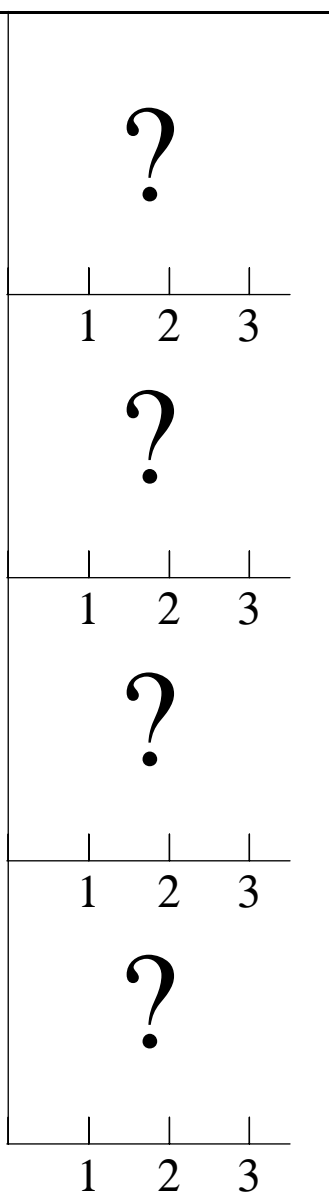
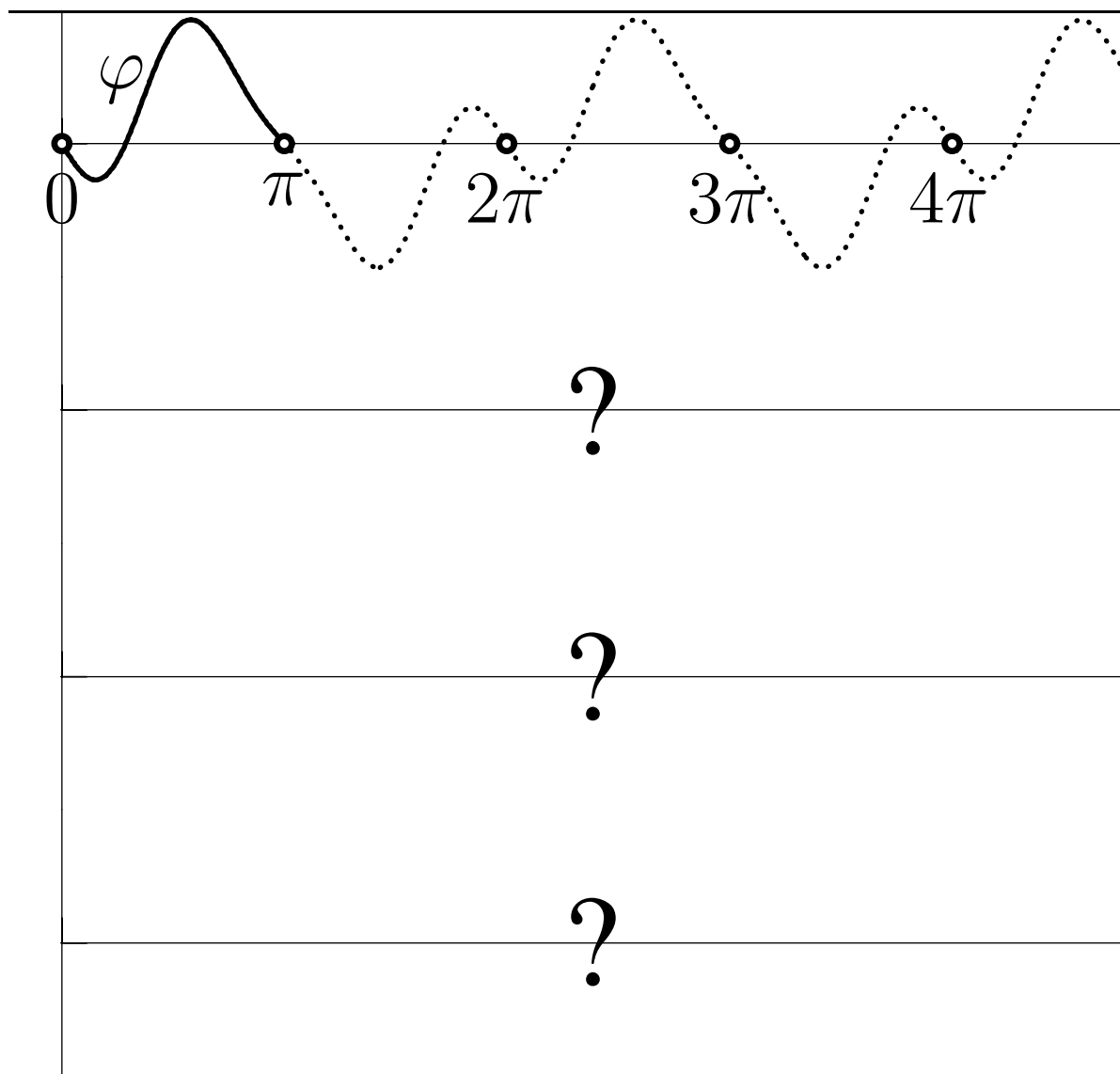


Question réciproque:

Sons composés avec plusieurs “harmoniques”:

Son composé, son fondamental, harmoniques

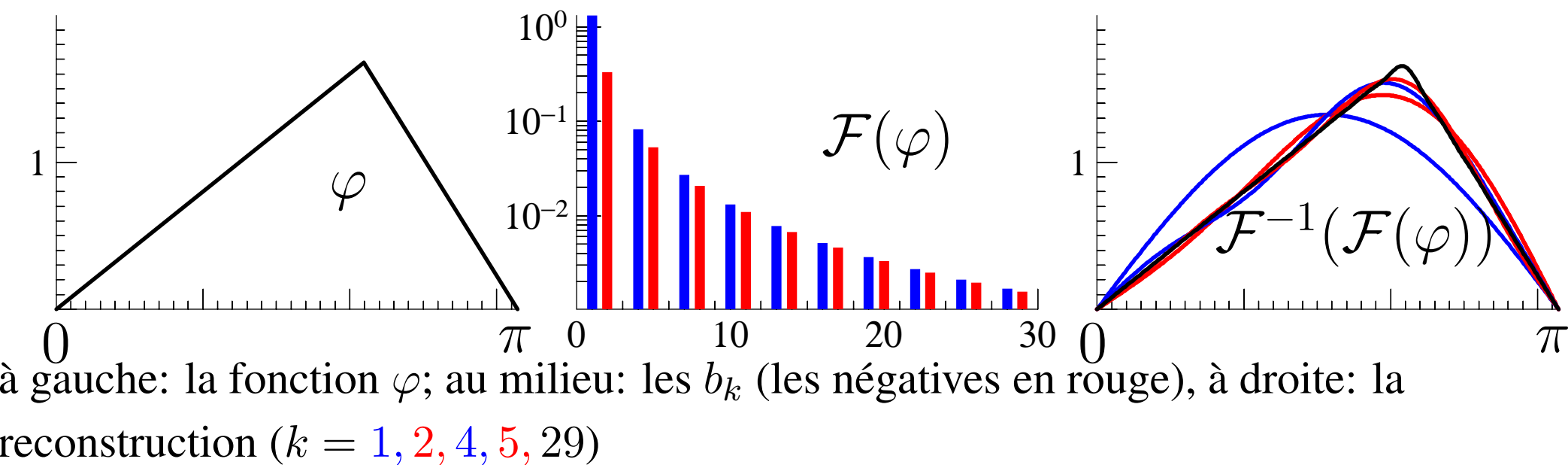
Spectre



Question réciproque: Pour la courbe $\varphi(x)$ ($0 \leq x \leq \pi$) retrouver $b_1, b_2, b_3, \dots$?

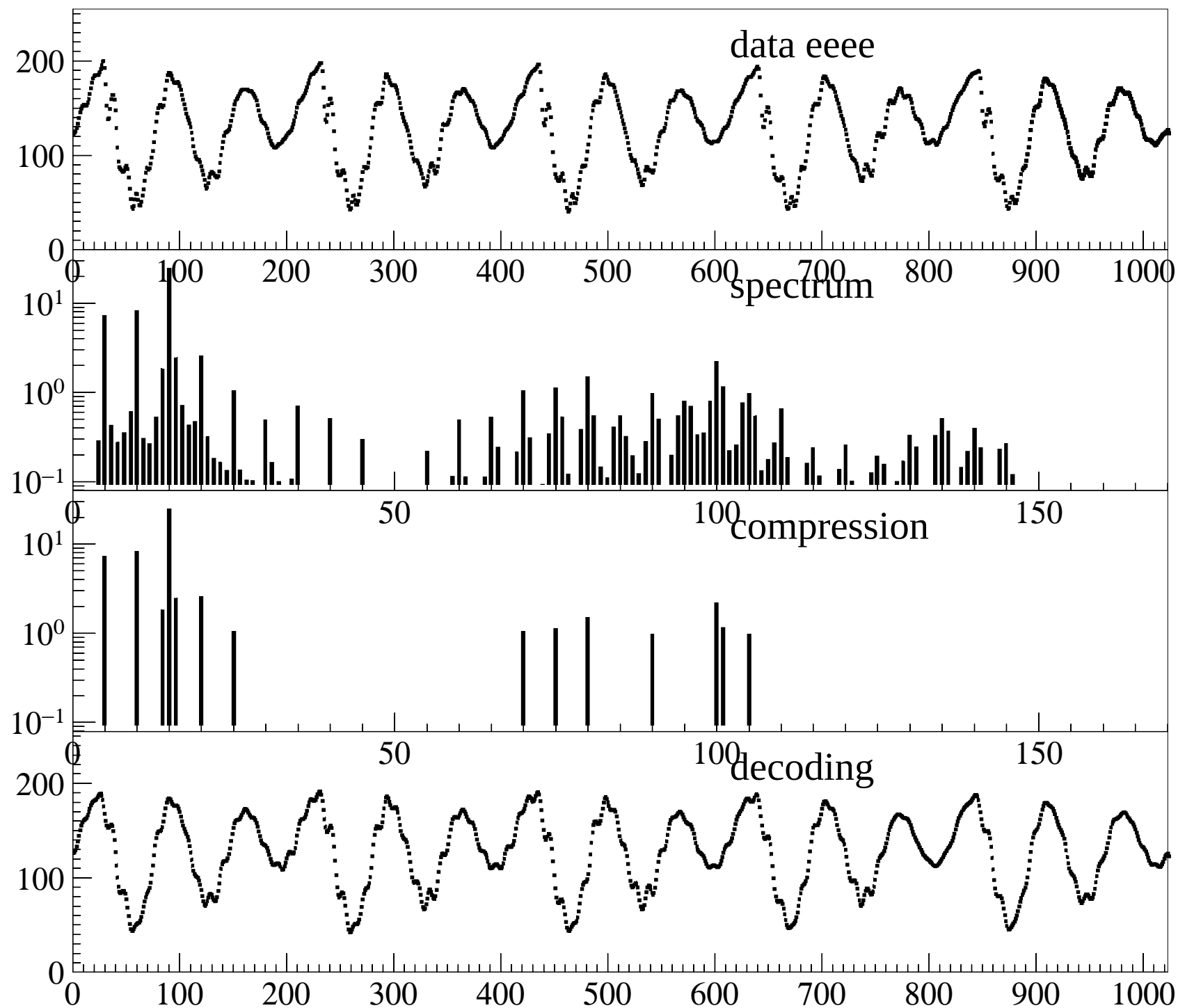
Transformée de Fourier. Cet algorithme donne pour un “signal” donné $\varphi(x)$ le spectre $\mathcal{F}\varphi = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$. Fourier (1807, 1822) a mis plusieurs années et 25 pages de calculs à la trouver. La voici:

$$\mathcal{F} : b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \cdot \sin kx \, dx \quad \mathcal{F}^{-1} : \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin kx .$$

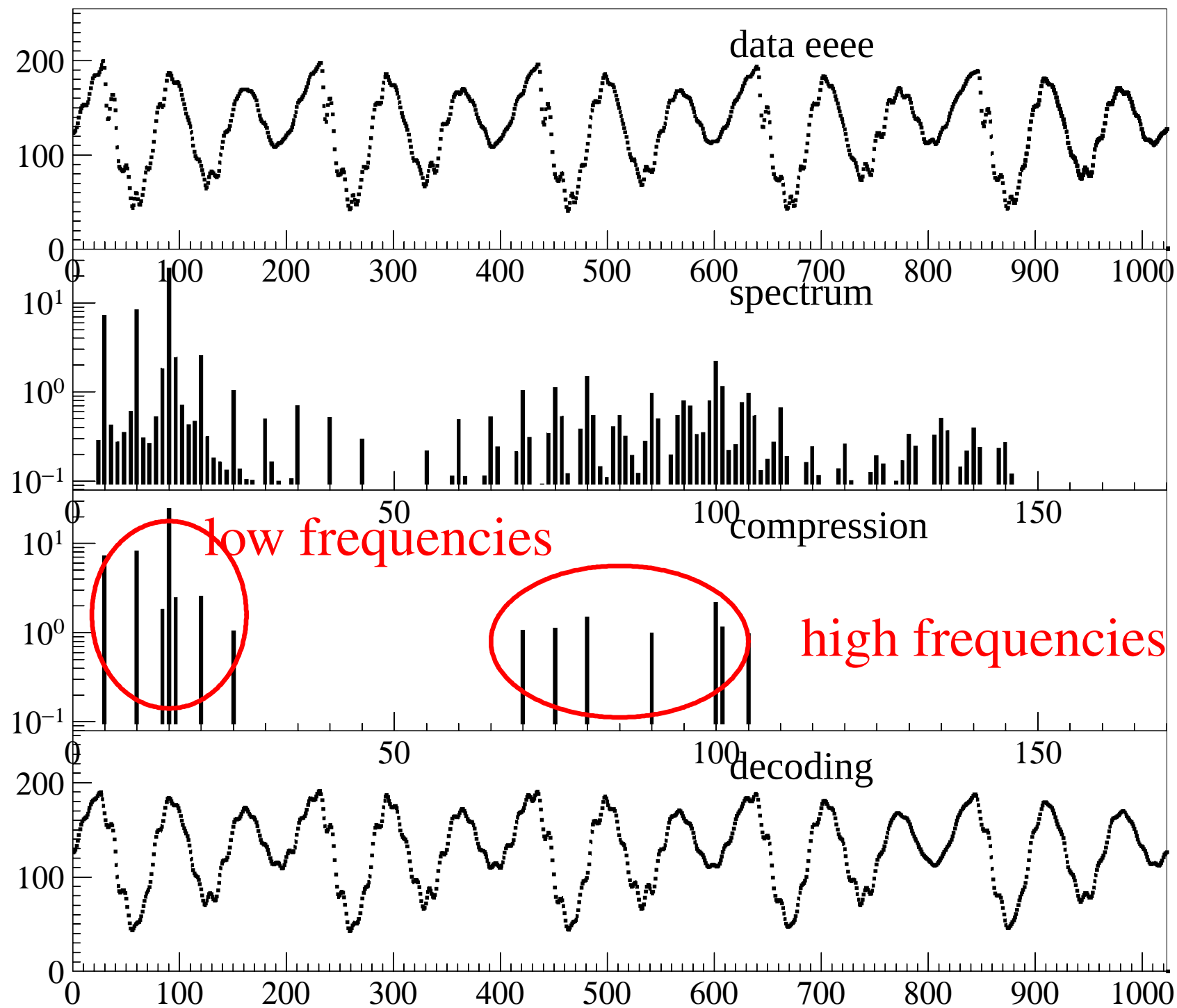


C. Runge (1903) et Cooley-Tukey (1965) ont trouvé un procédé pour faire ce calcul **très rapidement (Fast Fourier Transform = FFT)** au cas où $n = 2^k$.

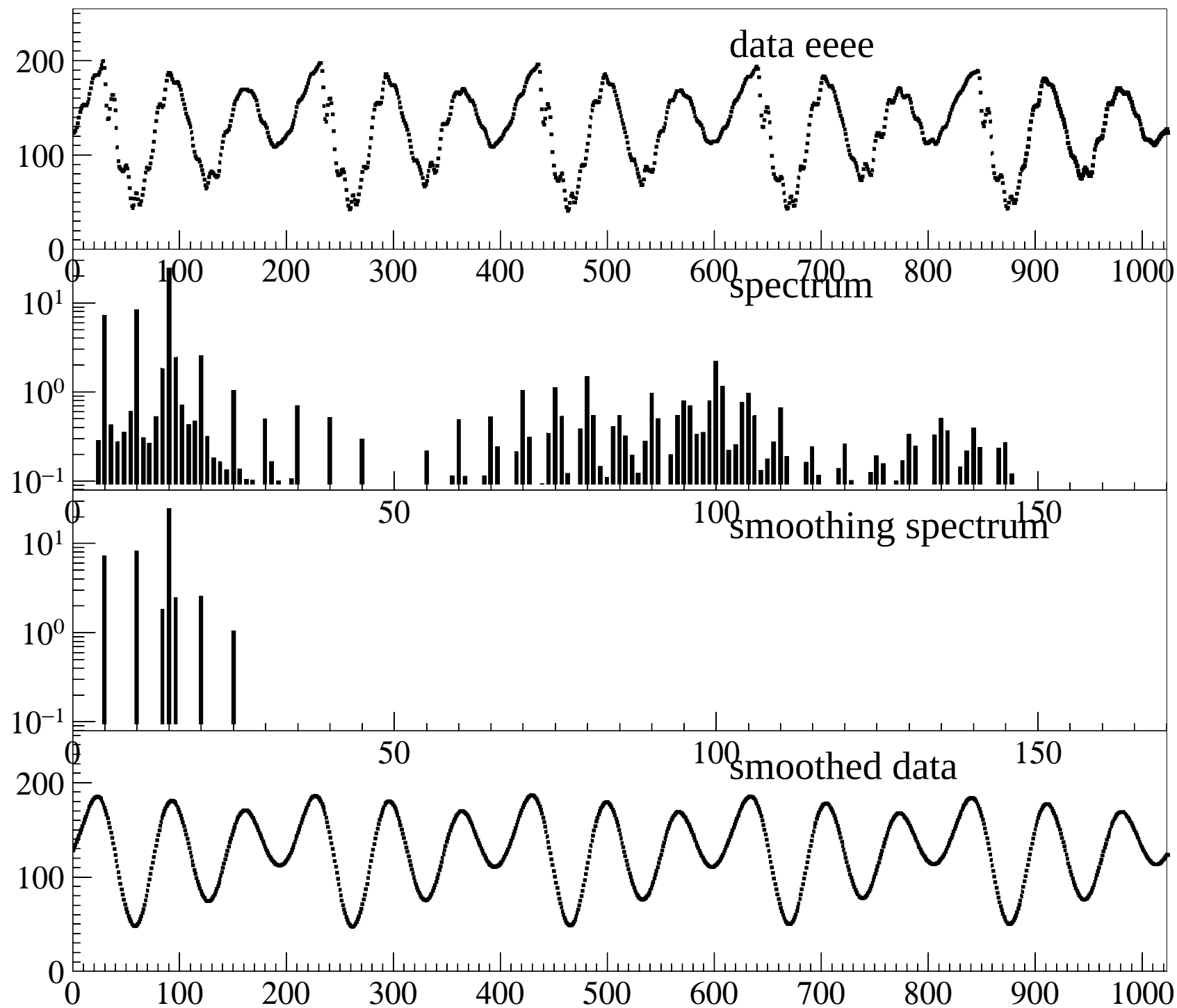
Principle of data compression (MP3). (Kh. Brandenburg)



Principle of data smoothing, denoising.



Principle of data smoothing, denoising.



Principle of JPEG data compression.

(“Joint Photographic Experts Group”)



any photograph
is cut into pieces
of 8×8 pixel

Principle of JPEG data compression.

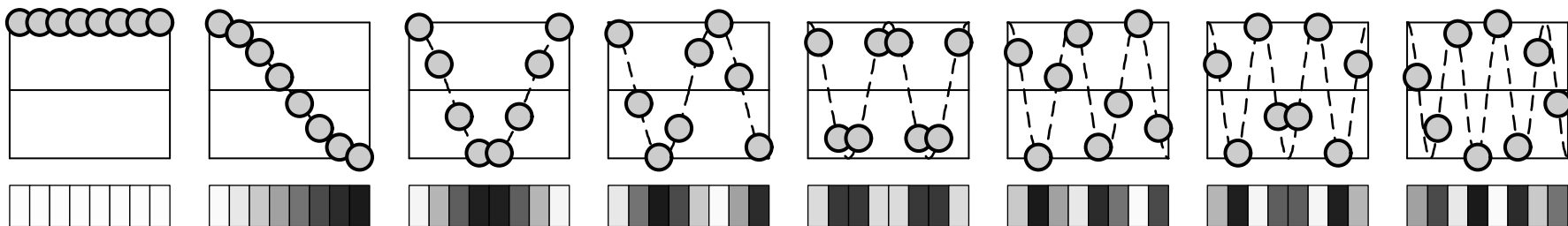


any photograph
is cut into pieces
of 8×8 pixel

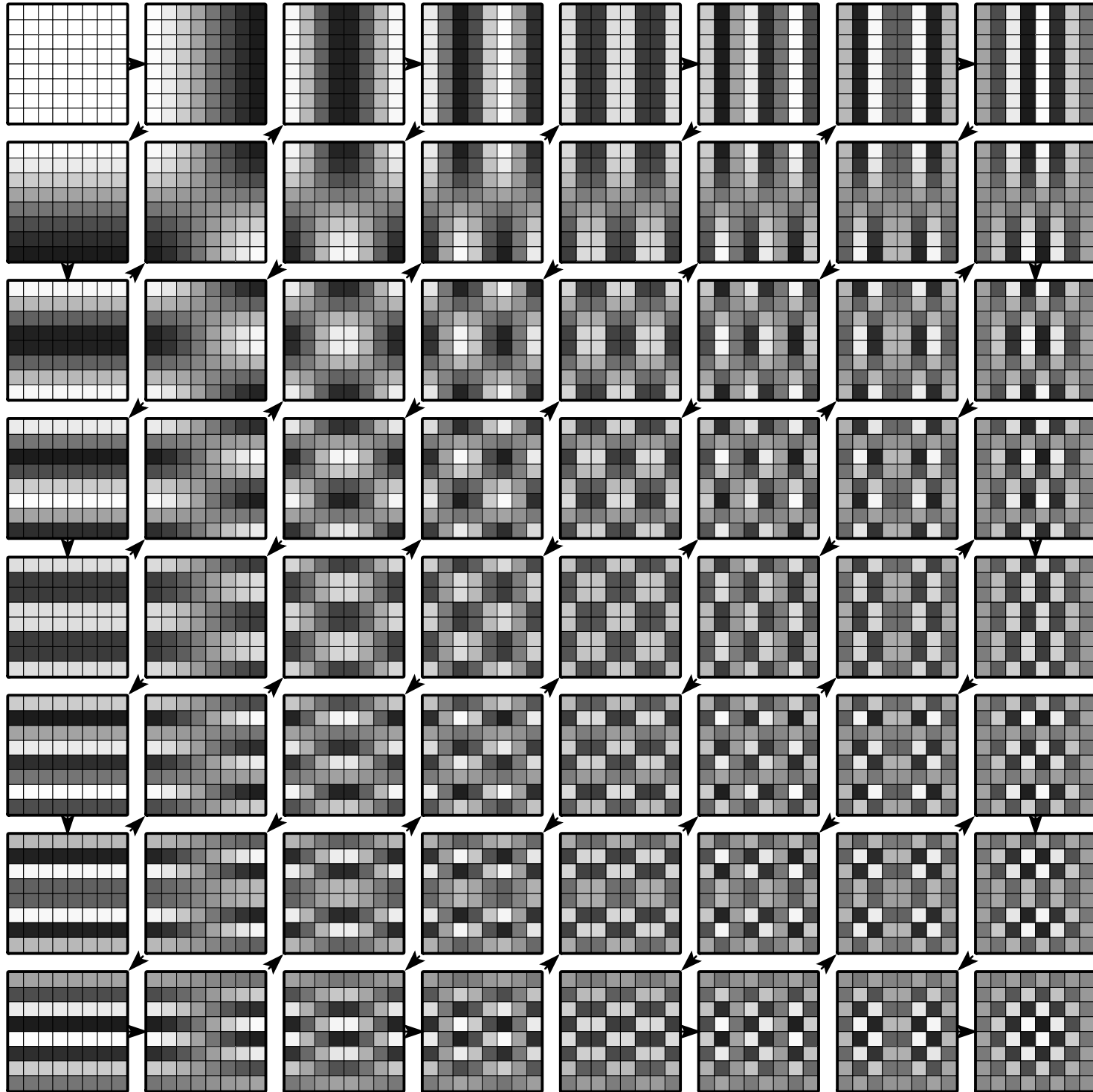


$\Rightarrow$
and each piece is
treated individually

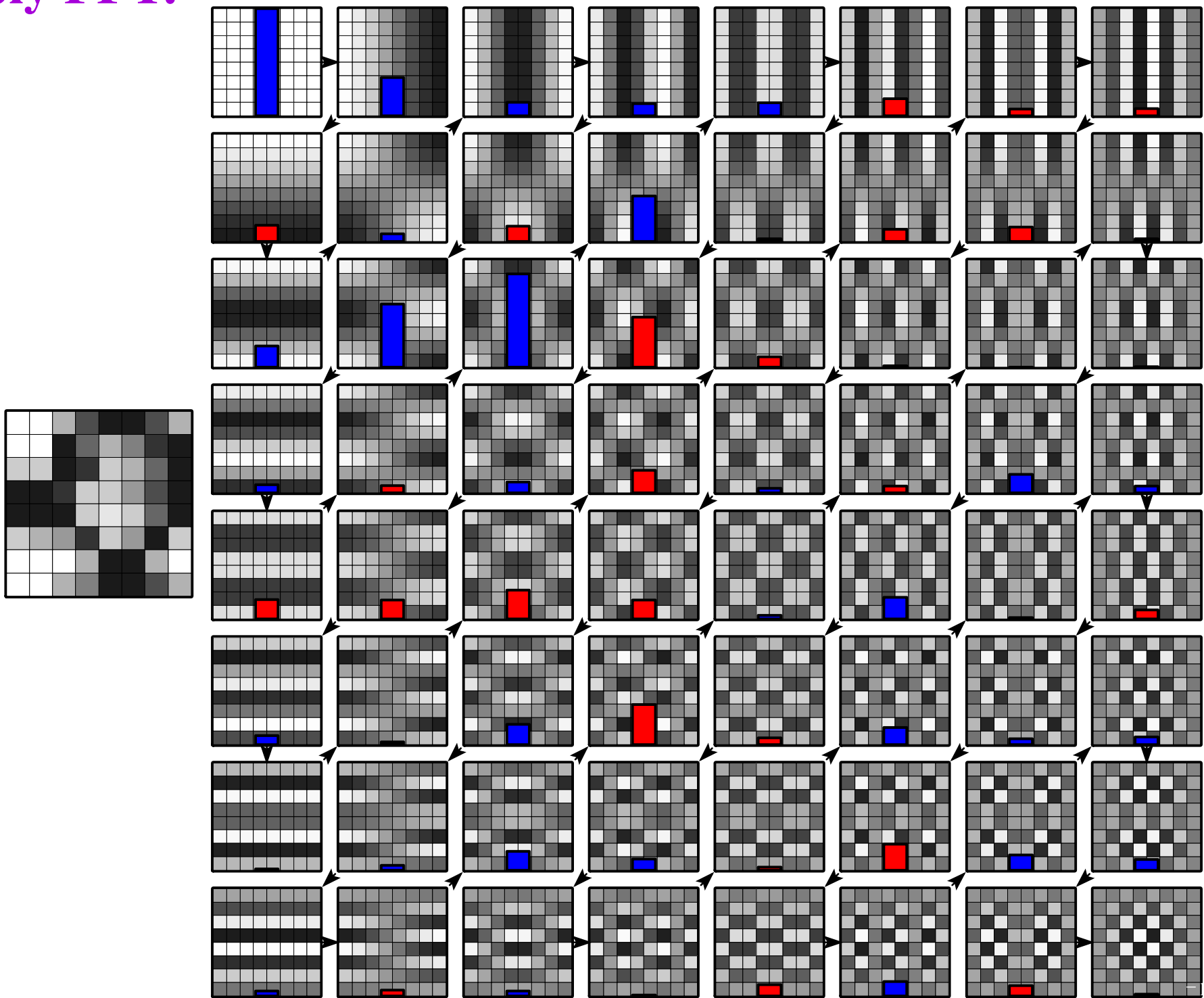
“Sound” is now two-dim.! $\Rightarrow$ one-dim. base $\cos k\pi x$



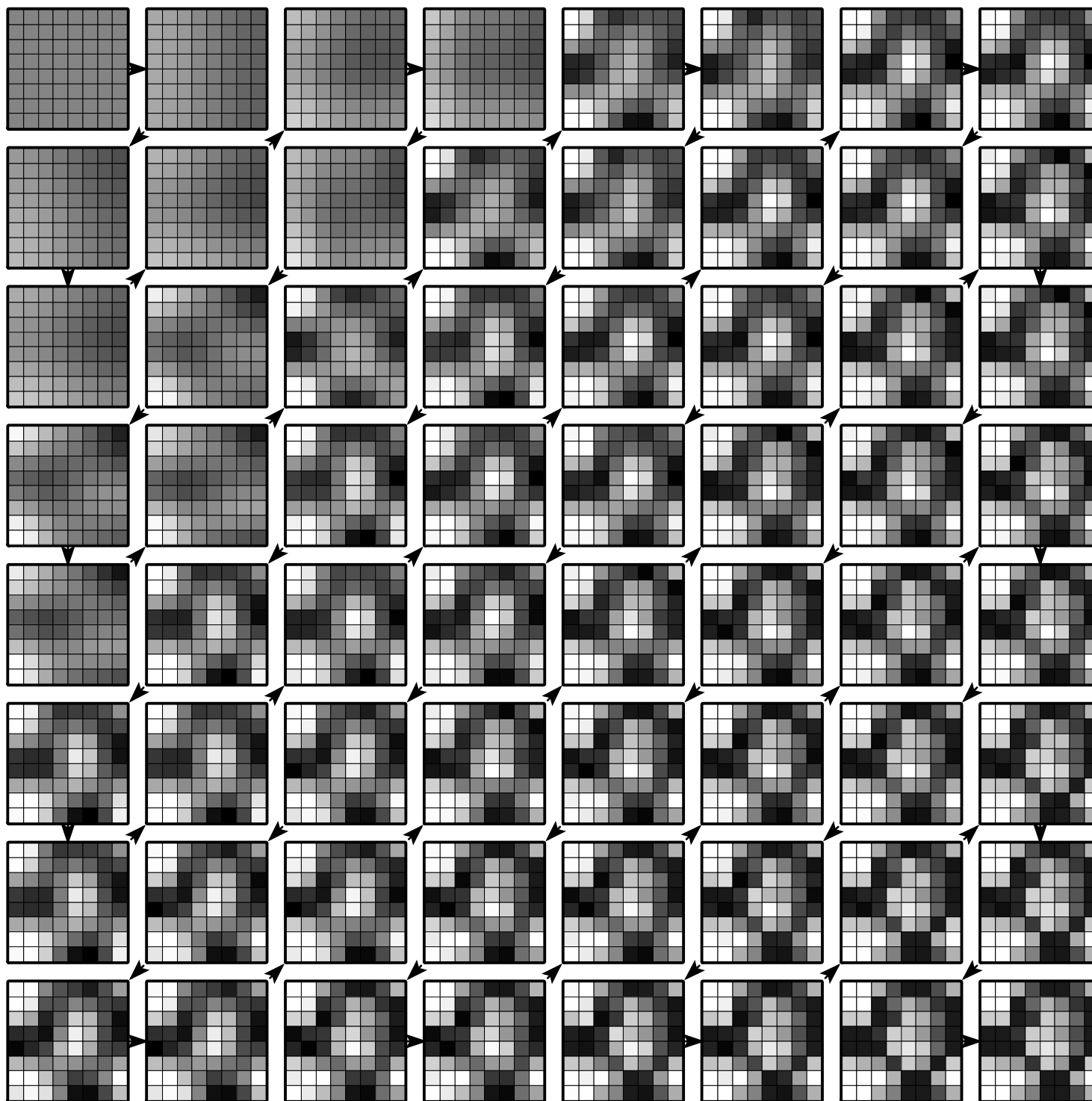
transform into two-dimensional base... $\cos k\pi x \cdot \cos \ell\pi y$:



Apply FFT:



stages of reconstruction of image :



- Adaptation à des films et DVDs:

JPEG $\Rightarrow$ MovingPictureExpertsGroup $\Rightarrow$ MP3
--

- CDs encode sound as linear PulseCodeModulation, hence, not compressed [1981 technology] !
- Transferring CD tracks to something like an Apple iPod (portable music device) will compress the results from the FFT data.
- Audio tracks on DVDs use a similar process, compressing sound frequency data.

(Thanks to Kyle Granger for these informations).