

DES TRAVAUX D'ÉLÈVES

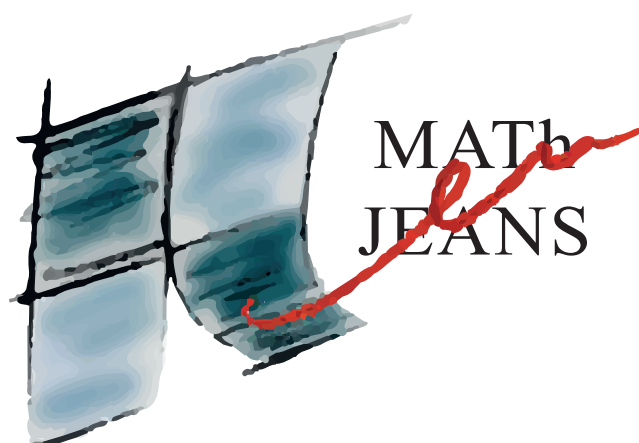
de 1989 à 2018





Brochure éditée par l'Association MATH.en.JEANS,
mise en page par Mélanie Toto (DS.Prod)
et imprimée par Pixartprinting
Mars 2019

Association MATH.en.JEANS :
Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris
www.mathenjeans.fr



Idée fondatrice. Une activité mathématique qui restituerait les dimensions principales du travail du mathématicien (liberté, échange, documentation, découverte, recherche, invention, responsabilité, publication) procurerait à ses auteurs une joie semblable à celle qui anime les mathématiciens dans leur métier.

Pierre Duchet

(actes de l'Université d'été 1996 Recherche mathématique et formation, Université de Bourgogne)

MATh.en.JEANS, 30 ans déjà

L'avenure MATh.en.JEANS a commencé entre deux lycées en 1989. Le premier congrès s'est tenu dans un château à Vaugrigneuse (Essonne) en février 1990. Deux méchantes fées se sont alors penchées sur le berceau du nouveau-né et ont déclaré : "il ne vivra pas". Erreur, il approche de la trentaine.

Pour raconter sa vie, le mieux est de donner la parole aux élèves au travers de leurs écrits, congrès après congrès. Bien sûr les élèves ne sont pas les mêmes en 1990, en 2000 ou en 2015, et cela se voit bien dans leurs écrits. La première année, le congrès rassemblait 26 élèves, il n'était pas question de faire des "actes" du congrès, mais pendant l'année, lorsqu'ils avaient mis au point une démonstration, ils avaient le droit de la recopier dans "le livre", registre que nous avons mis à leur disposition. Puis est venu le principe de la brochure annuelle des actes du congrès, ensuite la mise en ligne et de nouveau des brochures contenant une sélection de textes comme celle-ci. Si la forme est à peu près unifiée dans cette brochure, il n'était pas question de demander aux auteurs des textes sélectionnés de reprendre leur travail pour l'harmoniser avec les autres.

Et réparties à la fin des articles, les "lois" des primaires de 1992 : les enfants de l'école Frédéric Mireur de Draguignan, accompagnés de Pierre Eysseric, Pierre Parlant et Roland Canal avec le chercheur Marc Hindry avaient formulé les résultats obtenus dans leurs activités de recherche sous la forme de lois, dont certaines pourront surprendre le lecteur.

Le lecteur notera qu'à partir de 2012, deux articles sont sélectionnés chaque année, pour tenir compte du grand nombre de participants ; le développement à l'étranger nécessitait aussi la sélection d'un article en anglais. Nous avons cherché à choisir des articles de tous niveaux et de toutes régions.

Survenu alors que cette brochure était en gestation, le décès de Pierre Duchet, l'un des Pierre fondateurs de MATh.en.JEANS, nous a incités à insérer un texte de lui en introduction aux articles des chercheurs en herbe.

sommaire

» 1990 L'infini , Paris & Argenteuil, lycée (extrait du "livre")	P.11
» 1991 L'algorithme de Kaprekar , Colmar, lycée	P.13
» 1992 Brachistochrone : le chemin le plus court est-il toujours le plus rapide ? , Noisy le Grand, collège	P.17
» 1993 Les bretnoms , St Brice & Montmorency, collège	P.23
» 1994 Équation de Pell-Fermat , Argenteuil, lycée	P.33
» 1995 La suite de Conway , Aix-Marseille, Deug	P.45
» 1996 Systèmes balançaires , Nanterre, collège & primaire	P.53
» 1997 Problème de Syracuse , Bordeaux, lycée	P.65
» 1998 Communiquer dans une grille , St Brice, collège	P.67
» 1999 Les crêpes , La Mure, lycée	P.77
» 2000 Le problème des interrupteurs , Mérignac & Lormont, lycée	P.89
» 2001 Colliers de perles , Cluses & Paris, lycée	P.95
» 2002 Les plus courts chemins sur le cube , Briançon, lycée	P.105
» 2003 Découpage de la France , Cergy, collèges	P.109
» 2004 Le labyrinthe , Argenteuil, lycée	P.113
» 2005 La stratégie des allumettes , Mérignac & Pessac, lycée	P.117
» 2006 Jeu de miroirs , Bordeaux, lycée	P.129
» 2007 Ça roule à Saint-Orens , Saint-Orens, lycée	P.139
» 2008 Tout noir, tout blanc , Gières, collège	P.147
» 2009 La géométrie du tas de sable , Le Mans et La Flèche, collège	P.151
» 2010 Les carrelages , Bondy, collège	P.175
» 2011 Les carrés magiques , La Tremblade, collège	P.179
» 2012 La géolocalisation , Auray, lycée	P.185
» 2012 Drôles de touches , Fameck, lycée	P.205
» 2013 Calculer à la règle non graduée et au compas , Nancy, collège	P.213
» 2013 De l'aire! , Le Port & Saint Denis de La Réunion, lycée	P.225
» 2014 Figures isoaires , Bressuire, lycée	P.233
» 2014 Modélisation de croissance d'un arbre , Cluj & Briançon, lycée	P.255
» 2015 Le berger et ses moutons , Toulouse, lycée	P.269
» 2015 Découpage de polygones de même aire , Nancy, collège	P.277
» 2016 Les robots reproducteurs , Petit-Lancy & Thonon-les-Bains, lycée	P.283
» 2016 Du café ou du chocolat ? , Villers-lès-Nancy, collège	P.295
» 2017 Une crêpe très fragile... , Paris, lycée	P.307
» 2017 Une drôle de salle de bains , Orsay, collège	P.319
» 2018 Impossible ? Mon œil! , Orthez, collège	P.327
» 2018 We get 2017 , Perpignan & Buzau, lycée	P.335

L'atelier, lieu de vie de MATH.en.JEANS

C'est en effet dans chacun des quelques 300 ateliers que se déroule la vraie vie de MATH.en.JEANS. Une vie foisonnante, sérieuse et animée, curieuse et dynamique par la volonté des plus de 4 500 élèves, 600 enseignants et 200 chercheurs qui s'y rencontrent au fil des moments de recherche, des séminaires et des congrès. Mais ce sont là les chiffres clés de l'année scolaire 2017-2018. Il n'en a pas toujours été ainsi.

En 1989, Pierre Duchet, chercheur au CNRS, Pierre Audin et René Veillet, professeurs de lycée, décident de lancer une expérience qui va modifier le regard porté sur les mathématiques et leur enseignement. Il s'agit d'engager des élèves volontaires à faire par eux-mêmes, et en groupe, un véritable travail de recherche. Le projet portera le nom de MATH.en.JEANS, acronyme pour : **Méthodes d'Apprentissage des Théories mathématiques en Jumelant des Établissements pour une Approche Nouvelle du Savoir**. Cette année-là, sont nés les premiers ateliers mathématiques en lycée.

L'expérience est regardée et suivie avec un grand intérêt par quelques enseignants. Comme en témoigne l'une d'entre eux : "Je me suis lancée dans l'aventure dès la rentrée 1990. L'idée de mettre les participants, non plus en situation d'observation ou de reproduction, mais dans une véritable activité de recherche à contenu mathématique, mettant en jeu leur curiosité, leur intérêt, m'avait conquise. Et je les ai vus, ces jeunes volontaires de niveaux variables, prendre goût à la découverte de leurs propres mathématiques, le faire sérieusement et avec plaisir, en équipe et sans aucun souci de compétition, sous le regard bienveillant et rigoureux du chercheur."

Attardons-nous sur ce terme alors inattendu : en jumelant. Dans l'esprit de ces pères fondateurs, les ateliers ne seront pas enfermés en un lieu, selon une seule méthode mais ils pourront échanger, s'ouvrir à des idées différentes à la fois sur le fond et la forme. Et on voit poindre ici l'idée de proposer aux jeunes de travailler comme des chercheurs. Le chercheur, mais

il y a des exceptions, ne travaille pas seul dans un bureau ; il va collaborer d'abord au sein d'une équipe dans un laboratoire et débattre avec d'autres équipes venues d'autres laboratoires. Les ateliers fonctionneront ainsi et adopteront plus généralement le rythme des universitaires :

- » découverte d'un sujet (ici proposée par un chercheur, universitaire ou non),
- » recherche en petite équipe,
- » rencontres avec un groupe jumeau (on dira des séminaires),
- » rencontre annuelle avec tous les autres ateliers pour présenter la recherche effectuée et, si possible, les découvertes (ce sera le congrès),
- » la publication de ces recherches et découvertes.

Cette "philosophie" perdure même si le nombre d'ateliers est en perpétuelle augmentation et s'ils se développent aussi à l'étranger : les projets européens (Erasmus+) avec la Roumanie par exemple, les lycées français jusqu'en Inde ou sur le continent américain. Les lieux de congrès ont dû être multipliés pour faire face à l'arrivée de ces jeunes qui, pour beaucoup, souhaitent partager cette même passion pour les maths et montrer ce qu'ils ont su faire. Ce qui était au départ une expérience marginale s'est étendue et a acquis la reconnaissance du ministère de l'Éducation nationale.

Mais revenons sur le vécu d'un atelier du 21^e siècle ! nous parlions des trois composantes : les élèves, les enseignants, les chercheurs. La cohérence et la bonne entente de ce trio sont un gage de réussite pour l'atelier ; encore que l'appréciation de cette réussite soit très relative puisqu'il n'y a pas d'évaluation, à aucun moment. Chacun sait intimement s'il a atteint le but qu'il s'était fixé en se lançant dans l'aventure. Parfois il ou elle se sous-estime et ce n'est que plus tard qu'il ou elle comprendra le progrès que son travail en atelier lui a fait faire. Une ou un autre au contraire saura que sa recherche n'était que superficielle et voudra la poursuivre. Ou encore... n'en gardera aucun souvenir.

Commençons par les enseignants, professeurs de mathématiques pour la plupart, en collège ou en lycée ; plus rarement en école primaire ou dans l'enseignement supérieur. C'est le plus souvent l'un d'eux ou l'une d'elles, ou encore une petite équipe pédagogique d'un établissement qui, ayant entendu parler* de MeJ, décide de tenter l'expérience. L'atelier se tiendra en milieu scolaire, il faut donc respecter les règles et obtenir l'adhésion du chef d'établissement. Puis informer les élèves pour réunir un petit groupe de volontaires, filles et garçons, pas forcément les "bons en maths" mais des curieux soucieux de découvertes dans cette discipline trop souvent effrayante! Leur nombre ? Au moins deux pour pouvoir discuter ; mais trop serait compliqué. Il faut trouver un moment dans l'emploi du temps ; ce n'est pas le plus simple! Une heure par semaine semble un minimum.

Trouver un chercheur n'est pas toujours tâche facile**. Tout dépend de la distance à un centre universitaire ou un laboratoire de maths. C'est lui ou elle qui élabore les sujets sur lesquels les jeunes vont se pencher. Il y a de multiples façons de procéder : un ou plusieurs sujets, imposés ou non, précédés ou non d'une réflexion avec l'enseignant. Il arrive parfois que ce soit les élèves qui proposent un sujet. Quoi qu'il en soit, il est souhaitable qu'il y ait explications, débats, réflexions et analyses en commun, bonne compréhension et adhésion avec le travail proposé. Ce sera fait au moment du premier séminaire au cours des quatre ou cinq premières semaines de l'année scolaire. Il réunira les deux ateliers jumeaux, les deux responsables et le chercheur.

La recherche étant lancée, le responsable d'atelier a surtout un rôle d'observateur. Il n'interviendra que pour faire face aux découragements, remettre en route, aider aux contacts (le plus souvent par internet)

avec le chercheur ou la chercheuse. Veiller à ce que rien ne se perde : les fausses pistes, les erreurs sont souvent trop souvent détruites ; il est bon de conserver leur trace pour les reprendre au bon moment.

Quelques semaines plus tard, un deuxième puis un troisième séminaire permettront de comparer les méthodes, les pistes envisagées, les résultats obtenus ou non et, vers la fin mars, préparer la participation au congrès. En 2018, douze congrès dont quatre hors de France ont réuni la quasi totalité des élèves. C'est, pour chaque atelier, le temps fort de l'année! Pénétrer et vivre quelques heures dans une université ou une grande école, présenter ses recherches en amphithéâtre, tenir un stand où les autres participants pourront poser des questions, tout cela est un défi qui fait grandir et pas seulement en maths!

Enfin, dernière tâche et pas la plus aisée : écrire un texte qui sera publié. Mais tâche indispensable pour laquelle les plus jeunes pourront recevoir l'aide de leur responsable d'atelier. Cette publication a pour but de laisser une trace du travail accompli et aidera à faire le point sur les progrès réalisés et mieux se les approprier.

* par le bouche à oreille, un plan académique de formation, une information dans une maison pour la science, etc.

**les ateliers sont aidés et soutenus par les coordinations régionales auxquelles ils peuvent s'adresser pour tout problème pratique tel que le budget, la recherche d'un chercheur ou d'un jumelage. Le site www.mathenjeans.fr offre également une aide non négligeable.

Ci-dessous un texte de Pierre Duchet paru dans le "Bulletin vert" n° 507 de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public).

L'écrit et la méthode

Une introduction aux articles d'élèves dans les ateliers MATH.en.JEANS

Pierre Duchet

Chercheur au CNRS, Projet Combinatoire et Optimisation, Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris ; co-initiateur, avec Pierre Audin et René Veillet, de l'opération MATH.en.JEANS en 1989-90.

Faire vivre les mathématiques par les jeunes, grâce à l'exercice de la recherche : la "méthode" MATH.en.JEANS (en abrégé MeJ) reconstitue en modèle réduit dans les établissements qui participent (écoles, collèges, lycées ou universités) la vie d'un laboratoire de mathématiques. Le Bulletin vert n° 482 (mai-juin 2009) a consacré un dossier complet à ces ateliers de recherche ; le présent numéro publie plusieurs exemples récents d'articles de mathématiques produits par des élèves au cours de leur année MeJ.

UN CONGRÈS

Dans le vécu de chaque atelier MeJ, et pour chacun de ses tout jeunes acteurs, c'est le congrès qui, sans aucun doute, représente le point culminant de l'année de recherche : organisé en début de printemps sur plusieurs sites parallèles, le congrès est un moment unique de synthèse, d'institutionnalisation et d'évaluation, qui concrétise tous les efforts de recherches consentis depuis le début de l'année. Sa préparation donne à chaque chercheur en herbe l'occasion irremplaçable d'une prise de conscience des résultats obtenus (par lui, par son groupe ou par le groupe jumeau⁽¹⁾) et d'une nouvelle réorganisation de connaissances, aussi bien celles qui ont été investies dans la situation que celles qui sont apparues au cours de la recherche : mises au point, mises en ordre et mises en forme sont nécessaires à la présentation des travaux au congrès, face à la critique d'une communauté scientifique élargie.

Si important qu'il soit, le congrès n'est toutefois, dans l'esprit des concepteurs de l'opération MeJ, qu'une aventure parmi d'autres dans le déroulement de l'atelier de recherche : il en représente bien sûr un épisode particulièrement riche et héroïque, mais il n'en est ni son aboutissement, ni sa conclusion.

DES ŒUVRES MATHÉMATIQUES

Dans MeJ en effet, le "Grand Oral" est avant "l'Écrit". Bien sûr, recherche coopérative, élaboration et discussion entre pairs des avancées, échanges critiques avec les chercheurs, et exposé public des résultats représentent effectivement des principes constitutifs de l'atelier MeJ, mais on peut dire que l'ambition véritable de chaque projet consiste en la mise en œuvre, effective et aboutie, d'une démarche scientifique en mathématiques.

De manière concrète, il ne s'agit, ni plus ni moins, que de faire réaliser par des élèves "comme tout le monde" une authentique œuvre mathématique. En rupture avec la coutume de la classe, les élèves MeJ doivent quitter peu à peu leur posture de spectateurs de mathématiques, pour prendre celle d'acteurs de mathématiques. Puis, à l'instar de ce qui se passe dans les laboratoires de recherche, ces acteurs deviennent auteurs de mathématiques.

Pour la plupart de nos chercheurs novices, il s'agit d'une "première fois" et nombreux sont ceux qui abordent avec appréhension un quelconque travail d'écriture. Mais la transformation d'élève de mathématiques en chercheur de mathématiques est à ce prix, elle ne saurait s'accomplir sans confrontation

de l'apprenti-chercheur à la part écrite du travail de mathématicien, une part à la fois nécessaire et constitutive de son activité : point de recherche véritable sans mémoire de recherche, point d'œuvre mathématique authentique sans publication en direction d'une communauté scientifique. Point de démarche scientifique en mathématique sans compte-rendu de l'expérience d'un problème, élaboration et transmission de résultats.

ÉCRITS, THÉORIES, APPRENTISSAGE

L'écrit est absolument indissociable de la connaissance scientifique. Donnons à ce lien deux raisons fondamentales. Remarquons tout d'abord que le propre d'une connaissance scientifique est d'exprimer la reproductibilité d'un certain phénomène : sous certaines conditions, que l'on peut préciser, telle expérience conduira à tels résultats. On peut même dans certains cas préciser et rendre compte de mécanismes qui expliquent l'advenue de ces résultats. Notons d'autre part, avec Popper, que pour qu'une connaissance soit reconnue comme scientifique et puisse être validée, elle doit pouvoir s'offrir à la critique (réfutabilité)... et pouvoir lui résister (validité)! À l'évidence chacun des caractères, reproductibilité et réfutabilité, exige un recours à l'écrit aussi bien pour la formulation des connaissances scientifiques que pour leur transmission.

On observera que du point de vue de leur fonctionnement épistémique, les mathématiques ne constituent pas une science "à part" : connaissances et résultats mathématiques relèvent des mêmes lois que toute autre connaissance scientifique (2). On peut en fait qualifier de "théorie mathématique locale" tout édifice de connaissances qui adopterait à propos d'objets mathématiques particuliers les critères de validation des connaissances scientifiques.

Ces théories locales comportent des objets et des mises en relation, des données, des concepts, des construits, des objets primitifs, des axiomes, des définitions, des hypothèses, des propositions prouvées, d'autres admises ou supposées,... Mais à la différence des vastes théories mathématiques constituées, inventées ou développées par les mathématiciens au fil des siècles, nos théories locales sont locales et peuvent se construire autour de quelques

objets centraux dans un problème particulier, tel un sujet MeJ.

On peut maintenant reformuler l'ambition pédagogique de chaque atelier MeJ en disant qu'il s'agit d'arriver à ce que chaque groupe de recherche bâtit et fasse vivre une "théorie mathématique locale". Ainsi, comme le souligne d'ailleurs l'acronyme MATH.en.JEANS(3), un projet MeJ comporte une finalité d'apprentissage où l'œuvre mathématique écrite joue un rôle essentiel.

ARTICLES MATH.EN.JEANS

Un article MeJ sera donc simplement la mise en circulation d'une théorie locale, à destination, et à disposition, d'une communauté scientifique élargie, plus vaste que le groupe, l'équipe, l'atelier, la classe, l'établissement ou la communauté des élèves, professeurs et chercheurs de MeJ.

Qu'attend-on d'un article de mathématiques d'élèves "MeJ" ? — En fait, les mêmes qualités que celles que l'on attend d'un article de mathématicien professionnel, avec un desideratum particulier : la clarté. Un bon article MeJ est donc en principe intéressant, pertinent, consistant, vérifiable et clair.

» intéressant. L'article doit présenter un questionnement légitime sur un objet, une problématique de recherche. L'article doit offrir si possible un point de vue, un parcours, et des perspectives.

» pertinent. Les travaux mentionnés doivent relever de la problématique abordée. L'exposé doit s'efforcer d'être synthétique, en insistant sur les points les plus significatifs et aboutis.

» consistant. Tout article de mathématique doit contenir au moins un résultat, c'est-à-dire qu'il doit apporter une connaissance nouvelle sur le problème traité. Ce peut être un théorème, mais aussi la collecte de données expérimentales, un contre-exemple, une résolution partielle, la réponse à un problème voisin, une nouvelle approche, une conjecture, un nouveau problème,...

» vérifiable. C'est la qualité indispensable de toute œuvre scientifique : les assertions faites doivent être vérifiables (ou plus exactement, comme nous l'avons rappelé plus haut, réfutables!). Non seulement des distinctions nettes doivent apparaître entre ce qui est admis, supposé, observé ou prouvé, mais le lecteur doit aussi bénéficier de toute indication utile à la compréhension des énoncés

et à leur validation : raisonnement, sources, outils, références, documents utilisés,...

» clair. Le texte doit être compréhensible par un lecteur motivé du même âge, si possible accessible à un lecteur candide non spécialiste et, cela va sans dire, mais soulignons-le tout de même, parfaitement maîtrisé par les auteurs eux-mêmes (!).

C'est avec cette optique que le comité d'édition de notre association a choisi de présenter, après relecture, quelques articles récents de nos jeunes auteurs. Textes et figures sont l'œuvre des élèves; pour l'essentiel, ils sont publiés tels qu'ils nous sont parvenus. Lorsqu'ici ou là nos relecteurs ont observé quelque manquement manifeste à l'un des cinq principes, ils ont signalé leur doute, leur interrogation, leur perplexité voire leur désaccord, en accompagnant les passages concernés de notes d'édition placées en fin d'articles.

Ces articles témoignent tous du plaisir que leurs auteurs ont trouvé à leurs recherches, et de l'évidente satisfaction d'avoir concrétisé celles-ci par

un écrit. Nous pouvons relever aussi leur intérêt, leur authenticité et une certaine fraîcheur créative. En un mot, ce que nous pouvons apprécier dans ces œuvres c'est leur mathématicité naissante. Félicitons nos jeunes auteurs pour ces contributions, et remercions également les professeurs et les chercheurs qui les ont accompagnés, suivis et conseillés.

(1) Rappelons qu'en principe chaque sujet est traité en parallèle dans deux établissements jumelés pour l'occasion.

(2) Même si leur caractère expérimental peut être discuté, car il renvoie plus à une réalité "interne", propre aux mathématiques, qu'à un monde objectal extérieur.

(3) Méthode d'Apprentissage des Théories mathématiques en Jumelant des Établissements pour une Approche nouvelle du Savoir.

Les articles qui suivent sont rédigés par des élèves. Ils peuvent comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

L'infini

Année 1989-1990

Thierry Guillard (Terminale C), Monique Li, Seng Loc Thap (Première S)

Encadrés par : Pierre Audin

Établissements : Lycée Jean Racine (Paris)

Chercheur : Pierre Duchet

Théorème :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = +\infty.$$

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit S_n la somme des premiers termes de (u_n)

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n + 1 > n$, et donc $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{10^p+1} + \frac{1}{10^p+2} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 10^p}}_{10^p \text{ termes}} &> \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 10^p} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 10^p}}_{10^p \text{ termes}} \\ &> 10^p \times \frac{1}{2 \cdot 10^p} \\ &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De même :

$$\frac{1}{3 \cdot 10^p+1} + \frac{1}{3 \cdot 10^p+2} + \cdots + \frac{1}{4 \cdot 10^p} > \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4 \cdot 10^p+1} + \frac{1}{4 \cdot 10^p+2} + \cdots + \frac{1}{5 \cdot 10^p} > \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{7 \cdot 10^p+1} + \frac{1}{7 \cdot 10^p+2} + \cdots + \frac{1}{8 \cdot 10^p} > \frac{1}{8}$$

Donc :

$$\frac{1}{10^p+1} + \frac{1}{10^p+2} + \cdots + \frac{1}{10^{p+1}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} > 1 \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = 1,075 \right)$$

Comme p décrit $\mathbb{N}$, il existe une infinité de sommes de termes de u tels que $10^p+1 \leq n \leq 10^{p+1}$. Toutes ces sommes de termes de u sont strictement supérieures à 1. S_n est donc calculée comme somme de groupements de termes dont la somme est strictement supérieure à 1. La suite S_n tend donc vers l'infini.

C.Q.F.D

Théorème :

Il existe une bijection entre $[0, 1[$ et $[0, 1]$.

Considérons la suite $u_n = 1/2^n$ (avec $n \geq 1$). Etablissons une bijection entre $[0, 1[$ et $[0, 1]$ en distinguant d'une part les termes de la suite (u_n) et d'autre part tous les nombres restants.

Pour tout $x \in (u_n)$ de $[0, 1[$ on applique la fonction définie par $f(1/2^n) = 1/2^{n-1}$ dans $[0, 1]$.

Pour tout $x \in (u_n)$ de $[0, 1[$ on applique la fonction définie par $f(x) = x$ dans $[0, 1]$, qui est une fonction bijective.

Pour tout $x' \in (u_n)$ de $[0, 1]$ on applique la fonction définie par $f^{-1}(1/2^{n-1}) = \frac{1}{2^n}$ dans $[0, 1[$.

Ainsi, chaque x de $[0, 1[$ a une image par f dans $[0, 1]$ et chaque x' de $[0, 1]$ a un seul antécédent dans $[0, 1[$ (donné par f^{-1}). Il existe donc une bijection entre $[0, 1[$ et $[0, 1]$. Par homothétie on peut généraliser la bijection pour tous les intervalles $[a, b[$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

NOTES D'ÉDITION

Lors du premier jumelage MATH.en.JEANS, les élèves avaient un "livre" dans lequel ils recopiaient les démonstrations qu'ils avaient mises au point, après validation par le chercheur et l'enseignant, car dès l'origine, il paraissait nécessaire de passer à l'écrit pour assurer des apprentissages lors de cette activité de recherche.

Le texte qui précède est repris de leur livre, ce qui en fait un texte atypique dans l'ensemble des articles d'élèves présentés dans cette brochure.

LOI DE RAHMOUNA 1

Pour savoir si un assemblage de chiffres est un nombre ou pas, on regarde si on peut faire des opérations avec et si ces opérations ont un sens.

ex : les numéros de téléphone ne sont pas des nombres, parce que si on ajoute deux numéros de téléphone, le résultat n'est pas un numéro de téléphone.

LOI DE ESTELLE 2

Il existe 10 nombres qui finissent par le chiffre 3 entre 1 et 100.

L'algorithme de Kaprekar

Année 1990-1991

David et Jérôme.

Encadrés par : Elisabeth Busser

Établissements : Lycée Bartholdi (Colmar)

Chercheur : Charles Payan

KAPREKAR, vous avez dit KAPREKAR ? Mais qui est-ce donc, KAPREKAR ?? ... mystère !!! Mathématicien hongrois selon certains, indien selon d'autres, KAPREKAR a pourtant laissé son nom à un des plus célèbres et stupéfiants algorithmes. Se composant en tout et pour tout d'une opération de soustraction, cet algorithme a longtemps intrigué et intrigue toujours encore nombre de mathématiciens et informaticiens. Jugez-en vous-même.

1. Prendre un nombre X de quatre chiffres, c'est-à-dire compris entre 0 et 9999 (NB : 74 peut s'écrire 0074).
2. arranger par ordre décroissant les chiffres de X et le coder sous la forme $abcd$ tel que $a \geq b \geq c \geq d$.
3. arranger maintenant les chiffres de X par ordre croissant. On obtient bien entendu $dcb a$ tel que $d \leq c \leq b \leq a$.
4. Calculer la différence Y de $abcd - dcba$ (Y est un nombre de quatre chiffres).
5. Refaire toutes les opérations à partir de 2. en remplaçant X par Y .

Tel est, en quelques mots, le principe on ne peut plus simple de l'algorithme de Kaprekar. Mais qu'y a-t-il donc de si surprenant dans tout cela, nous direz-vous ? Eh bien, quel que soit le nombre X choisi, Y finit toujours par tomber sur le nombre 6 174 et y rester. En effet, si l'on applique l'algorithme ci-dessus :

$$\begin{array}{r} 7\ 641 \\ - 1\ 467 \\ \hline = 6\ 174 \end{array}$$

De plus, ce résultat apparaît au bout de huit tours maximum.

Remarque : Tous les nombres de quatre chiffres ne donnent pas 6174 par l'algorithme de KAPREKAR. Ce sont tous les nombres de la forme $aaaa$ (1111, 2222, ...) et qui donnent un résultat nul. Notre étude se limite donc à 9990 nombres.

Quelques programmes.

Malgré sa simplicité d'exécution, l'algorithme de Kaprekar devient vite lassant. Nous avons donc mis au point quelques programmes qui, décomposant, ordonnant puis soustrayant les nombres à notre place, nous rendaient le travail plus facile !

Les programmes Basic 1.1 et Casio (fx) utilisent le fait qu'il existe 24 façons différentes d'ordonner les quatre lettres A, B, C, D codant ici le nombre choisi.

Au bout d'un moment, nous avons remarqué que durant le déroulement des programmes, certains nombres apparaissaient plus souvent que d'autres. C'est le cas par exemple de 8532, 7641 ou encore 6642. Nous nous sommes alors intéressés aux propriétés du nombre Y en général, c'est-à-dire à la différence $abcd - dcba$.

```

Programme en Pascal
PROGRAM KAPREKAR;
USES
  CRT;
VAR
  J,CI,AI,BI,I,K : INTEGER;
  C,A,B : STRING;
  D,E : CHAR;
  TEST : BOOLEAN;
PROCEDURE CLASSE;
BEGIN
  REPEAT
    BEGIN
      FOR I:=1 TO 3 DO
        BEGIN
          IF ORD(A[I]) < ORD(A[I+1])
          THEN
            BEGIN
              D:=A[I];
              A[I]:=A[I+1];
              A[I+1]:=D;
            END;
          END;
        END;
      UNTIL (ORD(A[I])>= ORD(A[2])) AND (ORD(A[2])>=
        ORD(A[3])) AND (ORD(A[4])>= ORD(A[3]));
      END;
      PROCEDURE INVERSE;
      BEGIN
        B:='';
        FOR I:= 4 DOWNTO 1 DO
          BEGIN
            B:=B+A[I];
          END;
        END;
        CLRSCR;
        Writeln ('DONNEZ UN NOMBRE DE 4 CHIFFRES,N E
          S"ECRIVANT PAS SOUS ');
        Writeln ('LA FORME "aaaa"');
        TEST:=TRUE;
        READLN (A);
        J:=0;
        REPEAT
          BEGIN
            CLASSE;
            INVERSE;
            VAL(A,AI,K);
            VAL(B,BI,K);
            CI:=AI-BI;
            Writeln (AI,' - ',BI,' = ',CI);
            STR(CI,A);
            IF (A[1]=A[2]) AND (A[2]=A[3]) AND (LE
              NGTH (A) = 3) THEN TEST:=FALSE;
            IF (A[1]=A[2]) AND (A[2]=A[3]) AND
              (A[3]=A[4]) THEN TEST:=FALSE;
            IF A = '6174' THEN TEST:=FALSE;
            J:=J+1
          END;
        UNTIL TEST:=FALSE
        IF A = '6174' THEN
          Writeln ('NOMBRE D"ITERATIONS NECESSAIRES : ',J);
        END.

```

Propriétés du nombre Y .

Soit X un nombre à quatre chiffres $abcd$ et Y la différence $abcd - dcba$, avec les conditions décrites plus haut. Effectuons alors :

$$\begin{array}{r}
 a \ b \ c \ d \\
 - \ d \ c \ b \ a \\
 \hline
 = \ A \ B \ C \ D
 \end{array}$$

* « d moins a » : ça ne va pas car $a > d$.

Calculons donc $(d + 10) - a = D$ et retenons 1.

* « c moins $(b + 1)$ » : $b > c$ ainsi $b + 1 > c$. Calculons alors $c + 10 - (b + 1) = C$, c'est-à-dire $c - b + 9 = C$ et retenons 1.

* « b moins $(c + 1)$ » : deux cas se présentent.

CAS 1 : $b < (c + 1)$. Cela signifie que $b = c$ car $b > c$, et $(b + 10) - (c + 1) = B$.

CAS 2 : $b > (c + 1)$. On a $b - c + 1 = B$.

* « a moins d » : deux cas à nouveau.

CAS 1 : $b < (c + 1)$. $(b + 10) - (c + 1) = B$,

donc $a - (d + 1) = A$ à cause de la retenue.

CAS 2 : $b > (c + 1)$. Donc $a - d = A$ tout simplement.

Etudions maintenant les systèmes obtenus :

$$\text{si } b > (c + 1) : \begin{cases} d + 10 - a = D \\ a - d = A \\ c - b + 9 = C \\ b - c - 1 = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + D = 10 \\ B + C = 8 \end{cases}$$

$$\text{si } b < (c + 1) : \begin{cases} d + 10 - a = D \\ a - (d + 1) = A \\ b + 10 - (c + 1) = B \\ c - b + 9 = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + D = 9 \\ B = C = 9 \\ (\text{car } b = c) \end{cases}$$

Conclusion :

Pour $b \neq c, A + D = 10$ et $B + C = 8$;

Pour $b = c, A + D = 9$ et $B = C = 9$.

Programme.

Nous venons donc de prouver qu'au bout d'un tour d'algorithme, le nombre choisi prend une forme $ABCD$ telle que

$$A + D = 10 \text{ et } B + C = 8,$$

ou

$$A + D = 9 \text{ et } B = C = 9.$$

Grace à cette information, nous allons pouvoir prouver que tous les nombres retombent à la fin sur 6174. Mais avant tout, faisons un programme nous permettant de retrouver les nombres répondant aux propriétés de Y obtenues.

Programme en Basic 1.0

```
10 FOR N=1000 TO 9999
20 A=FIX(N/1000)
30 B=FIX(N/100)-10*A
40 C=FIX(N/10)-100*A-10*B
50 D=N-1000*A-100*B-10*C
100 IF A+D=10 AND B+C=8 THEN PRINT N;
110 IF B=9 AND C=9 AND A+D=9 THEN PRINT N;
120 NEXT N
130 END
```

Grace au programme, nous obtenons une série de 90 nombres :

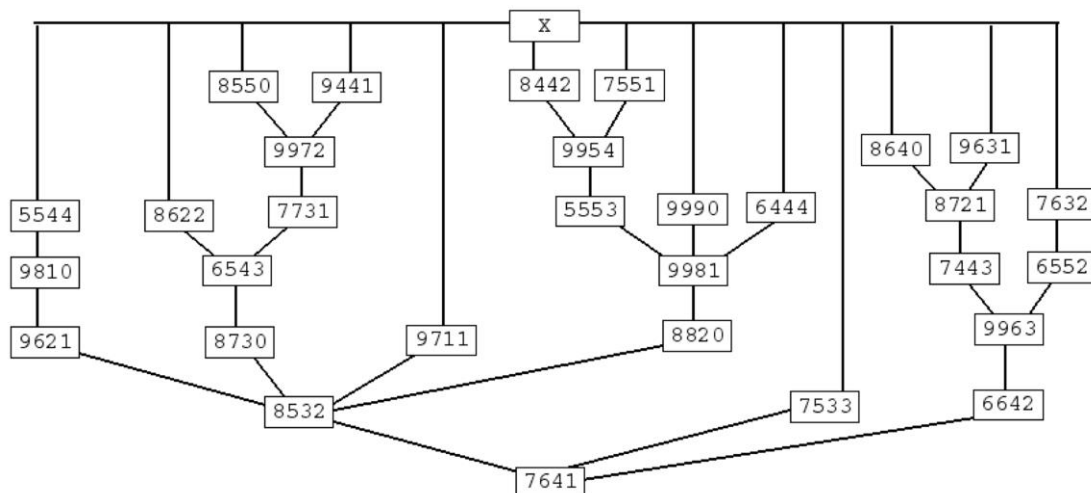
1089	1179	1269	1359	1449	1539
1629	1719	1809	1998	2088	2178
2268	2358	2448	2538	2628	2718
2808	2997	3087	3177	3267	3357
3447	3537	3627	3717	3807	3996
4086	4176	4266	4356	4446	4536
4626	4716	4806	4995	5085	5175
5265	5355	5445	5535	5626	5715
5805	5994	6084	6174	6264	6354
6444	6534	6624	6714	6804	6993
7083	7173	7263	7353	7443	7533
7623	7713	7803	7992	8082	8172
8262	8352	8442	8532	8622	8712
8802	8991	9081	9171	9261	9351
9441	9531	9621	9711	9801	9990

Cependant, il n'est pas nécessaire d'étudier tous les nombres, car deux ou trois nombres comportant les mêmes chiffres donnent le même résultat par l'algorithme (ex : 1359 et 9531). Ainsi, après élimination, il ne subsiste que 30 nombres :

9801	8820	7731	6642	5553
9711	8721	7632	6543	5544
9621	8622	7533	6444	
9531	8532	7443	6552	
9441	8442	7641		
9990	8730	7551		
9981	8640			
9972	8550			

L'arbre de Kaprekar.

Il ne nous reste maintenant plus qu'à effectuer l'algorithme pour chacun de ces nombres. On obtient alors un arbre où l'on remarque que chaque nombre vient "s'emboîter" dans un autre, pour donner à la fin, bien entendu, 6174.



Conclusion.

Grace à l'arbre ci-dessus, nous avons la preuve que tous les nombres finissent par converger vers 6174, et en huit tours au maximum — car les 30 nombres trouvés plus haut, d'après la propriété de Y, apparaissent dès le premier tour de l'algorithme.

Application pratique ? Cette propriété de « convergence », d'après les spécialistes de la numération (informaticiens et mathématiciens) pourrait permettre l'élaboration de nouveaux langages informatiques, ainsi que de nouvelles méthodes de calcul, basées sur la proportionalité de nombres passant par les différentes branches de l'arbre, mais ça ... c'est une autre histoire !

LOI DE ASMAHAN 1

Si on multiplie un nombre qui se termine par 0 par n'importe quel autre nombre, le résultat se termine toujours par un 0.

LOI DE ANTOINE 2

Pour vérifier une division, on peut multiplier le diviseur par le quotient et ajouter le reste. Le résultat doit être égal au dividende.

La loi fonctionne à deux conditions :

- 1) la division est juste
- 2) le reste est plus petit que le diviseur.

Brachistochrone : le chemin le plus court est-il toujours le plus rapide ?

Année 1991-1992

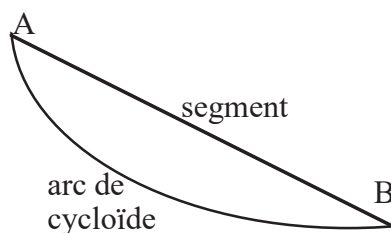
Lydie, Marie, Olivier, Idrissa, Sîpha

Encadrés par : Mme Brunstein et M. Pierre Lévy

Établissement : Collège Victor Hugo (Noisy le Grand)

Chercheur : Jean-Michel Kantor, Jussieu

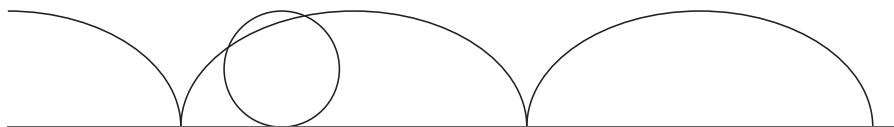
Imaginez une bille roulant d'un point A à un point B (l'altitude du point B est inférieure à celle du point A). Le chemin le plus court est évidemment le segment $[AB]$; cependant, l'expérience nous montre que ce n'est pas le chemin le plus rapide. Si la boule se déplace de A à B le long d'un arc de cycloïde elle ira toujours plus vite que si elle suit un trajet rectiligne.



Nous avons fabriqué un dispositif expérimental avec lequel nous avons fait plusieurs manipulations. Mais il nous a d'abord fallu comprendre ce qu'est une cycloïde.

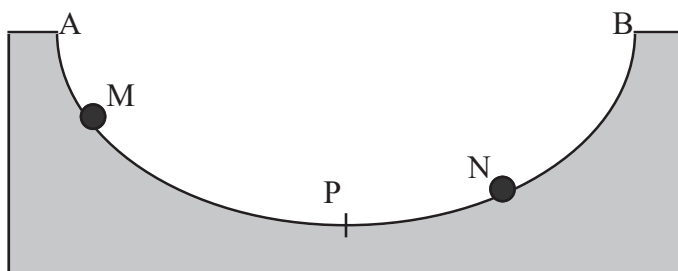
Qu'est-ce qu'une cycloïde ?

Prenons une roue de bicyclette et sa valve. En faisant rouler la roue sur une route plane, la valve décrit une courbe infinie que l'on appelle une cycloïde.



Cette courbe possède donc une propriété très intéressante : si une bille roule le long de cette courbe, elle va plus vite que sur n'importe quelle autre trajectoire. La cycloïde est **brachystochrone**.

La cycloïde est aussi **tautochrone** : si on lâche deux billes à deux points différents de la cycloïde, ces deux billes arrivent en même temps au point P (point le plus « bas »).



Nous avons obtenu une trajectoire cycloïdale en découpant une planche de bois sur laquelle nous avons tracé un arc de cycloïde en faisant tourner un disque de carton le long d'une règle.

Nous avons filmé et chronométré diverses expériences afin de mieux visualiser ce qui se passait simultanément sur les trajectoires cycloïdale et rectiligne. La boule sur la trajectoire cycloïdale prenait plus de vitesse dès le départ par rapport à celle de la trajectoire rectiligne. D'après nos expériences filmées il semblerait, qu'au ralenti, la boule sur la trajectoire cycloïdale ayant passé le point le plus bas, « P », subit une perte de vitesse. Ce qui permet à la boule sur la trajectoire rectiligne de rattraper en partie l'autre boule, mais pas suffisamment pour la dépasser, finalement la boule sur la trajectoire cycloïdale arrivait juste avant l'autre boule.

Nous avons tenté de comprendre pourquoi la cycloïde est brachistochrone

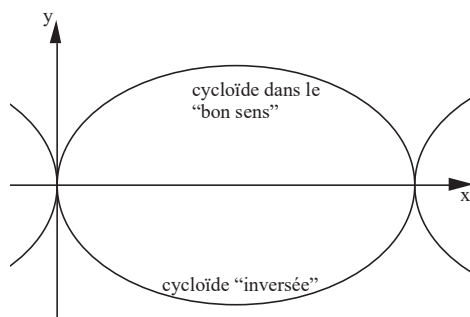


Nous avons construit une cycloïde en calculant les coordonnées d'un certain nombre de points situés sur cette courbe. Nous avons utilisé les formules suivantes (nous les avons trouvées dans des documents) :

$$\begin{aligned}x &= R (U - \sin U) \\ y &= R (1 - \cos U)\end{aligned}$$

"U" représente l'angle (exprimé en radians) formé par le point de contact de la « roue » avec la « route », le centre de la roue et la valve.

Nous prenons donc $U = 0$ rad pour le calcul des coordonnées du point de départ A et $U = \pi$ rad pour le point d'arrivée B. Il suffit de prendre des valeurs pour U comprises entre 0 rad et π rad et nous obtenons les coordonnées d'autant de points qu'on désire.



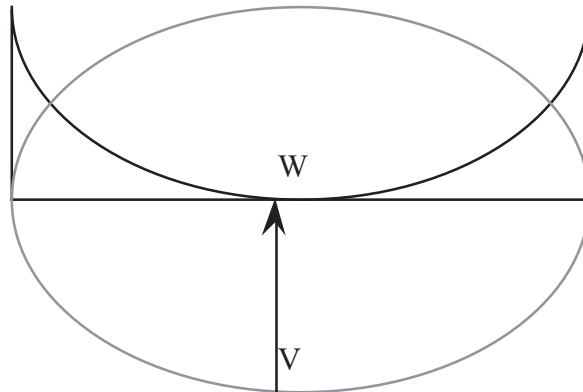
Mais il y a un problème : en procédant ainsi, nous obtenons une cycloïde « dans le bon sens », or nous devons travailler sur une cycloïde « inversée ».

Étudions les transformations subies par la cycloïde lors de son « inversement ». On effectue d'abord une symétrie axiale que l'on fait suivre d'une translation de $\overrightarrow{VW}$, où VW est égal au diamètre de la roue.

Puisque R (le rayon) est égal à 1, alors $VW = 2$

Ces transformations se traduisent par :

— pour la symétrie, on donne l'opposé des ordonnées de chaque point.



— pour la translation, on ajoute à chaque ordonnée la longueur du vecteur $\overrightarrow{VW}$ (2).

Mais on peut directement transformer la formule de départ :

$$\begin{aligned}x &= R (U - \sin U) \\y &= R (1 - \cos U)\end{aligned}$$

symétrie :

$$\begin{aligned}x &= R (U - \sin U) \\y &= -R (1 - \cos U)\end{aligned}$$

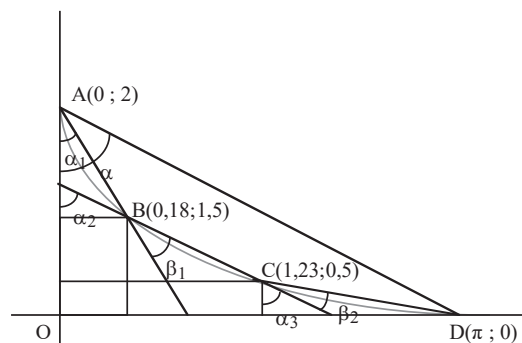
translation :

$$\begin{aligned}x &= R (U - \sin U) \\y &= 2 - R (1 - \cos U)\end{aligned}$$

Et puisque $R = 1$, alors on a :

$$\begin{aligned}x &= U - \sin U \\y &= 2 - 1 - \cos U \text{ donc } y = 1 + \cos U\end{aligned}$$

Calcul du temps de parcours sur le trajet rectiligne.



Le point de départ est le point A : ses coordonnées sont $x_A = 0$ et $y_A = 2$ (on prend $U = 0$ rad). Le point d'arrivée est le point D : ses coordonnées sont $x_D = \pi$ et $y_D = 0$ (on prend $U = \pi$ rad).

Une fois que l'on a obtenu les coordonnées des points A et D , on calcule les distances entre chaque point par la formule :

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$$

Calculons maintenant la valeur de t (temps), grâce à la formule :

$$t = \sqrt{\frac{2z}{g \cos \alpha}}$$

z est la différence d'altitude entre les points A et D donc $z = y_A - y_D$, $\cos \alpha = \frac{z}{AD}$, et g est la gravité à Paris (9,81).

Simplifions cette formule :

$$t = \sqrt{\frac{2(y_D - y_A)}{g \frac{z}{AD}}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2(y_D - y_A)}{g \frac{(y_D - y_A)}{AD}}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2}{g \frac{1}{AD}}} = \sqrt{\frac{2AD}{g}}$$

Le temps mis pour aller de A à D est donc **de 0,871 secondes**.

Calcul du temps sur la trajectoire cycloïdale.

Il est facile de calculer le temps sur une trajectoire rectiligne mais pour des trajectoires courbes, cela se complique. Nous avons donc eu l'idée de décomposer la cycloïde en plusieurs petits segments de droite. Cela nous permet d'utiliser les formules précédentes sur chacun des petits segments. Plus on prendra de segments, plus nos approximations seront correctes. Pour illustrer la méthode, nous n'avons pris que 4 points sur la cycloïde.

Une fois que l'on a obtenu les coordonnées des points A , B , C et D , on calcule les distances entre chaque point par la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Calculons maintenant la valeur de t (temps), grâce à la formule précédente :

$$t = \sqrt{\frac{2AB}{g}}$$

Nous avons donc calculé le temps mis pour aller de A à B :

$$\begin{aligned} x_A &= 0 ; y_A = 2 \\ \text{et} \quad x_B &= 0,1811 ; y_B = 1,5 \text{ donc} \end{aligned}$$

$AB = 0,5318$ cm et le temps mis pour aller de A à B est de 0,33 secondes.

Pour calculer le temps mis pour aller de B à C , nous devons tenir compte de la vitesse accumulée au cours du trajet AB . Nous devons calculer le temps à l'aide de la formule

$$z = (1/2)g \cos \alpha_2 t^2 + v \cos \beta_1 t$$

où v est la vitesse atteinte au point B .

Nous allons calculer les coefficients de l'équation du second degré.

$$\begin{aligned} x_C &= 1,23 \text{ environ} & y_C &= 0,5 \\ \cos \alpha_2 &= (y_B - y_C)/BC & BC &= 1,449 \text{ environ} \\ \cos \alpha_2 &= 0,69 & (\alpha_2 &= 46,37^\circ \text{ environ}) \end{aligned}$$

Calcul de la vitesse atteinte par la bille au point B

$v = g \cos \alpha_1 t$ où α_1 est l'angle formé par le segment $[AB]$ et la verticale.

$$\cos \alpha_1 = (y_A - y_B)/AB \quad (\alpha_1 = 19,91^\circ \text{ environ})$$

$$v = g[(y_A - y_B)/AB]t = 3,04 \text{ cm/s environ}$$

β_1 est l'angle formé par le segment $[BC]$ et la droite (AB) :

$$\beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 \approx 26,46^\circ \text{ environ}, \cos \beta_1 = 0,90$$

L'équation devient donc :

$$y_B - y_C = \frac{1}{2} \times 0,69 t^2 + 3,04 \times 0,9 t$$

C'est-à-dire $1 = 3,38 t^2 + 2,74 t$, c'est-à-dire $3,38 t^2 + 2,74 t - 1 = 0$. Il faut donc résoudre cette équation du second degré. Nous ne savons pas le faire, mais nous avons trouvé une solution approchée par des encadrements successifs.

Valeur de t	Valeur de $3.38t^2 + 2.74t - 1$
0	1
1	5,12
0,5	1,215
0,25	0,10375
0,3	0,1262
0,29	0,078858
0,27	0,013798
0,275	0,0091125.

Pour calculer le temps mis pour aller de C à D, nous allons calculer la vitesse de la bille atteinte au point C.

$$v = g \cos \alpha_2 t = 1,86 \text{ cm/s environ}$$

$$x_C = 1,23 \text{ environ} \quad y_C = 0,5$$

$$x_D = 3,14 \text{ environ} \quad y_D = 0$$

$$\cos \alpha_3 = (y_C - y_D)/CD$$

$$CD = 1,97$$

$$\cos \alpha_3 = 0,25 \text{ environ}$$

L'équation à résoudre est donc :

$$y_C - y_D = \frac{1}{2} g \cos \alpha_3 t^2 + v \cos \beta_2 t$$

$$\beta_2 = \alpha_3 - \alpha_2 = 29,15$$

On a donc :

$$0,5 = \frac{1}{2} g \times 0,25 t^2 + 1,86 \times 0,87 t$$

$$0,5 = 1,23 t^2 + 1,62 t$$

L'équation à résoudre est donc :

$$1,23 t^2 + 1,62 t - 0,5 = 0$$

Par approximations successives nous avons trouvé que la bille met environ 0,258 secondes pour aller du point C au point D. La bille met donc environ 0,863 secondes pour parcourir les trois segments de droite qui approchent la trajectoire cycloïdale.

*D'après nos calculs, la bille va effectivement plus vite en empruntant la trajectoire cycloïdale. Elle arrivera avec **0,008 secondes** d'avance.*

Bien entendu, ce résultat est probablement très imprécis ; il faut absolument faire les calculs avec de très nombreux points. Seul un programme d'ordinateur pourra le faire à notre place, maintenant que nous avons la méthode.

Ce problème est à peu près résolu mais bien d'autres questions restent posées ; en particulier nous ne savons toujours pas s'il existe une trajectoire où la boule va encore plus vite. Donc à bientôt pour la suite ...

LOI DE BASTIEN 1

Si on prend un nombre qui n'est pas 0 et qu'on le divise par 2 et encore par 2 et encore et encore, on n'arrivera jamais à 0.

C'est parce que quand on divise un nombre par 2, on en enlève la moitié, et donc il en reste toujours une moitié. Comme la moitié de quelque chose n'est jamais 0, on n'arrivera jamais à 0.

LOI DE LOU 2

Si je divise un nombre par lui-même, le résultat est toujours 1.

Si n est n'importe quel nombre, sauf 0,

$$N \div n = 1$$

Les brenoms

Année 1992-1993

Perrine Allain (5ème), Anne Mauvoisin (6ème)

Encadrés par : Vincent Bartolli, Yann Bourit, Catherine Mandonnet

Établissements : Collèges Pierre de Ronsard (Montmorency) et l'Ardillière du Nézant (St Brice sous Forêt)

Chercheur : Pierre Duchet (Paris).

Présentation du sujet

Les brenoms sont des choses qui généralisent les nombres entiers ordinaires (un nombre entier est une succession *finie* de chiffres, un morceau de brenom), et qui peuvent donc nous fournir de nouveaux outils. Les brenoms en base différente de 10, appelé les nombres p -adiques, sont beaucoup étudiés ; ils permettent, entre autres, de comprendre des propriétés des nombres entiers ordinaires et de fabriquer des codes secrets.

Un brenom est une succession illimitée de chiffres écrite de droite à gauche.

Exemple : ...562951413

On peut additionner et multiplier les brenoms de la manière habituelle, puisque ces opérations (sur les nombres) se font de droite à gauche. Vous remarquerez que la multiplication habituelle des nombres (avec une suite illimitée — à droite — de décimales) est plus difficile à effectuer :

$3,14159265... \times 3,14159265... = ???$

Sujet de recherche proposé :

Existe-t-il des brenoms qui, multipliés par eux-mêmes, ne changent pas ?

Qu'est-ce qu'un brenom ?

Un brenom est composé d'une infinité de chiffres débutant à droite et se poursuivant vers la gauche.

Exemple : ...1257305895.

L'addition des brenoms

Elle se fait comme une addition normale. (1)

Exemple :

$$\begin{array}{r} \dots 256289 \\ \dots 476123 + \\ \dots 732412 \end{array}$$

La soustraction des brenoms

Elle peut se faire normalement, mais, *surprise*, on peut effectuer :

$$\begin{array}{r} \dots 2396 \\ \dots 7485 - \\ \dots 4911 \end{array}$$

C'est possible car un brenom a une infinité de chiffres, donc on peut avoir une infinité de retenues. La soustraction étant toujours possible, on n'a pas besoin de brenoms négatifs.

Multiplication des brenoms

Elle se fait comme une multiplication normale.

Exemple :

$$\begin{array}{r}
 \dots 1634 \\
 \underline{\dots 25 \times} \\
 \dots 8170 \\
 \dots 3268 \\
 \hline
 \dots\dots\dots 50
 \end{array}$$

Peut-on trouver un brenom tel que : $x^2 = x$?

(l'écriture x^2 représente le résultat de la multiplication de x par x et s'appelle le *carré de x* .)

OUI, il en existe 4 !

Théorème : Il existe exactement 4 brenoms tels que $x^2 = x$.

Ces brenoms peuvent commencer à droite par ...

0 car $0 \times 0 = 0$ et 0 se termine par le même chiffre que 0.

1 car $1 \times 1 = 1$ et 1 se termine par le même chiffre que 1.

5 car $5 \times 5 = 25$ et 25 se termine par le même chiffre que 5.

6 car $6 \times 6 = 36$ et 36 se termine par le même chiffre que 6.

Comment avons-nous fait pour les trouver ?

a) Pour le brenom commençant par 0 : nous avons cherché quel chiffre pouvait convenir après 0.

$$\begin{array}{r}
 \dots a 0 \\
 \dots a 0 \times \\
 \dots 0 0 \\
 \dots (a^2) 0 \\
 \hline
 \dots (a^2) 0 0 (2)
 \end{array}$$

Les brenoms $\dots a^0$ et $\dots a^2 00$ sont égaux, donc commencent à droite par les mêmes chiffres, a doit donc être égal à 0

Ensuite, nous avons cherché quel chiffre pouvait convenir après 0 0.

$$\begin{array}{r}
 \dots b 0 0 \\
 \underline{\dots b 0 0 \times} \\
 \dots 0 0 0 \\
 \dots 0 0 0 \\
 \dots (b^2) 0 0 \\
 \hline
 \dots (b^2) 0 0 0 0
 \end{array}$$

Les brenoms ... $b\ 0\ 0$ et ... $b^2\ 0\ 0\ 0\ 0$ sont égaux, donc se terminent par les mêmes chiffres, b doit donc être égal à 0.

De même, tous les chiffres suivants seront des 0, donc le brenom égal à son carré et commençant par 0 est ...000.

b) Pour le brenom commençant à droite par 1 nous avons cherché quel chiffre a pourrait convenir après 1.

$$\begin{array}{r} \dots a\ 1 \\ \underline{\dots a\ 1} \times \\ \dots a\ 1 \\ \dots (a^2)\ a \\ \hline \dots (a^2+)(2a)\ 1 \end{array}$$

Les brenoms ... $a\ 1$ et ... $(2a)\ 1$ sont égaux, donc $2a$ doit se commencer comme a , ce qui implique : $a = 0$.

De même, le chiffre suivant, b , doit commencer comme $2b$, ce qui implique $b = 0$. On procède de même pour les chiffres suivants. Ainsi à chaque fois on obtient un 0 de plus et le brenom égal à son carré et commençant par 1 est ...001. (3)

c) Pour le brenom commençant à droite par 5, nous avons cherché quel chiffre a pourrait convenir après 5.

$$\begin{array}{r} \dots \quad a \quad 5 \\ \underline{\dots \quad a \quad 5} \times \\ \dots \quad 5a + 2 \quad 5 \\ a^2 + \quad 5a \quad 0 \\ \hline (a^2+) \quad (10a + 2) \quad 5 \end{array}$$

Pour que ces brenoms soient égaux, $10\ a + 2$ doit commencer par a . Or $10\ a$ doit commencer par 0 donc $10a+2$ commencer par 2. Ceci implique : $a = 2$. Nous remarquons que 2 est le chiffre qui vient après 5 dans 25, carré de 5. Pour trouver le chiffre suivant, b , nous avons fait des multiplications par paquets, en tenant compte du fait que b est le chiffre des centaines :

Nous pouvons donc poser la multiplication :

$$\begin{array}{r} \quad \quad b \quad 2 \quad 5 \\ \underline{\quad \quad b \quad 2 \quad 5} \times \\ (5b + 1) \quad 2 \quad 5 \\ 2b \quad 5 \quad 0 \quad 0 \\ b^2 \quad 2b \quad 5b \quad 0 \quad 0 \\ \hline b^2 \quad 4b \quad 10b + 6 \quad 2 \quad 5 = b^2 \quad 5b \quad 6 \quad 2 \quad 5 \end{array}$$

Nous devons donc choisir $b = 6$ pour que ces brenoms soient égaux. En continuant de même, nous avons constaté la règle suivante :

Règle pour trouver le n -ième chiffre du brenom : on calcule le carré du brenom à $n-1$ chiffres, c'est-à-dire le carré du *nombre*, formé avec les $n-1$ chiffres déjà obtenus ; le $n^{\text{ième}}$ chiffre du résultat est alors le chiffre cherché.

Un programme en Pascal nous a alors permis d'obtenir le brenom cherché. (voir annexe 1).

d) Nous avons travaillé de même pour trouver le brenom commençant à droite par 6. Nous avons obtenu la règle suivante :

Règle pour trouver le n -ième chiffre du brenom : on calcule le carré du brenom à $n-1$ chiffres, c'est-à-dire le carré du *nombre*, formé avec les $n-1$ chiffres déjà obtenus ; on prend le complément à 10 du $n^{\text{ième}}$ chiffre obtenu, c'est le chiffre cherché.

Un programme Pascal nous a alors permis de trouver le brenom cherché. (voir annexe 2).

Conclusion 1

Il n'existe pas plus de 4 brenoms qui ne changent pas quand on les multiplie par eux-mêmes : il s'agit des brenoms 0, 1 et de ceux obtenus par les règles.

Conclusion 2

Après avoir vérifié que les brenoms 0, 1 et ceux obtenus par les règles sont effectivement égaux à leurs carrés : il existe 4 brenoms tels que $x^2 = x$.

Les propriétés énoncées dans les conclusions 1 et 2 garantissent que le théorème énoncé plus haut est correct.

Racine carrée

Existe-t-il un brenom qui, multiplié par lui-même, donne ...0001 ?

Il est impossible de poursuivre cette multiplication :

$$\begin{array}{r} 1\ 5\ 7\ 8\ 1\ 2\ 4\ 9 \\ \times 1\ 5\ 7\ 8\ 1\ 2\ 4\ 9 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ (4) \end{array}$$

Il est impossible de poursuivre cette multiplication :

$$\begin{array}{r} 2\ 5\ 1 \\ \times 2\ 5\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 1 \end{array}$$

Il est impossible de poursuivre cette multiplication :

$$\begin{array}{r} 4\ 9\ 9 \\ \times 4\ 9\ 9 \\ \hline 0\ 0\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dots 0\ 0\ 0\ 1 \\ \times \dots 0\ 0\ 0\ 1 \\ \hline \dots 0\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

1 et une infinité de zéros donnent bien ...00001 comme résultat.

$$\begin{array}{r} \dots 9\ 9\ 9\ 9\ 9 \\ \times \dots 9\ 9\ 9\ 9\ 9 \\ \hline \dots 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

On trouvera toujours ...00001 avec une infinité de zéros.

Si on rajoute un 9, il y aura un 0 de plus au résultat ; voilà pourquoi :
avec multiplications par paquets

$$\begin{array}{r} \dots 9\,999 \\ \times \quad \dots 9\,999 \\ \hline \dots 9\,980\,01 \rightarrow \text{résultat de } 999 \times 999 \\ \dots 8\,991\,000 \rightarrow \text{résultat de } 9 \times 999 \text{ se termine par trois 0 et 1} \\ \dots 8\,991\,000 \rightarrow \text{résultat de } 9 \times 999 \text{ se termine par trois 0 et 1} \\ \dots 81\,000\,000 \rightarrow \text{résultat de } 9000 \times 9000 \\ \hline \dots 80001 \end{array}$$

On retrouvera toujours le résultat précédent, ici 998001. Il y aura donc toujours un 8. Le résultat de 9000×999 se termine par trois 0 et 1. Il se trouve là deux fois.

NOTES D'ÉDITION

(1) Dans le texte original, on ne trouve pas trace du fait qu'une multiplication de brenoms nécessite une infinité d'additions. Nous avons systématiquement ajouté une ligne de points (...) aux diagrammes de multiplication.

(2) La notation (a^2) signifie que l'on ne retient de a^2 que le dernier chiffre. De manière plus générale, la notation (expression+) dans le diagramme d'une opération sur des brenoms signifie que l'on effectue d'abord le calcul de l'expression, que l'on ajoute ensuite à ce résultat l'éventuelle retenue qui peut exister du fait des calculs des chiffres précédents, et enfin, que l'on retient le chiffre des unités. Ce procédé de notation a été mis en place lors d'une discussion entre le chercheur et les élèves.

(3) Le raisonnement fait ici prouve seulement que s'il existe un brenom commençant par 1 et égal à son carré, ce ne peut être que $\dots 0001 = 1$. Il conviendrait de vérifier que le brenom 1 est bien égal à son carré. Le même type de remarque vaut pour d'autres résultats de l'article. Les enseignants et le chercheur n'ont pas estimé utile, à ce niveau-là de discuter avec les élèves de ce problème de démonstration.

(4) Malgré la disposition opératoire, seul le résultat de la multiplication est donné ici ; que signifie "poursuivre cette multiplication" ? il s'agit de poursuivre l'écriture du brenom vers la gauche.

LOI DE ANTOINE 4

Avec trois chiffres, on peut écrire six nombres : si ces trois chiffres sont A, B, C :
ABC ACB BAC BCA CAB CBA

Annexe 1**Brenom se terminant par 6 et vérifiant $x^2 = x$.****Brenom se terminant par 5 et vérifiant $x^2 = x$.**

25	76
625	5776
625	376
390625	141376
0625	9376
390625	87909376
90625	09376
821890625	87909376
890625	109376
793212890625	11963109376
2890625	7109376
8355712890625	50543227109376
12890625	87109376
166168212890625	7588043387109376
212890625	787109376
45322418212890625	619541169787109376
8212890625	1787109376
67451572418212890625	3193759921787109376
18212890625	81787109376
331709384918212890625	6689131260081787109376
918212890625	081787109376
843114912509918212890625	6689131260081787109376
9918212890625	0081787109376
98370946943759918212890625	6689131260081787109376
59918212890625	40081787109376
3590192236006259918212890625	1606549657881340081787109376
259918212890625	740081787109376
67557477392256259918212890625	547721051611007740081787109376
6259918212890625	3740081787109376
39186576032079756259918212890625	13988211774267263740081787109376
56259918212890625	43740081787109376
3165178397321142256259918212890625	1913194754743017343740081787109376
256259918212890625	743740081787109376
65669145682477392256259918212890625	553149309256696143743740081787109376
2256259918212890625	7743740081787109376
5090708818534039892256259918212890625	59965510454276227407743740081787109376
92256259918212890625	07743740081787109376
8511217494096854352392256259918212890625	59965510454276227407743740081787109376
392256259918212890625	607743740081787109376
153864973445024588727392256259918212890625	369352453608598807478607743740081787109376
7392256259918212890625	2607743740081787109376
54645452612300005057477392256259918212890625	6800327413935747244982607743740081787109376
77392256259918212890625	22607743740081787109376
5989561329000849809744977392256259918212890625	511110077017207231620022607743740081787109376
977392256259918212890625	022607743740081787109376
955295622596853633012869977392256259918212890625	511110077017207231620022607743740081787109376
9977392256259918212890625	0022607743740081787109376
99548356235275381465044119977392256259918212890625	511110077017207231620022607743740081787109376
19977392256259918212890625	80022607743740081787109376
399096201360473745722856619977392256259918212890625	6403617750108490103144731780022607743740081787109376
619977392256259918212890625	380022607743740081787109376
384371966908872375601191606619977392256259918212890625	144417182396352539175410357380022607743740081787109376
6619977392256259918212890625	3380022607743740081787109376
43824100673983991394155879106619977392256259918212890625	11424552828858793029898066613380022607743740081787109376
06619977392256259918212890625	93380022607743740081787109376
43824100673983991394155879106619977392256259918212890625	871982862222732007751577754293380022607743740081787109376
106619977392256259918212890625	893380022607743740081787109376
11367819579125235975036734004106619977392256259918212890625	798127864794612716138610952755893380022607743740081787109376
4106619977392256259918212890625	5893380022607743740081787109376
16864327638717175315320739859004106619977392256259918212890625	34731928090872050116956482046515893380022607743740081787109376
...04106619977392256259918212890625	...95893380022607743740081787109376

[NDLC : dans chaque colonne, on trouve sur une ligne le brenom, sur la ligne suivante, son carré, sur la ligne suivante, le brenom calculé avec un chiffre de plus, sur la ligne suivante, son carré, sur la ligne suivante, etc ...]

Les brenoms en questions

Quelques sujets de réflexion, présentés par Pierre Duchet, à partir de textes de synthèse écrits par les collégien·nes au cours de leur recherche. Ces questions peuvent servir de point de départ pour des activités de recherche intéressantes permettant des apprentissages numériques, logiques et algébriques importants (abordables dès la 6^{ème}, utiles en terminale et au delà).

Quelles divisions sont possibles chez les brenoms ?

La division de brenoms se fait comme la multiplication à trous. Ainsi $\dots 0007 \div \dots 0003$ revient à faire

$$\begin{array}{r} \dots 0003 \\ \underline{\quad ? \times} \\ \dots 0007 \end{array}$$

Certaines divisions sont impossibles, ainsi lorsque que le dividende est impair et le diviseur pair.

Exemple $\dots 17 \div \dots 4 = ?$.

Démonstration :

Tous les multiples de 4 se terminent par un chiffre pair, donc il est impossible de trouver un brenom x tel que $\dots 4 \times x = \dots 17$.

Un curieux phénomène ?

Nous avons remarqué que

$$\begin{array}{r} \dots 007 \\ \underline{\dots 714286 \times} \\ \dots 42 \\ \dots 56 \\ \dots 14 \\ \dots 28 \\ \dots 07 \\ \dots 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dots 0002 \end{array}$$

Donc $\dots 002 \div \dots 007 = \dots 714286$.

Si nous faisons à la calculatrice $2 \div 7$, nous obtenons 0,28571428, un nombre dont les décimales ont pour période 285714. Or :

$$\begin{array}{r} \dots 285714 \\ \underline{\dots 714286 +} \\ \dots 000000 \end{array}$$

Nous avons constaté cela sur plusieurs autres résultats de division, mais nous ne savons pas l'expliquer.

1 a-t-il plusieurs racines carrées ?

Nous cherchons les brenoms x tels que $x \times x = 1$, autrement dit les brenoms dont le carré est 1, les « racines carrées de 1 » en quelque sorte (nous écrivons 1 pour simplifier l'écriture de $\dots 0001$).

Remarque : Une écriture du type $x \times x = 1$ est une *équation* et amène la question : puis-je remplacer x par quelque chose de mieux connu pour que l'équation soit juste ? Ces objets mieux connus, s'ils existent sont appelés les solutions de l'équation. Résoudre une équation, c'est parvenir à connaître toutes les solutions d'une équation. Notre problème ici est de résoudre l'équation $x \times x = 1$ chez les brenoms.

Bien évidemment, il y a la solution

$$\dots 0001 \times \dots 0001 = \dots 0001 = 1$$

Y en a-t-il d'autres ? Si nous ne regardons que les premiers (de droite à gauche) chiffres pour faire une table de multiplication de $\dots a \times \dots a$, nous voyons que 1 et 9 sont les seuls premiers chiffres possibles d'un brenom dont le carré est 1.

Essayons avec 9 : Cherchons le 2^e chiffre possible d'un brenom x commençant (à droite) par 9 et tel que $x \times x = 1$. En regardant les deux premiers chiffres des multiplications possibles, on s'aperçoit que le 2^e chiffre ne peut être que 4 ou 9.

Première piste : le brenom périodique ... 9 9 9 semble être une solution. Nous avons prouvé que les 10 premiers chiffres de la multiplication ... 9 9 9 $\times$... 9 9 9 étaient bien 0 0 0 0 0 0 0 0 1. Nous n'avons pas encore réussi à prouver que les chiffres suivants sont toujours des 0.

Conjecture 1 : ... 9 9 9 9 $\times$... 9 9 9 9 = 1.

Remarque : Une *conjecture* est une propriété que l'on pense vraie, mais que l'on n'est pas parvenu à démontrer : on ne peut donc être certain que c'est vrai.

Deuxième piste : poursuivons la recherche d'une solution du type ... 4 9. Appelons c le troisième chiffre et effectuons la multiplication (les retenues sont comptabilisées, mais seul le premier chiffre, à droite, des nombres calculés nous intéresse : nous avons écrit entre parenthèses le résultat des calculs pour dire que nous n'en retenons que le premier chiffre) :

$$\begin{array}{r}
 \dots c49 \\
 \underline{\dots c49 \times} \\
 \dots (9c+4)41 \\
 \dots 96 \\
 \dots (9c) \\
 \hline
 \dots (18c+14)01
 \end{array}$$

Donc le nombre $18c + 14$ doit se terminer par 0. Or $18c + 14$ se termine par le même chiffre que $18c + 4$, et $18c + 4$ se termine par le même chiffre que $8c + 4$.

Si le nombre $8c + 4$ se termine par 0, alors $8c$ se termine par 6. Il y a deux solutions $8 \times 2 = 16$ et $8 \times 7 = 56$ donc deux brenoms possibles ... 2 4 9 ou ... 7 4 9.

Premier essai :

$c = 7$. Appelons d le chiffre suivant (c'est le 4^e). En calculant comme précédemment le 4^e chiffre de ... $d745 \times \dots d745$,

on trouve que c'est le dernier chiffre de $18d + 24$, donc de $18d + 4$, donc de $8d + 4$. Si $8d + 4$ se termine par 0 alors $8d$ se termine par 9. C'est impossible : on voit qu'il n'y a aucune solution à notre équation qui commence par ... 7 4 9.

Deuxième essai :

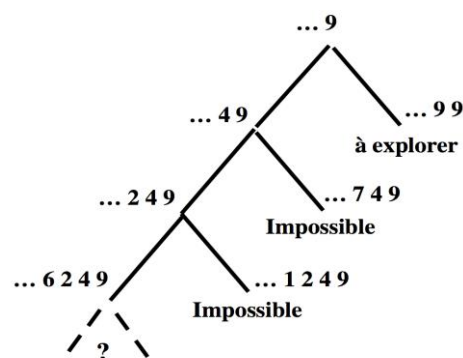
$c = 2$. En procédant comme ci-dessus, on trouve que $8d$ doit se terminer par 8. Il y a deux brenoms possibles ... 6 2 4 9 ou ... 12 4 9.

Conclusion :

Nous avons poursuivi nos explorations pour le 5^e, pour le 6^e chiffre, ... A chaque fois, il y a 2 valeurs possibles pour le chiffre cherché ce qui conduit à deux essais pour le chiffre suivant, deux branches d'exploration. L'une des branches meurt : il n'y a aucune possibilité pour le chiffre suivant. L'autre branche se poursuit pour donner naissance à deux autres branches, dont l'une, à son tour, va mourir, etc. Il semble donc finalement qu'il y ait un brenom (et un seul) qui soit solution de notre équation $x \times x = 1$, qui commence par 9 et qui soit différent de ...999, mais nous ne savons pas encore trouver tous ses chiffres.

Conjecture 2 :

Il y a un brenom et un seul qui commence par 9 qui est différent de ...999 et dont le carré est 1. Il reste aussi bien sûr à explorer la question de l'existence d'une solution commençant par 1 et différente de ... 0 0 0 1.



Équation de Pell-Fermat

Année 1993-1994

Samira Amrane, Sandrine Lavieux, Irène Mikolaczyk, Karim Ouardini, Sylvain Packan, Morgan Queguiner, Hu Liu (Terminale C), Cécile Deconninck, Stéphanie Perez (2nde)

Encadrés par : Joëlle Richard

Établissement : Lycée Georges Braque (Argenteuil)

Chercheuse : Michèle Vergne (Paris)

Pourquoi avoir choisi ce thème *Equation de Pell-Fermat* ? En 93, l'actualisation du théorème de Fermat a suscité notre intérêt, et d'autre part, nous avons envie de travailler sur des nombres.

Quel est ici le problème posé ?

Il s'agit de trouver X et Y entiers solutions de l'équation :

$$NX^2 + 1 = Y^2$$

où N est un entier donné.

Un document ancien rapporte une solution à ce problème, donnée par Brahmagupta en 628. Ce mathématicien indien s'est attaqué d'abord aux équations de du type

$$Nx^2 + k = y^2$$

et a donné une manière d'obtenir des solutions à partir d'un couple de solutions connu.

Fermat s'intéresse lui-même à la résolution d'équations de ce type ; en particulier, il propose à ses contemporains la résolution de :

$$61x^2 + 1 = y^2$$

Le problème sera repris en 1767 par Lagrange, qui utilisera pour résoudre cette équation, la théorie des fractions continues.

Plus modestement — et pour cause ! — quelle a été notre attitude devant ce problème ?

Prenons l'équation $Nx^2 + 1 = y^2$. N peut-il être un carré parfait ?

Si N est un carré parfait, on peut poser $N = m^2$ (m entier > 0)

L'équation devient $m^2x^2 + 1 = y^2$, pour laquelle on cherche bien sûr des solutions avec $x \neq 0$

On a donc :

$$\begin{aligned} (mx)^2 + 1 &= y^2, \\ m, x, y &\text{ entiers} \\ m > 0, x > 0, y > 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$1 = (y - mx)(y + mx)$$

Or m, x, y étant des entiers > 0 , ceci n'est possible que si

$$y - mx = 1$$

$$y + mx = 1$$

soit : $x = 0$ et $y = 1$: donc N ne peut être un carré parfait si on veut $x \neq 0$.

Expériences sur ordinateur

Nous avons ensuite eu recours à l'ordinateur. On se donne x compris entre 0 et 3000 et N compris entre 0 et 200 [voir encadré pour le programme]. On obtient des valeurs de x et y entiers telles que le couple (x, y) soit solution. L'examen de cette liste a permis de chercher des relations entre les différentes solutions.

Brahmagupta, le retour

Nous présentons ici une étude qui permet de montrer, un peu comme l'avait fait Brahmagupta, comment on peut obtenir des solutions à partir d'un couple de solutions connu.

Tentative de résolution pour $N = 2$.

L'équation s'écrit alors

$$2x^2 + 1 = y^2 \quad (1)$$

Si (x_1, y_1) est un couple solution : $2x_1^2 + 1 = y_1^2$,

$$\text{soit : } x_1^2 + (x_1^2 + 1) = y_1^2$$

x_1^2 peut être représenté par un carré constitué de points :

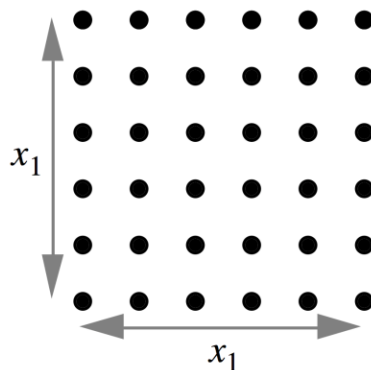


Figure 1

Soit un carré de côté x_1 .

On veut augmenter le côté du carré initial de manière à obtenir un nouveau carré de côté y_1 :

$x_1 + m$ le nouveau côté du carré (m entier naturel) ; le nombre de points ajouté au carré initial sera :

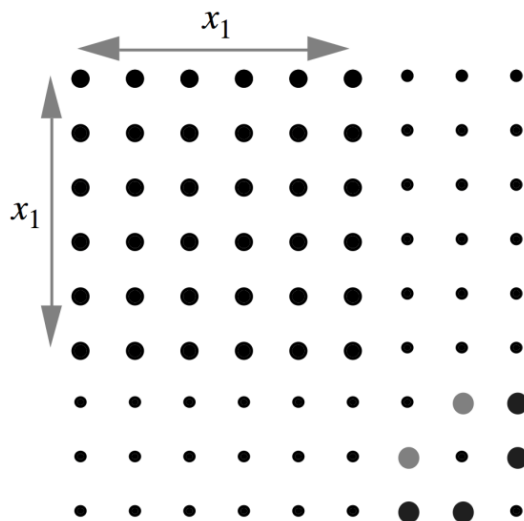
$$(x_1 + m)^2 - x_1^2 \text{ soit : } 2mx_1 + m^2$$

$x_1^2 + x_1^2 + 1$ sera un carré parfait si

$2mx_1 + m^2 = x_1^2 + 1$ ce qui équivaut à :

$$x_1^2 - 2mx_1 + 1 - m^2 = 0 \quad (1)$$

Interprétation géométrique :



m est le nombre de tours fait autour du carré initial. Au premier tour, on ajoute $2x_1 + 1$, puis au deuxième tour $2x_1 + 1 + 2 \times 1$, puis au troisième tour $2x_1 + 1 + 2 \times 2$, etc ... Donc le nombre de points ajoutés peut s'écrire :

$$(2x_1 + 1) + (2x_1 + 1 + 2 \times 1) + ((2x_1 + 1) + 2 \times 2) + \dots$$

soit :

$$(2x_1 + 1)m + 2(1 + 2 + \dots + m - 1)$$

$$(2x_1 + 1)m + m(m - 1)$$

On retrouve bien $2mx_1 + m^2$

Résolvons l'équation (1):

$$x_1^2 - 2mx_1 + 1 - m^2 = 0$$

Si les racines existent

$$x_1 = m + \sqrt{2m^2 - 1} \text{ ou } x_1 = m - \sqrt{2m^2 - 1}$$

$$\text{Or } x_1 \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, \sqrt{2m^2 - 1} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{On note : } \sqrt{2m^2 - 1} = M$$

Donc :

$$2x_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m + \sqrt{2m^2 - 1} \text{ ou } x_1 = m - \sqrt{2m^2 - 1} \\ 2m^2 - 1 = M^2 \end{cases}$$

Or $m = y_1 - x_1$ et $M = x_1$, soit :

$$m = y_1 - x_1 \text{ et } M = 2x_1 - y_1 ;$$

Avec $2m^2 - 1 = M^2$:

$$2(y_1 - x_1)^2 - 1 = (2x_1 - y_1)^2$$

Etudions maintenant l'équation :

$$2m^2 - 1 = M^2$$

$$2m^2 - 1 = M^2 \Leftrightarrow m^2 + m^2 - 1 = M^2$$

En utilisant l'interprétation géométrique précédente, ceci est possible si et seulement si :

$$m^2 - 1 = [2m + 1] + [(2m + 1) + 2 \times 1] + [(2m + 1) + 2 \times 2 + \dots$$

soit :

$$m^2 - 1 = (2m + 1)a + a(a - 1), a \in \mathbb{N}$$

soit :

$$m^2 - 2am - (1 + a^2) = 0$$

$$m = a + \sqrt{2a^2 + 1} \text{ ou } m = a - \sqrt{2a^2 + 1}$$

$$\text{Or } m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}, \sqrt{2a^2 + 1} \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{On note : } \sqrt{2a^2 + 1} = A$$

Donc :

$$2m^2 - 1 = M^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = a + \sqrt{2a^2 + 1} \text{ ou } m = a - \sqrt{2a^2 + 1} \\ 2a^2 + 1 = A^2 \end{cases}$$

Si on remplace a par x_0 , A par y_0 , x_0 et y_0 sont solutions d'une équation du type

$$2X^2 + 1 = Y^2.$$

On a alors :

$$2m^2 - 1 = M^2$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m = x_0 + \sqrt{2x_0^2 + 1} \text{ ou } m = x_0 - \sqrt{2x_0^2 + 1} \\ 2x_0^2 + 1 = y_0^2 \end{cases}$$

Or on a déjà :

$$2x_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m + M \text{ ou } x_1 = m - M \\ 2m^2 - 1 = M^2 \end{cases}$$

Donc :

$$2x_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m + M \text{ ou } x_1 = m - M \\ m = x_0 + y_0 \text{ ou } m = x_0 - y_0 \\ \text{et } 2x_0^2 + 1 = y_0^2 \end{cases}$$

Si on connaît un couple solution (x_0, y_0) , on en déduit donc un autre (x_1, y_1) ; on peut écrire les formules correspondantes en fonction de (x_0, y_0) , car $m = x_0 + y_0$ et $M = 2x_0 + y_0$:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_0 + 2y_0 \\ y_1 = 3y_0 + 4x_0 \end{cases} \quad (2)$$

Tentative de résolution pour $N = 3$.

L'équation à résoudre est maintenant :

$$3x^2 + 1 = y^2 \quad (3)$$

Soit (x_1, y_1) solution de cette équation :

$$3x_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow (2x_1)^2 - x_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow (2x_1)^2 - (x_1^2 - 1) = y_1^2$$

Pour une raison analogue à celle évoquée dans l'étude du cas $N = 2$ (4) :

$$\begin{aligned} x_1^2 - 1 &= (4x_1 - 1) + [(4x_1 - 1) - 2 \times 1] + [(4x_1 - 1) - 2 \times 2] + \dots \\ &= (4x_1 - 1) \times m - 2[1 + 2 + 3 + \dots + m - 1] \quad m \in \mathbb{N} \\ &= (4x_1 - 1) \times m - m(m - 1) - 1 \\ &= 4mx_1 - m^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$3x_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 - 4mx_1 + m^2 - 1 = 0 \text{ ce qui équivaut à}$$

$$x_1 = 2m + \sqrt{3m^2 + 1} \text{ ou } x_1 = 2m - \sqrt{3m^2 + 1}$$

Or $x \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$, donc $\sqrt{3m^2 + 1} \in \mathbb{N}$. Si on remplace, comme dans le cas $N = 2$, m par x_0 , et si on note :

$$\sqrt{3m^2 + 1} = y_0,$$

alors :

$$3x_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_0 + y_0 \\ 3x_0^2 + 1 = y_0^2 \end{cases}$$

$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ sont deux couples de solutions successifs de l'équation $3x^2 + 1 = y^2$.

Là encore, si l'on connaît un couple solution (x_0, y_0) , on peut en déduire un autre (x_1, y_1) :

$$\begin{cases} x_1 = 2x_0 + y_0 \\ 3x_0^2 + 1 = y_0^2 \end{cases}$$

$$\text{Si } N = K^2 + 1. \quad (5)$$

$$\text{Alors } Nx^2 + 1 = y^2 \Leftrightarrow (K^2 + 1)x^2 + 1 = y^2$$

Soit (x_1, y_1) un couple solution de cette équation :

$$(K^2 + 1)x_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow (Kx_1)^2 + x_1^2 + 1 = y_1^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + 1 = y_1^2 - (Kx_1)^2$$

Or $x_1^2 + 1 > 0$ donc y_1 est strictement supérieur à Kx_1 . Posons $y_1 = Kx_1 + m$.

$$Nx_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 + 1 = (Kx_1 + m)^2 - (Kx_1)^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + 1 = 2mKx_1 + m^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2mKx_1 + 1 - m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = mK \pm \sqrt{m^2K^2 + m^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = mK \pm \sqrt{Nm^2 - 1}$$

Or $x_1 \in \mathbb{Z}$, $K \in \mathbb{N}$, $mK \in \mathbb{N}$, donc $Nm^2 - 1 \in \mathbb{Z}$.

Posons : $\sqrt{Nm^2 - 1} = M$, soit $Nm^2 - 1 = M^2$

$$(Km + x_2)^2$$

$$m^2 - 1 = M^2 - (Km)^2.$$

Posons $M = Km + x_2$ où $x_2 \in \mathbb{N}$. Alors :

$$Nm^2 - 1 = M^2 \Leftrightarrow m^2 - 1 = (Km + x_2)^2 - (Km)^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 1 = 2x_2Km + x_2^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2x_2Km - 1 - x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = x_2K \pm \sqrt{x_2^2K^2 + x_2^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow m = x_2K \pm \sqrt{Nx_2^2 + 1}$$

Or $m \in \mathbb{N}$, $x_2K \in \mathbb{N}$, donc $\sqrt{Nx_2^2 + 1} \in \mathbb{N}$.

Posons $\sqrt{Nx_2^2 + 1} = y_2$ soit $\sqrt{Nx_2^2 + 1} = y_2^2$

c'est-à-dire :

(x_2, y_2) est un couple solution de l'équation.

Donc, si (x_2, y_2) est solution de l'équation, alors (x_1, y_1) est aussi solution de cette équation, avec (x_1, y_1) tel que :

$$\begin{cases} x_1 = mK \pm \sqrt{Nm^2 - 1} \\ y_1 = \sqrt{Nx_1^2 + 1}, \text{ où } m = Kx_2 + y_2 \end{cases}$$

Par exemple, si $N = 2 = 1^2 + 1$. Dans ce cas $K = 1$.

On sait que $(2, 3)$ est solution de cette équation. Alors :

$$m = K \times 2 + 3 = 5; Nm^2 - 1 = 2 \times 25 - 1 = 49$$

$$x_1 = 5 + 7 = 12; y_1^2 = 2 \times 12^2 + 1; y_1 = 17$$

$(12, 17)$ est aussi solution.

$$\text{Si } N = K^2 - 1 \quad (6)$$

$$N x^2 + 1 = y^2 \Leftrightarrow (K^2 - 1) x^2 + 1 = y^2.$$

Soit (x_1, y_1) un couple solution de cette équation :

$$(K^2 - 1)x_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow (Kx_1)^2 - x_1^2 + 1 = y_1^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 1 = (Kx_1)^2 - y_1^2$$

Or $x_1^2 - 1 > 0$ donc Kx_1 est strictement supérieur à y_1 .

Posons $y_1 = Kx_1 - x_2$, où $x_2 \in \mathbb{N}$. Alors :

$$Nx_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 - 1 = (Kx_1)^2 - (Kx_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow x_1^2 - 1 = 2Kx_1x_2 - x_2^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2Kx_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = Kx_2 \pm \sqrt{K^2x_2^2 - x_2^2 + 1} \Leftrightarrow x_1 = Kx_2 \pm \sqrt{Nx_2^2 + 1}$$

Or $x_1 \in \mathbb{Z}$, $Kx_2 \in \mathbb{Z}$, donc $\sqrt{Nx_2^2 + 1} \in \mathbb{Z}$.

Posons : $\sqrt{Nx_2^2 + 1} = y_2$, soit $Nx_2^2 + 1 = y_2^2$

c'est-à-dire : (x_2, y_2) est un couple solution de l'équation.

Donc, si (x_2, y_2) est solution de l'équation, alors (x_1, y_1) est aussi solution de cette équation, avec (x_1, y_1) tel que :

$$\begin{cases} x_1 = Kx_2 + y_2 \\ y_1 = \sqrt{Nx_1^2 + 1} \end{cases}$$

Par exemple, si $N = 3 = 4 - 1$. Alors $K = 2$. On constate que $(1, 2)$ est solution de l'équation $3x^2 + 1 = y^2$; alors $x_1 = K \times 1 + 2 = 4$,

$$y_1^2 = 3 \times 16 + 1 = 49, \text{ , } y_1 = 7.$$

$(4, 7)$ est aussi solution de l'équation.

Pour N quelconque.

On peut faire la remarque suivante. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux couples solutions de l'équation :

$$Nx^2 + 1 = y^2$$

Calculons $N(x_1y_2 + y_1x_2)^2$:

$$N(x_1y_2 + y_1x_2)^2 + 1$$

$$= N(x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2) + 1$$

$$= N(y_1^2x_2^2 + 2N(x_1x_2y_1y_2) + Nx_1^2y_2^2) + 1$$

$$= N(Nx_1^2 + 1)x_2^2 + 2Nx_1x_2y_1y_2 + Nx_1^2y_2^2 + 1$$

$$= N^2x_1^2x_2^2 + 2Nx_1x_2y_1y_2 + Nx_1^2y_2^2 + 1 + Nx_2^2$$

$$\begin{aligned}
 &= N^2 x_1^2 x_2^2 + 2N x_1 x_2 y_1 y_2 + N x_1^2 y_2^2 + y_2^2 \\
 &= N^2 x_2^2 + 2N x_1 x_2 y_1 y_2 + (N x_1^2 + 1) y_2^2 \\
 &= N^2 x_1^2 x_2^2 + 2N x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 \\
 &= (N x_1 x_2 + y_1 y_2)^2
 \end{aligned}$$

Donc :

$$N (x_1 y_2 + y_1 x_2)^2 + 1 = (N x_1 x_2 + y_1 y_2)^2$$

Donc le couple $(x_1 y_2 + y_1 x_2, N x_1 x_2 + y_1 y_2)$ est une solution de l'équation $N x^2 + 1 = y^2$.

Nous n'avons donc pas ainsi *résolu* une équation de Pell-Fermat, mais seulement *déduit* un couple solution de la connaissance d'un précédent couple solution. (7).

Mais nous savons qu'un procédé de construction des solutions (étudié en particulier par Euler et Lagrange au XVIII^e s.) utilise le développement en fraction continue de $\sqrt{N}$.

Pour la définition du développement en fraction continue de $\sqrt{N}$, on pourra se reporter aux articles sur les fractions continues.

$\sqrt{N}$ s'écrit :

$$\sqrt{N} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

On pose :

$$r_0 = \frac{p_0}{q_0} = a_0$$

$$r_1 = \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$r_2 = \frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$$

Donnons un exemple.

Soit l'équation $13 x^2 + 1 = y^2$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{13} = 3 + & \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}}}}}
 \end{aligned}$$

Pour la racine carrée d'un naturel, on obtient une suite périodique de nombres $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$

Ici, on a par exemple, la suite périodique : 3 1 1 1 1 6 1 1 1 1 6i

Un théorème, précise que la plus petite des solutions de $N x^2 - 1 = y^2$ est la réduite r_i telle que la réduite r_{i+1} corresponde à une valeur $a_{i+1} = 2a_0$. Ici $a_5 = 6 = 2 \times 3 = 2 \times a_0$.

$$r_4 = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{18}{5} = \frac{p_4}{q_4}$$

$y = p_4 = 18$; $x = q_4 = 5$. On a bien, en effet, $13 x^2 - 1 = 18^2$.

Cette méthode permet d'obtenir un couple solution de l'équation. D'après l'étude qui a été faite plus haut on sait en déduire d'autres, et sans doute une infinité de solutions. Reste à savoir si on a bien ainsi toutes les solutions...

NOTES D'ÉDITION

- (1) Notez qu'il y a la solution $x = 2, y = 3$
- (2) on peut vérifier algébriquement ces relations, mais c'est très joli de l'avoir trouvé par les racines de l'équation du second degré.
- (3) Notez qu'il y a la solution $x = 1, y = 2$.
- (4) Pour $N = 2$, la technique était d'utiliser une interprétation géométrique permettant de passer d'un carré à un carré plus grand en ajoutant des lignes de points. Ici, il s'agit de passer d'un carré (celui de 2×1) à un carré plus petit (celui de 1×1) en enlevant des lignes de points une par une.
- (5) On a une solution : $x = 2K$ et $y = 2K^2 + 1$.
- (6) Une solution : $x = 1$ et $y = K$
- (7) Pas un couple solution, mais deux.

Annexes

Expériences sur ordinateur

```

DIM n%,x%,y#

n%= 2

OPEN "résultats" FOR OUTPUT AS #1

Zero :

x%= 0

Calcul :

WHILE x%<(3000)

x%=x%+ 1

g # =n%*((x%)^2)+1

y # =SQR(g#)

IF FIX(y#)=y# THEN GOTO Sortie

WEND

Augmente N:

n%=n%+ 1

IF n%=100 THEN END

PRINT "•••• Pour N= "+STR$(n%)

PRINT

GOTO Zero

Sortie :

PRINT "• X= "+STR$(x%)

PRINT " Y= "+STR$(y#)

PRINT #1,STR$(n%) CHR$(44) STR$(x%) CHR$(4 4) STR$(y#)

GOTO Calcul

```

Valeur de N	Valeur de X	Valeur de Y	Valeur de N	Valeur de X	Valeur de Y
2	2	3	39	200	1249
2	12	17	40	3	19
2	70	99	40	114	721
2	408	577	41	320	2049
2	2378	3363	42	2	13
3	1	2	42	52	337
3	4	7	42	1350	8749
3	15	26	43	531	3482
3	56	97	44	30	199
3	209	362	45	24	161
3	780	1351	47	7	48
3	2911	5042	47	672	4607
5	4	9	48	1	7
5	72	161	48	14	97
5	1292	2889	48	195	1351
6	2	5	48	2716	18817
6	20	49	50	14	99
6	198	485	50	2772	19601
6	1960	4801	51	7	50
7	3	8	51	700	4999
7	48	127	52	90	649
7	765	2024	54	66	485
8	1	3	55	12	89
8	6	17	55	2136	15841
8	35	99	56	2	15
8	204	577	56	60	449
8	1189	3363	56	1798	13455
10	6	19	57	20	151
10	228	721	58	2574	19603
11	3	10	59	69	530
11	60	199	60	4	31
11	1197	3970	60	248	1921
12	2	7	62	8	63
12	28	97	62	1008	7937
12	390	1351	63	1	8
13	180	649	63	16	127
14	4	15	63	255	2024
14	120	449	65	16	129
15	1	4	66	8	65
15	8	31	66	1040	8449
15	63	244	68	4	33
15	496	1921	68	264	2177
17	8	33	69	936	7775
17	528	2177	70	30	251
18	4	17	71	413	3480
18	136	577	72	2	17
19	39	170	72	68	577
20	2	9	72	2310	19601
20	36	161	74	430	3699
20	646	2889	75	3	26
21	12	55	75	156	1351
21	1320	6049	77	40	351
22	42	197	78	6	53
23	5	24	78	636	5617
23	240	1151	79	9	80
24	1	5	79	1440	12799
24	10	49	80	1	9
24	99	485	80	18	161
24	980	4801	80	323	2889
26	10	51	82	18	163
26	1020	5201	83	9	82
27	5	26	83	1476	13447
27	260	1351	84	6	55
28	24	127	84	660	6049
29	1820	9801	86	1122	10405
30	2	11	87	3	28
30	44	241	87	168	1567
30	966	5291	88	21	197
31	273	1520	90	2	19
32	3	17	90	76	721
32	102	577	90	2886	27379
33	4	23	91	165	1574
33	184	1057	92	120	1151
34	6	35	93	1260	12151
34	420	2449	95	4	39
35	1	6	95	312	3041
35	12	71	96	5	49
35	143	846	96	490	4801
35	1704	10081	98	10	99
37	12	73	98	1980	19601
37	1752	10657	99	1	10
38	6	37	99	20	199
38	444	2737	99	399	3970
39	4	25	...	...	...

LOI DE LOUISE 1

Si n est n'importe quel nombre, le chiffre des unités de $11 + n$ vaut 1 de plus que le chiffre des unités de $11 \times n$.

exemple : si n vaut 123

$$123 + 11 = 134$$

$$123 \times 11 = 1353$$

Le chiffre des unités de 134 vaut 1 de plus que le chiffre des unités de 1353.

LOI DE ADRIEN 2

A propos de la loi de Louise : elle ne fonctionne pas si on choisit un nombre qui se termine par 9 (parce que le chiffre des unités devient 0).

La loi de Louise est quand même juste, parce que $9 + 1 = 10$, ce qui fait qu'après 9, on trouve 0.

La Suite de Conway

Année 1994-1995

Marjorie Martin et Bruno Martinez, Deug A2,
Encadrés par : Pierre Arnoux et Christian Mauduit

Établissement : Université de Marseille II

Chercheurs : Pierre Arnoux et Christian Mauduit (Université de Marseille II)

Présentation du sujet

Knuth — dans son livre « *Les nombres surréels* » — s'attarde longuement sur les méthodes de Conway. Il écrit :

« *Au commencement, tout était vide et J.H.W.H. Conway créa les nombres.*

« *Sa première règle est que chaque nombre correspond à deux ensembles de nombres précédemment créés, et aucun membre de l'ensemble de gauche n'est égal à aucun membre de l'ensemble de droite.*

« *Sa seconde règle est qu'un chiffre est inférieur ou égal à un autre si et seulement si aucun membre du premier chiffre de l'ensemble de gauche n'est supérieur ou égal au second chiffre et aucun membre du second chiffre de l'ensemble de droite n'est inférieur ou égal au premier chiffre.*

« *C'est ainsi que le premier chiffre fut créé depuis l'ensemble vide de gauche et l'ensemble vide de droite. Conway l'appela le zéro puis il sépara les chiffres positifs des chiffres négatifs et voulut additionner et soustraire ces chiffres. Il prouva ainsi que la soustraction était l'inverse de l'addition.*

« *Il désira ensuite faire fructifier ces chiffres et multiplia un chiffre par un autre. C'est ainsi que furent créées toutes les possibilités.*

« *Conway, après avoir vérifié l'exactitude de ses règles, maîtrisa alors les signes, les séries, les quotients et les racines. Jaillirent ainsi une infinité de chiffres. »*

C'est dans cette optique qu'il créa une suite dite “*la suite de Conway*”, suite infinie et croissante dont nous allons étudier les principales caractéristiques.

Présentation générale de la suite

Si les premiers termes de la suite de Conway sont les suivants : 1, 11, 21, 1211, 111221,

à la question “Quel est le prochain terme?”, la réponse est : 312211.

Cette suite fait partie des *suites qui se lisent*. En effet, si on lit le cinquième terme, on voit trois 1, deux 2 et un 1; ce qui se lit en chiffres : 312211.

Ecrivons quelques termes pour observer le comportement de la suite :

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = 11$$

$$X_3 = 21$$

$$X_4 = 1211$$

$$X_5 = 111221$$

$$X_6 = 312211$$

$$X_7 = 13112221$$

$$X_8 = 1113213211$$

$$X_9 = 31131211131221$$

$$X_{10} = 13211311123113112211$$

$$X_{11} = 11131221133112132113212221$$

$$X_{12} = 3113112221232112111312211312113211$$

$$X_{13} = 1321132132111213122112311311222113111221131221$$

$$X_{14} = 111131221131211131231121113112221121321132132211331222113112211$$

La suite est composée de séquences. Nous les appellerons :

- *singletons*, les séquences du type : 1, 2, 3;
- *doublets*, celles du type : 11, 22, 33;
- *triplets*, celles du type : 111, 222, 333.

Par exemple 1113213211 se décompose en 111 / 3 / 2 / 1 / 3 / 2 / 11 c'est-à-dire un triplet, cinq singletons et un doublet.

Le chiffre 4 n'apparaît jamais

A première vue, le chiffre 4 n'apparaît pas dans la suite. Démontrons-le.

La seule façon d'obtenir un 4 est l'apparition de telles séquences : 1111, 2222, 3333.

Montrons que ces séquences ne peuvent apparaître.

Pour obtenir quatre chiffres consécutifs, nous avons plusieurs possibilités :

- deux triplets : 111222 → 3132, 111333 → 3133, 222111 → 3231, 222333 → 3233, 333111 → 3331, 333222 → 3332
- un triplet et un doublet : 11122 → 3122, 11133 → 3123, 22211 → 3221, 22233 → 3223, 33311 → 3321, 33322 → 3322, 11222 → 2132, 11333 → 2133, 22111 → 2231, 22333 → 2233, 33111 → 2331, 33222 → 2332
- un triplet et un singleton : 1112 → 3112, 1113 → 3113, 2221 → 3211, 2223 → 3213, 3331 → 3311, 3332 → 3312, 1222 → 1132, 1333 → 1133, 2111 → 1231, 2333 → 1233, 3111 → 1331, 3222 → 1332
- deux doublets : 1122 → 2122, 1133 → 2123, 2211 → 2221, 2233 → 2223, 3311 → 2321, 3322 → 2322

- un doublet et un singleton : $112 \rightarrow 2112, 113 \rightarrow 2113, 221 \rightarrow 2211, 223 \rightarrow 2213, 331 \rightarrow 2311, 332 \rightarrow 2312, 122 \rightarrow 1122, 133 \rightarrow 1123, 211 \rightarrow 1221, 233 \rightarrow 1223, 311 \rightarrow 1321, 322 \rightarrow 1322$
- deux singletons : $12 \rightarrow 1112, 13 \rightarrow 1113, 21 \rightarrow 1211, 23 \rightarrow 1213, 31 \rightarrow 1311, 32 \rightarrow 1312$

Ceci prouve bien que le chiffre 4 n'apparaît jamais dans la suite de Conway.

Certains triplets n'apparaissent jamais

Si nous appelons “*tierce*” une combinaison de trois chiffres (à ne pas confondre avec un triplet), nous pouvons affirmer qu'il en existe $3^3 = 27$. Or, si nous regardons d'un peu plus près la suite, nous constatons qu'il n'en apparaît que 23. En effet, les tierces 233, 313, 323, et 333 n'apparaissent pas.

Démontrons cette affirmation.

Commençons par 333.

Si nous voulons obtenir 333, la séquence lue doit être de la forme 333111 ou 333222. Montrons que de telles séquences sont impossibles à obtenir. Découpons 333111 de 2 façons :

33/31/11 et 3/33/11/1

Pour obtenir 33, on doit avoir 333

31, on doit avoir 111

11, on doit avoir 1.

L'antécédent de 333111 serait donc 3331111 qui donne 3341, ce qui est impossible à obtenir.

Pour obtenir 3, on doit avoir 1, 2, ou 3 fois le nombre 3

33, on doit avoir 333

11, on doit avoir 1

1, on doit avoir une fois le nombre 1, 2, 3.

L'antécédent de 333111 serait donc par exemple 333312 qui donne 431112. De même, les autres possibilités ne donnent pas 333111.

Nous pouvons raisonner de la même façon pour 333222.

Traitons maintenant 233.

Pour obtenir 233 nous devons lire une séquence de la forme : 33111 ou 33222.

Découpons 33111 de 2 façons :

3/31/11 et 33/11/1.

Pour obtenir 3, on doit avoir 1, 2, ou 3 fois le nombre 3.

31, on doit avoir 111.

11, on doit avoir 1.

L'antécédent de 33111 serait donc par exemple 331111 qui donne 2341. De même les autres possibilités ne donnent pas 33111.

Pour obtenir 33, on doit avoir 333 qui est impossible à avoir. Le raisonnement s'arrête donc ici.

Le raisonnement est le même pour 33222.

Démontrons enfin que 313 et 323 ne peuvent apparaître.

Pour obtenir 313 nous devons lire une séquence de la forme 11222.

Découpons 11222 de 2 façons :

$$11/12/22 \text{ ou } 1/11/22/2.$$

Pour obtenir 1 on doit avoir 1, 2, ou 3 fois le chiffre 1.

11 on doit avoir 1

22 on doit avoir 22

2 on doit avoir 2 fois le chiffre 1, 2, ou 3.

L'antécédent de 111222 serait par exemple 1112233 qui se lit 312223.

Il en est de même pour les autres possibilités.

La démonstration pour 323 est analogue.

Suite croissante et infinie

Nous allons maintenant démontrer que la suite est croissante. Pour cela nous allons démontrer que le nombre de chiffres que comporte chaque terme de la suite est pair [NDLR : sauf le premier terme, bien sûr.]

En effet, la suite est composée de singletons, doublets et triplets.

Si nous notons T_n le nombre de triplets, D_n le nombre de doublets et S_n le nombre de singletons, soit U_n le nombre de chiffres du $n^{\text{ème}}$ terme, on a alors :

$$U_n = 3 T_n + 2 D_n + S_n.$$

D'où :

$$U_{n+1} = 2 T_n + 2 D_n + 2 S_n. (1)$$

Ceci prouve bien que le nombre de chiffres composant le $n+1^{\text{ème}}$ terme est pair.

Par récurrence, on voit que tous les termes ont un nombre de chiffres pair. (2)

Désormais, adoptons une notation pour décrire un terme de la suite.

Un terme pourra s'écrire $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \dots, A_l$ avec l la longueur du terme, et A_n le n -ième chiffre du terme.

Montrons que 2 termes ayant une place paire du type $2p$ et $2p+2$ ne peuvent être égaux.

Prenons un exemple très simple :

$$13 \rightarrow 1113$$

Les chiffres qui se trouvent à une place paire représentent donc le terme précédent. On ne peut avoir

$$A_{2p} = A_{2p+2}, \text{ car par définition de la suite on devrait avoir } (A_{2p-1} + A_{2p+1}), A_{2p} (3)$$

Passons à la démonstration de la croissance de la longueur de la suite.

- nous n'avons que des singletons.

$$U_n = S_n.$$

D'où :

$$U_{n+1} = 2S_n.$$

Dans ce cas la longueur de la suite va doubler, elle est donc strictement croissante.

- nous avons des doublets et des singletons.

$$U_n = 2D_n + S_n.$$

D'où :

$$U_{n+1} = 2D_n + 2S_n.$$

Les doublets donnent 2 chiffres, les singletons également, donc la longueur du prochain terme sera égale ou supérieure à celle de celui-ci.

- nous avons des triplets, des doublets, et des singletons.

$$U_n = 3T_n + 2D_n + S_n.$$

D'où :

$$U_{n+1} = 2T_n + 2D_n + 2S_n.$$

Ici les triplets nous posent problème car lorsqu'on les lit on perd un chiffre. Un triplet est de la forme 111 ou 222 (puisque 333 n'existe pas). Le premier chiffre d'un triplet a nécessairement une place impaire.

Avant le premier triplet nous aurons des doublets et/ou un nombre pair, on ne perd donc pas de chiffre avant le premier triplet. Au premier triplet nous perdons un chiffre. Or le premier chiffre du prochain triplet est aussi [de rang] impair, il y a donc un nombre impair de chiffres entre 2 triplets, donc nécessairement au moins un singleton qui "crédite" d'un chiffre la longueur. On rattrape ainsi le chiffre perdu avec le triplet.

On procède ainsi jusqu'au dernier triplet. Le dernier chiffre du dernier triplet occupe une place impaire, or la longueur du terme est paire, on a donc un nombre de chiffres impair qui termine le terme, et nécessairement au moins un singleton qui rattrape le un perdu par le triplet. La longueur du terme créé est donc supérieure ou égale à la longueur du terme qui l'a engendré.

CQFD.

Grâce à cette propriété nous pouvons montrer que le nombre de triplets est inférieur ou égal à celui des singletons. Reprenons la notation du début, on a :

$$U_n = 3T_n + 2D_n + S_n.$$

$$U_{n+1} = 2T_n + 2D_n + 2S_n.$$

$$U_{n+1} - U_n = S_n - T_n$$

$$U_{n+1} - U_n \geq 0$$

Donc $T_n \leq S_n$. De plus on pense que la suite est infinie mais nous ne sommes pas parvenus à le montrer.

Suite cyclique (début et fin de la suite)

Allons plus loin dans l'écriture de la suite et repartons du 14^e terme :

$$X_{14}=11131221131211131231121113112221121321132132211331222113112211$$

$$X_{15}=311311222113111231131112132112311321322112111312211312111322212311322113212221$$

$$X_{16}=1321132132211331121321133112111312211213211312111322211231131122211312113211$$

$$X_{17}=11131221131211132221232112111312212321123113112221121113122113111231133221121321132213221133112132123123111211131221133221131112221131221$$

$$X_{18}=31131122211311123113321112131221123113112211121312211213211321322123113311222113311213212322211211131221131211132221232112113122111213111213211231131122212322211331222113112211$$

Nous constatons alors que le début de la suite se répète avec une période de trois. Par exemple le début de X_{12} est le même que celui de X_{15} . Si nous allons encore plus loin dans la suite, nous remarquons que le nombre de chiffres identiques du début de X_{18} avec le début de X_{15} est supérieur à celui de X_{15} avec X_{12} .

Démontrons que la suite commence toujours par 1113, 3113 ou 1321.

En effet, $1113... \rightarrow 3113... \rightarrow 1321... \rightarrow 1113$.

Si à présent nous regardons la fin de la suite, nous constatons qu'il y a alternance entre 221 et 211.

En effet $...221 \rightarrow ...211 \rightarrow ...221$.

Fréquence d'apparition des chiffres 1, 2 et 3

Il nous a été dit que la fréquence d'apparition des chiffres 1, 2, 3, était une conséquence de la théorie atomique. D'après un programme informatique la fréquence d'apparition

- du chiffre 1 est : 0, 49614482...
- du chiffre 2 est : 0, 31970435...
- du chiffre 3 est : 0, 18415081...

Les autres suites qui se lisent

Il existe plusieurs variantes de la suite de Conway. La première suite est celle qui débute par un 0 à la place du 1. Elle possède la forme suivante :

0
10
1110
3110
132110
1113122110
311311222110
13211321322110
1113122113121113222110
31131122211311123113322110
132113213221133112132123222110

Au premier abord nous pouvons constater que cette suite présente des analogies avec la suite précédemment étudiée.

En effet, cette suite est croissante : à chaque itération du processus la longueur de la chaîne augmente. Le chiffre pris au départ est toujours ramené à la dernière place. A la différence de la première suite nous constatons que le chiffre 0 apparaît. Cependant le 1, le 2, le 3, ainsi que le 0 sont les uniques chiffres de cette suite. De façon analogue au chapitre précédent, nous pourrions montrer que cette suite est une suite infinie et croissante, qu'un certain nombre de triplets seulement apparaissent, que le chiffre 4 n'apparaît jamais, et que les premiers chiffres d'un terme se répètent tous les trois termes. Nous remarquons également que les derniers chiffres de chaque terme se répètent continuellement : au bout du troisième terme, 110 est le triplet qui figure à la fin de chaque terme de la suite. La façon de montrer cette cyclicité est analogue à celle utilisée au chapitre précédent. C'est pourquoi nous n'allons pas nous attarder sur cette suite et passer à une autre suite lisible : la suite de Robinson.

La suite de Robinson

Elle se construit selon le même principe mais avec une différence essentielle : les chiffres lus se classent ensuite dans l'ordre décroissant selon le principe suivant.

Si la suite commence par :

0

10

1110

3110

132110

Quel est le terme suivant?

La réponse est 13123110 car on lit le nombre de trois, le nombre de deux, le nombre de un et de zéros et on les classe par ordre décroissant.

En effet le terme 132110 se lit de la façon suivante : nous voyons au total trois 1, un 3, un 2, et un 0, ce qui se classe de cette manière : un 3 un 2 trois 1 et un 0 et ce qui se lit : 13123110.

Si on continue cette suite on obtient :

0

10

1110

3110

132110

13123110

23124110

1413223110

1423224110

2413323110

1433223110

1433223110

La suite est donc constante à partir de ce terme que cela soit au niveau du nombre de chiffres c'est-à-dire 10 chiffres ou au niveau du classement de ces chiffres.

En effet si on continue cette suite on obtiendra toujours 1433223110.

Si la suite débute par le chiffre 1 on obtient :

1
 11
 21
 1211
 1231
 131221
 132231
 232221
 1344211
 14131231
 14231241
 24132231
 14233221
 14233221

La suite devient également constante. Pour les valeurs initiales entre 0 et 39, la suite est constante à partir d'un certain rang.

Pour 40 nous obtenons :

40
 1410
 1422110
 14123110
 1413124110
 2413125110
 151413224110
 142413225110
 251413324110
 1524~~2~~3224110
 1524~~1~~3423110
 1524~~2~~3224110

Après quoi la suite se répète avec une période de deux. Pour une valeur initiale de 50 nous trouvons une période de trois. Ensuite nous trouvons toujours une de ces trois périodes : un, deux ou trois.

Conclusion

En guise de conclusion nous pouvons dire que l'étude de cette suite a été une expérience très intéressante autant du point de vue analyse de la suite mais également recherche personnelle dans les bibliothèques spécialisées comme celle du CIRM où nous avons pu avoir accès à plusieurs livres de Conway notamment ceux qu'il a écrits sur les jeux mathématiques.

NOTES D'ÉDITION

(1) Un triplet se décrit avec deux chiffres (31, 32, 33), un doublet aussi (21, 22, 23), un singleton aussi (11, 12, 13) ; comme il n'y a que des triplets, des doublets et des singletons, la longueur du nouveau terme produit est bien $2T_n + 2D_n + 2S_n$

(2) Bof ; à part le premier terme, chaque terme de la suite a un prédécesseur, qu'on peut appeler même terme, le terme qui nous intéresse ayant un nombre de chiffres $U_{n+1} = 2T_n + 2D_n + 2S_n = 2(T_n + D_n + S_n)$: chaque terme de la suite — sauf le seul qui n'ait pas de prédécesseur — est bien écrit sous forme du produit de 2 et d'un entier, et il n'est pas besoin de récurrence ici.

(3) Au lieu de $A_{2p-1} A_{2p} A_{2p+1} A_{2p} \dots$; en clair, quand, à une étape, on rencontre 111, à l'étape suivante, on n'écrit pas 1121 mais 31.

LOI DE CLÉMENT 1

Les nombres ne s'arrêtent jamais, mais il y a un dernier nombre. Après lui, ça recommence à 0. Ça fait comme un grand cercle qui ne finit jamais mais on repasse toujours au même endroit.

Systèmes bancaires

Année 1995-1996

Elodie Rangass-Amy, Samuel Gonçalves, Driss Ourgcin (CM2), Alexia Rousseau, Olivier Cyrille, Nélie El Haoud, Zohra Hassani, Samia Larabi, M. Davin Sébastien, élèves de 6ème et 5ème

Encadrés par : Danièle Buteau, Marie-Christine Chanudeaud. Marc Douaire

Établissements : Collège André Doucet (Nanterre 92), École Voltaire (Nanterre 92)

Chercheur : Pierre Duchet.(1)

Systèmes de numération bancaires.

En mettant certains poids tous différents, chacun en 1 seul exemplaire, (par exemple des poids de 1, 3, 9 et 27 g), à droite, à gauche ou pas du tout, on arrive à peser ainsi un objet en équilibrant une balance. Une pesée réussie permet donc de coder un nombre (le poids de l'objet) à l'aide de trois signes : "droite", "gauche", "pas du tout". Comment effectuer les opérations usuelles (addition, soustraction, ...) dans un tel système ? Des codages similaires de nombres sont maintenant utilisés pour accélérer les calculs sur ordinateur.

Pour peser des objets on peut utiliser une balance à deux plateaux et un jeu de masses dont on connaît le poids. Lorsque l'équilibre est réalisé avec l'objet sur un plateau, on déduit par un calcul simple le poids de l'objet.

Exemple : les masses connues ont des poids de 1, 3, 7 et 17 (peu importe l'unité de poids).

[15 3] [17 1]

Le poids de l'objet est 15 puisque $15+3 = 17+1$.

On peut utiliser ce principe d'équilibre pour coder les nombres. Un système de poids étant fixé, on choisit (une fois pour toutes) un ordre d'écriture pour ces poids connus, par exemple 17, 7, 3, 1, et un plateau (toujours le même, le gauche par exemple) sur lequel on pose le nombre (on pose un objet dont le poids est le nombre). Pour coder le nombre, on réalise alors une position d'équilibre et on l'écrit en marquant la position de chaque poids de notre système.

Si un poids a été mis à droite, on marque DI.

Si un poids a été mis à gauche, on marque GA.

Si un poids n'a pas été mis, on marque NO.

La succession des marques DI, GA, NO, dans l'ordre fixé des poids de notre système, est une écriture du nombre. Ainsi dans le système 17, 7, 3, 1, le nombre 15 peut s'écrire DINOGADI.

[15 3] [17 1] DI NO GA DI

Un tel système d'écriture des nombres est appelé, par leur inventeur Pierre Jullien, un système bancaire.

Pierre Jullien propose le système bancaire basé sur 1, 3, 9, 27 etc, pour écrire les nombres entiers. Nous avons étudié 2 systèmes bancaires : 1, 3, 9, 27 et 1, 3, 7, 17.

Système balançaire 1, 3, 9, 27.

Nous avons écrit les nombres jusqu'à 40 :

					27	9	3	1
[1				]				DI
[2				1]			3	DI GA
[3				]			3	DI NO
[4				]			3	DI DI
[5		3		1]		9		DI GA GA
[6		3		]		9		DI GA NO
[7		3		]		9		DI GA DI
[8				1]		9		DI NO GA
[9				]		9		DI NO NO
[10				]		9		DI NO DI
[11				1]		9	3	DI DI GA
[12				]		9	3	DI DI NO
[13				]		9	3	DI DI DI
[14	9	3		1]	27			DI GA GA GA
[15	9	3		]	27			DI GA GA NO
[16	9	3		]	27			DI GA GA DI
[17	9			1]	27			DI GA NO GA
[18	9			]	27			DI GA NO NO
[19	9			]	27			DI GA NO DI
[20	9			1]	27		3	DI GA DI GA
[21	9			]	27		3	DI GA DI NO
[22	9			]	27		3	DI GA DI DI
[23		3		1]	27			DI NO GA GA
[24		3		]	27			DI NO GA NO
[25		3		]	27			DI NO GA DI
[26				1]	27			DI NO NO GA
[27				]	27			DI NO NO NO
[28				]	27			DI NO NO DI
[29				1]	27		3	DI NO DI GA
[30				]	27		3	DI NO DI NO
[31				]	27		3	DI NO DI DI
[32		3		1]	27	9		DI DI GA GA
[33		3		]	27	9		DI DI GA NO
[34		3		]	27	9		DI DI GA DI
[35				1]	27	9		DI DI NO GA
[36				]	27	9		DI DI NO NO
[37				]	27	9		DI DI NO DI
[38				1]	27	9	3	DI DI DI GA
[39				]	27	9	3	DI DI DI NO
[40				]	27	9	3	DI DI DI DI

Exemple :

[15 9 3] [27]
 DI GA GA NO

Additions.

Pour faire des additions, nous avons remarqué que, quelle que soit la colonne, 1, 3 ou 9 :

GA
 + DI

 = NO

DI
 + NO

 = DI

GA
 + NO

 = GA

NO
 + NO

 = NO

DI
 + DI

 = DI GA

GA
 + GA

 = GA DI

[		1		DI
		+1]	+	DI

[	1]	3	= DI	GA

[		3		DI
		+3]	+	DI

[	3	9	= DI	GA

[		9		DI
		9]	+	DI

[	9	27	= DI	GA

[+1] [1]	+ GA GA
[3] [1]	= GA DI
[+3] [3]	+ GA GA
[9] [3]	= GA DI
[+9] [9]	+ GA GA
[27] [9]	= GA DI

.... etc. Nous savons donc faire des additions.

Examples :

	27	9	3	1
		DI	GA	DI
	+		DI	DI
a)			DI	GA
b)		DI	NO	
c)	=	DI	DI	GA
	27	9	3	1
	DI	NO	GA	GA
+		DI	DI	GA
			GA	DI
	DI	DI	NO	
=	DI	DI	GA	DI

Explications :

On additionne colonne par colonne DI GA DI + DI DI : DI + DI dans la colonne des 1 fait DI GA (cf ligne *a*); GA + DI dans la colonne des 3 fait NO (cf ligne *b*). Puis on additionne les lignes *a* et *b* : GA dans la colonne des 1 fait GA (cf ligne *c*); DI + NO dans la colonne des 3 fait DI (cf ligne *c*); DI dans la colonne des 9 fait DI (cf ligne *c*).

Donc :

$$D|GA|D| + D|D| = D|D|GA$$

Mais, quel poids faut-il ajouter si l'on veut écrire des nombres supérieurs à 40 ?

Si nous supposons que DI + DI dans la colonne des 27, fait aussi DI GA, quel autre poids X, faut-il utiliser pour pouvoir écrire le résultat de DI GA DI DI + DI NO GA DI ?

27931

DI GA DI DI 22

+ DI NO GA DI 25

DI DI GA

DI GA NO

= ?? GA DI GA

X27931

GA DI GA

+ DI GA

= DI GA GA DI GA 47 X = 81

Avec 81, 27, 9, 3, 1 nous pouvons compter jusqu'à 121 et pour compter plus loin, nous avons trouvé qu'il fallait utiliser :

x3 x3 x3 x3 x3 x3

729 ← 243 ← 81 ← 27 ← 9 ← 3 ← 1

Ainsi, nous pouvons écrire tous les nombres entiers.

Exemples :

	729	243	81	27	9	3	1
<u>[227 27 1]</u> [243 9 3]		DI	NO	GA	DI	DI	GA
<u>[300 27]</u> [243 81 3]		DI	DI	GA	NO	DI	NO
<u>[405 243 81]</u> [729]	DI	GA	GA	NO	NO	NO	NO

Soustractions.

Pour faire des soustractions, nous avons cherché à équilibrer des ballons qui tiraient le plateau de la balance vers le haut.

Exemple : 32 et 15

27931

[32 3 1][27 9] DI DI GA GA

¶32

[27 9][3 1] GA GA DI DI

[15 9 3][27] DI GA GA NO

¶15

[27][9 3] GA DI DI NO

Nous remarquons que :

¶ 32 s'écrit GA GA DI DI et que 32 s'écrit DI DI GA GA
¶ 15 s'écrit GA DI DI NO et que 15 s'écrit DI GA GA NO

il faut donc changer DI en GA et réciproquement pour passer du poids 32 au ballon ¶ 32. Pour soustraire 32, nous ajouterons donc ¶32.

Exemple : Pour soustraire 20, nous ajouterons ¶ 20.

	DI	NO	DI	GA	29
–	DI	GA	DI	GA	20

	DI	NO	DI	GA	29
+	GA	DI	GA	DI	¶20

	NO	DI	NO	NO	9

Système balançaire 1, 3, 7, 17.

Nous avons écrit les nombres jusqu'à 28 :

					17	7	3	1
[1								DI
[2				3			DI	GA
[3				3			DI	NO
[4				3	1]		DI	DI
[5	3			7	1]	DI	GA	DI
[6				7		DI	NO	GA
[7				7		DI	NO	NO
[8				7	1]	DI	NO	DI
[9				7	3	DI	DI	GA
[10				7	3	DI	DI	NO
[11				7	3	DI	DI	DI
[12	7			17	3	DI	GA	DI
[13		3		17		DI	NO	GA
[14		3		17		DI	NO	GA
[15		3		17	1]	DI	NO	GA
[16				17		DI	NO	NO
[17				17		DI	NO	NO
[18				17	1]	DI	NO	NO
[19				17	3	DI	NO	DI
[20				17	3	DI	NO	DI
[21				17	3	DI	NO	DI
[22		3		17	7	DI	DI	GA
[23				17	7	DI	DI	NO
[24				17	7	DI	DI	NO
[25				17	7	DI	DI	NO
[26				17	7	DI	DI	DI
[27				17	7	DI	DI	DI
[28				17	7	DI	DI	DI

Exemple :

[15 3] [17 1] DI NO GA DI

Additions.

Pour faire des additions, nous avons remarqué que

DI
 + GA

 = NO

DI
 + NO

 = DI

GA
 + NO

 = GA

NO
 + NO

 = NO

Exemples :

	17	7	3	1
		DI	NO	DI
+		DI	DI	NO

			DI	DI
	DI	NO	GA	NO

=	DI	NO	NO	DI

	17	7	3	1
	DI	NO	GA	GA
+		DI	DI	GA

			GA	DI
	DI	DI	NO	

=	DI	DI	GA	DI

Mais, quel poids faut-il ajouter si l'on veut écrire des nombres supérieurs à 28 ?

Nous avons trouvé que DI + DI font

DI GA dans la colonne des 1

DI NO GA dans la colonne des 3

DI NO GA NO dans la colonne des 7

si nous supposons que DI + DI fait

DI NO GA NO NO dans la colonne des 17,

quel autre poids X, faut-il utiliser pour pouvoir écrire le résultat de

DI DI DI NO + DI NO DI ?

	17	7	3	1	
	DI	DI	DI	NO	27
+		DI	NO	DI	8

	DI		DI	DI	
	DI	NO	GA	NO	

=	??	NO	NO	DI	
X	17	7	3	1	
		NO	NO	DI	
+ DI	NO	GA	NO	NO	

= DI	NO	GA	NO	DI	35

X = 41 (3)

Avec 41, 17, 7, 3, 1 nous pouvons compter jusqu'à 69 et pour compter plus loin, nous avons trouvé qu'il fallait utiliser :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 239 & \leftarrow & 99 & \leftarrow & 41 & \leftarrow & 17 & \leftarrow & 7 & \leftarrow & 3 & \leftarrow & 1 \\
 & & 2 \times 99 + 41 & & 2 \times 41 + 17 & & 2 \times 17 + 7 & & 2 \times 7 + 3 & & 2 \times 3 + 1 & & 2 \times 1 + 1
 \end{array}$$

Ainsi, nous pouvons écrire tous les nombres entiers.

Exemples :

		239	99	41	17	7	3	1
[227 17 3]	[239 7 1]	DI	NO	NO	GA	DI	GA	DI
[300]	[239 41 17 3]	DI	NO	DI	DI	NO	DI	NO
[405 1]	[239 99 41 17 7 3]	DI	DI	DI	DI	DI	DI	GA

Comparaisons.

Le système 1, 3, 9, 27 est plus facile à utiliser que le système 1, 3, 7, 17 parce que,

dans le système 1, 3, 7, 17

- certains nombres peuvent s'écrire de plusieurs façons ;
- la somme DI + DI par exemple ne donne pas le même résultat dans toutes les colonnes (1, 3, 7, 17) ;
- les additions ne sont pas faciles à faire.

alors que, dans le système 1, 3, 9, 27

- les nombres ne s'écrivent que d'une seule façon ;
- la somme DI + DI par exemple, donne toujours DI GA, quelle que soit la colonne (1, 3, 9, 27, ...) ;
- les additions sont faciles à faire.

Épilogue.

Après le Congrès, nous avons cherché à faire les additions dans tous les cas possibles. Nous avons essayé

	239	99	41	17	7	3	1
[] [17 17]				DI			
[7] [41]			+	DI			

			DI	NO	GA	NO	NO
[] [41 41]				DI			
[17] [99]			+	DI			

			DI	NO	GA	NO	NO
[] [99 99]				DI			
[41] [239]			+	DI			

			DI	NO	GA	NO	NO

Nous nous sommes aperçus que quelle que soit la colonne :

..... DI

+

DI

DI NO GA

Nous pouvons donc faire toutes les additions, ainsi que toutes les soustractions, en utilisant la technique des « ballons », et ceci, bien que cela puisse être parfois long et délicat. (voir l'exemple suivant).

Pour soustraire ¶ 33, GA DI GA GA DI, nous ajoutons 33, DI GA DI DI GA.

577 239 99 41 17 7 3 1

—

DI DI DI DI DI DI GA

GA DI GA GA DI

577 239 99 41 17 7 3 1

+

DI DI DI DI DI DI GA

DI GA DI DI GA

NO GA DI

DI NO NO GA

DI DI DI NO GA

DI NO

DI NO NO

GA NO NO DI

DI DI NO NO GA

NO NO NO

DI NO NO GA NO NO NO DI

DI NO GA GA NO NO NO DI

[405 1]

[33 17 1]

[438 99 41]

[239 99 41 17 7]

[41 17 3]

[577 1]

NOTES D'ÉDITION

(1) Note du chercheur : le travail hebdomadaire des écoliers était intégré à leur emploi du temps (1h1/4 par semaine). Les collégiens travaillaient 2h par semaine en plus de leur horaire habituel. La coordination article a été assurée par Marie-Christine Chanudeaud

(2) Explication : on veut que $X-27+3-1=47$

(3) Explication : on veut que $35 + 7 = X + 1$

LOI D'ANAÏS 1

Pour faire de très grandes additions avec des nombres composés du même chiffre (ex : 333333333333). On peut écrire :

$$+ 4 \dots \overset{10\,000\,000\,000}{\dots} 4444$$

$$= 3337 \dots \overset{10\,000\,000\,000}{\dots} 7777$$

(il y a 10 000 000 000 de chiffres identiques à la place des pointillés)

LOI DE ANTOINE 3

Si on multiplie un nombre pair par 6, le dernier chiffre du multiple est le dernier chiffre du nombre multiplié.
ex : $122 \times 6 = 732$

Problème de Syracuse

Année 1996-1997

Vincent Bonnaccorsi, Jean-Marc Lacaze (1^{re}S), Christophe Roblin, Eric Vitasse (Tle S)

Encadrés par : Carine Burbaud et Dominique Grihon

Établissement : Lycée Sud Médoc (Taillan-Médoc 33)

Chercheur : Laurent Habsiger.

Problème de Syracuse

Étude de la suite définie par : $u_{n+1} = u_n / 2$ si u_n est pair, $u_{n+1} = 3u_n + 1$ si u_n est impair.

On part d'un entier n positif. Si n est pair, on le transforme en $n/2$; si n est impair, on le transforme en $3n+1$. Quel est le comportement de cette suite à long terme ?

Premières observations.

Si $n = 6$, on obtient la suite : $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Si $n = 9$, on obtient : $9 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Pour tous les nombres n dont nous sommes partis (de 1 à 100, puis davantage grâce à un programme sur ordinateur), la suite aboutit toujours à 1.

Nous nous sommes intéressés aussi à la longueur de cette suite que nous notons $L(n)$. Par exemple, $L(6) = 9$. Mis à part les entiers n de la forme 2^p pour lesquels on peut facilement montrer que la longueur vaut $p+1$, nous n'avons pas trouvé de relation entre n et $L(n)$. Pour n compris entre 1 et 26, $L(n)$ varie entre 1 et 24 mais $L(27) = 112$. A ce jour, nous n'avons pas trouvé d'explication à cet écart. Nous avons enfin observé des similitudes de longueurs en prenant certaines valeurs de n .

Nous avons constaté puis démontré que:

$$L(8k+4) = L(8k+5)$$

et

$$L(16k+18) = L(16k+19).$$

Démonstrations de ces deux conjectures.

$$8k+4 \rightarrow 4k+2 \rightarrow 2k+1 \rightarrow 6k+4 \rightarrow$$

$$8k+5 \rightarrow 24k+16 \rightarrow 12k+8 \rightarrow 6k+4 \rightarrow$$

Ceci montre qu'en 4 étapes, on retrouve le même nombre, donc :

$$L(8k+4) = L(6k+4) + 3 = L(8k+5) \text{ pour } k \text{ supérieur ou égal à } 1.$$

$$16k+18 \rightarrow 8k+9 \rightarrow 24k+28 \rightarrow 12k+14 \rightarrow 6k+7 \rightarrow 18k+22 \rightarrow$$

$$16k+19 \rightarrow 48k+58 \rightarrow 24k+29 \rightarrow 72k+88 \rightarrow 36k+44 \rightarrow 18k+22 \rightarrow$$

Ceci montre qu'en 6 étapes, on retombe sur le même nombre, donc :

$$L(16k+18) = L(18k+22) + 5 = L(16k+19)$$

pour k supérieur ou égal à 1.

De même, on peut écrire : $L(16k+2) = L(16k+3)$

avec k supérieur ou égal à 1, car :

$$16k+2 \rightarrow 8k+1 \rightarrow 24k+4 \rightarrow 12k+2 \rightarrow 6k+1 \rightarrow 18k+4 \rightarrow$$

$$16k+3 \rightarrow 48k+10 \rightarrow 24k+5 \rightarrow 72k+16 \rightarrow 36k+8 \rightarrow 18k+4 \rightarrow$$

Dans quels cas est-on sûr d'arriver à un nombre inférieur à n ?

- Tout d'abord, voyons quel est l'intérêt de cette question : nous avons montré que si on était sûr que pour tout n , on arrivait à un nombre inférieur à n , alors la suite aboutirait toujours à 1.

Démonstration par récurrence : soit P_n la propriété « la suite débutant par n aboutit à 1 ».

Il est clair que P_1 est vraie.

Supposons que $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ soient vraies. Alors, *si* l'on est sûr qu'en partant de n on arrivera à un nombre p strictement plus petit que n , l'hypothèse de récurrence s'applique à p et on aboutira alors à 1, et donc P_n est vraie.

- Le problème maintenant est de voir *si* effectivement on aboutit à un nombre plus petit que celui du départ.

Si $n = 4k$: $4k \rightarrow 2k$ qui est inférieur à n .

Si $n = 4k + 2$: $4k+2 \rightarrow 2k+1$ idem.

Si $n = 4k + 1$: $4k+1 \rightarrow 12k+4 \rightarrow 6k+2 \rightarrow 3k+1$ qui est inférieur strictement à n ($k > 0$).

Si $n = 4k + 3$: $4k+3 \rightarrow 12k+10 \rightarrow 6k+5 \rightarrow 18k+16 \rightarrow 9k+8$. La parité de $9k+8$ n'est pas connue. Il faut donc décomposer à nouveau ce cas suivant les valeurs de k .

A ce jour, nous n'avons rien trouvé de plus.

LOI D'ESTELLE 1

Il y a 28 nombres qui s'écrivent avec deux 1 entre 1 et 1000 : 11. 101. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 121. 131. 141. 151. 161. 171. 181. 191. 211. 311. 411. 511. 611. 711. 811. 911.

LOI DE AMANDA 1

Si n est n'importe quel nombre, il existe une infinité de nombres A et B tels que :

$$A - B = N$$

Il y a une infinité de soustractions qui font N .

Communiquer dans une grille

Année 1997-1998

Bérénice Bourdier, Janet Doman, Marianne Fernandes, Avniyé Karakac, Elodie Lecante et Audrey Lecluse

Encadrés par : M. Bourit

Établissement : Collège l'Ardillière de Nézant, St Brice sous Forêt (95)

Chercheurs : Olivier Bodini, Pierre Duchet (UPR 175, CNRS, Paris)

Présentation du sujet

Réussira-t-on à informer tout le monde en respectant les règles de communication en vigueur dans le réseau ?

Des personnes (ou des relais électroniques, si vous préférez) sont régulièrement disposées dans un plan.

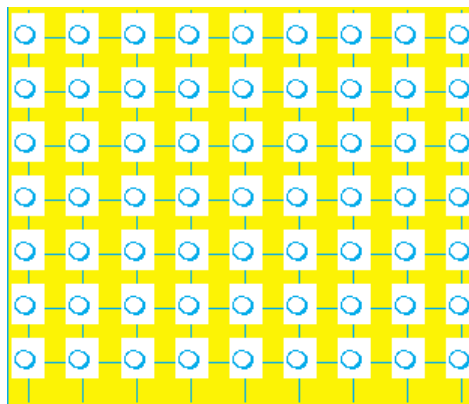


Figure 1.

Chaque personne peut envoyer des informations à d'autres personnes, à condition de respecter certaines règles.

Ces règles, bien précises et immuables, sont les mêmes pour toutes les personnes. En fait, à proprement parler, c'est l'ensemble de ces règles qui définit le réseau.

Donnons un exemple de réseau, baptisé "ABC", car il est défini par trois règles A, B et C. Dans "ABC", une personne quelconque du réseau (placée en P sur la figure 2) peut informer :

- la personne située 3 pas à l'Est, 2 pas au Nord : c'est la règle "A".
- la personne située 3 pas à l'Ouest, 1 pas au Nord : c'est la règle "B".
- la personne située 1 pas à l'Est, 2 pas au Sud : c'est la règle "C".

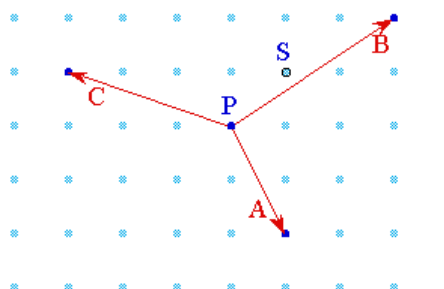


Figure 2. Exemple de réseau

Ainsi, **P** ne peut pas informer *directement* la personne située en **S**, bien que celle-ci soit géographiquement très proche : 1 pas vers l'Est, 1 pas vers le Nord.

Par contre, **S** peut être aisément informé en trois étapes :

- à la première étape, **P** prévient **Q**, en utilisant la règle **A**.
- à la deuxième étape, **Q** prévient **R**, en utilisant la règle **B**.
- à la troisième étape, **R** prévient **S**, en utilisant la règle **C**.

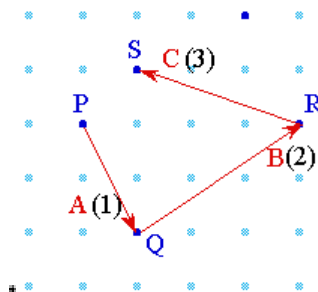


Figure 3. Information de **S** en 3 étapes

Les règles de transmission d'un réseau étant fixées, le problème est le suivant : une nouvelle, connue d'une personne particulière peut-elle être transmise à tout le monde en suivant les règles du réseau ? Sinon, quelles sont les personnes qui peuvent être informées ?

Le problème général, qui est non résolu à ce jour (3), peut être abordé sous bien des aspects :

- Si chacun diffuse immédiatement ce qu'il sait en utilisant toutes les règles, comment se propagent les nouvelles ? En particulier, on peut se demander combien de personnes seront au courant au bout de 1, 2, 3, ..., n étapes.
- Comment savoir si une personne choisie à l'avance pourra être informée ? En combien d'étapes ? De quelle manière ?
- Si on ne trouve aucun moyen de prévenir quelqu'un, comment être vraiment sûr qu'il n'existe aucun moyen ?
- Y a-t-il des réseaux plus efficaces que d'autres pour la diffusion ? Pour des dispositions moins régulières des personnes à prévenir, peut-on trouver des méthodes de diffusion rapides générales ?

Motivation — La diffusion rapide d'une information dans une ville, un pays, un réseau téléphonique, peut être organisée de bien des façons : le principe dit "du téléphone arabe" où chacun transmet la nouvelle à ses voisins est bien connu. C'est suivant le même principe que se propage le feu dans une forêt (à la différence essentielle près qu'un arbre brûlé ne transmet plus). La recherche des meilleures organisations possibles des transmissions dans un réseau relève de la théorie des graphes. Le problème particulier où l'on cherche à informer tout le monde en un minimum de temps est connu sous le nom de "problème des ragots".

L'étude systématique des propagations aléatoires, du type feu de forêt, utilise des techniques mathématiques variées : les probabilités, la théorie de la percolation (appelée ainsi à cause de la propagation de la vapeur dans la poudre de café) et la théorie ergodique qui étudie notamment les zones d'un billard atteintes par une boule qui y circule indéfiniment.

(Pour d'autres aspects de la problématique des réseaux, voir (3).)

Le but de notre recherche était de savoir si on pouvait informer tous les points d'une grille en suivant certaines règles. Nous nous sommes intéressées à deux cas particuliers, chacun utilisant 3 règles. [Nous avons essayé de comprendre dans chaque cas comment augmentait le nombre de points informés au fur et à mesure de la transmission d'information. Les cas étudiés nous ont conduites à des résultats différents.]

Pour notre étude, nous avons pris un repère orthonormé (O, x, y) , en nommant O le point d'origine (que le chercheur avait noté P). [Les points qui nous intéressent sont les points du quadrillage, c'est à dire ceux dont les coordonnées sont des nombres entiers. Au début, seul le point O est informé : à la première étape, il transmet l'information à 3 points de la grille, suivant les règles choisies. Le principe est que chaque point qui est informé pour la première fois à la n -ième étape transmet l'information lors de l'étape suivante à chacun des points qu'elle peut joindre en respectant les règles du réseau.]

Le réseau des règles $(1;-2)$, $(3;2)$ et $(-3;1)$ >> C'est celui de la Figure 2.

Première étape

A partir du point O , à la première étape, 3 points sont informés; A , B et C dont les coordonnées sont, respectivement $(1;-2)$, $(3;2)$ et $(-3;1)$. Nous avons noté les trois règles utilisées sous la forme suivante (Figure 4) :

$\overrightarrow{OA} = \vec{u} = (1, -2)$ (c'est-à-dire 1 vers la droite et 2 vers le bas)

$\overrightarrow{OB} = \vec{v} = (3, 2)$ (c'est-à-dire 3 vers la droite et 2 vers le haut)

$\overrightarrow{OC} = \vec{w} = (-3, 1)$ (c'est-à-dire 3 vers la gauche et 1 vers le haut) (1)

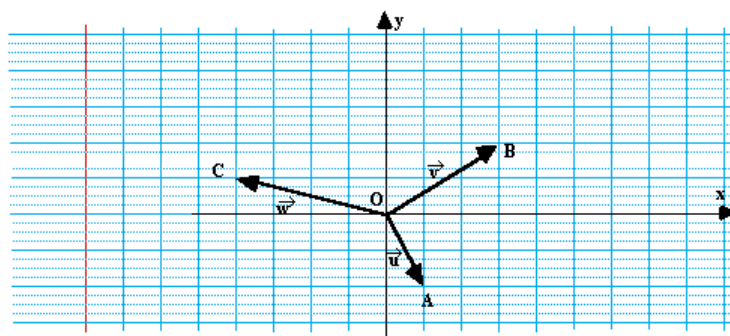


Figure 4. Les trois vecteurs de base du réseau (étape 1)

Deuxième étape

Les 3 points A , B , C informent, chacun, 3 nouveaux points (Figure 5)

Le point A informe D , E , F de telle façon que $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; $\overrightarrow{AF} = \vec{v}$

Le point B informe F , G , H de telle façon que $\overrightarrow{BF} = \vec{u}$; $\overrightarrow{BG} = \vec{v}$; $\overrightarrow{BH} = \vec{w}$

Le point C informe H , I , D de telle façon que $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$; $\overrightarrow{CB} = \vec{w}$; $\overrightarrow{CF} = \vec{u}$

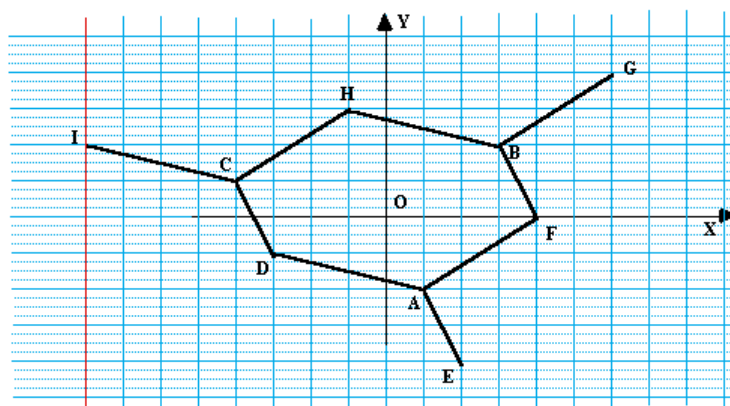


Figure 5. Etape 2

On voit que 6 nouveaux points sont informés, soit 10 points en tout. On remarque aussi que les points D , F , H semblent être informés deux fois, [cela "se voit" sur la figure, mais ce n'est pas une "preuve"!]: nous allons le démontrer.

Point double

Le point D , est engendré [= informé] deux fois, par le point A et par le point C . Nous allons essayer de le démontrer. Supposons que nous ayons deux points différents D et D' (Figure 6) : par construction [et par définition], on a : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CD'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC} = \vec{w}$

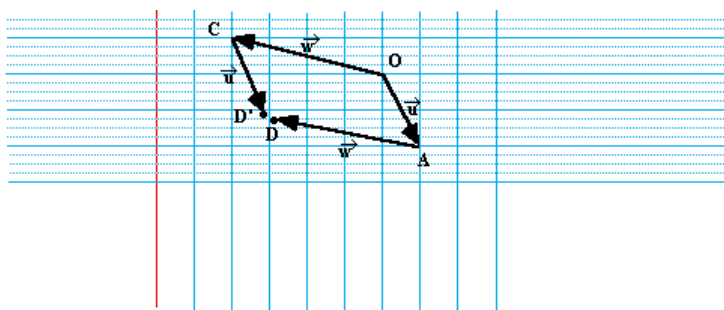


Figure 6 . Un point double.

Donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{w}$ et $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD'} = \vec{w} + \vec{u}$

Comme l'addition [de vecteurs] est commutative, on a : $\vec{u} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{u}$

Mais [par la relation de Chasles, voir [1(a)]] $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{OD'}$

Donc $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'}$ et D et D' sont le même point, mais informés par des chemins différents. Nous dirons que D est un **point double** à l'étape 2 (comme les points F et H). (2)

[Lorsqu'on connaît le principe de l'addition vectorielle voir (1), cette preuve donne une curieuse impression de circularité : voir notre commentaire [2] en fin d'article.]

Etape n°3

Les 6 points D, E, F, G, H et I informant à leur tour, 3 points chacun, en suivant les mêmes règles que précédemment (Figure 7).

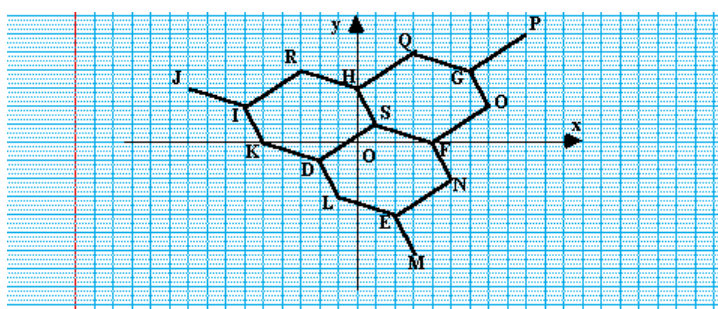


Figure 7. Etape 3

A cette étape, on remarque qu'il y a :

- 3 points "simples" (informés une seule fois) : J, M et P
- 6 points doubles (informés deux fois) : K, L, N, O, Q et R .
- 1 point triple (informé trois fois) : S .

Etape n° 4

Les 10 points précédents $J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S$ informent à leur tour 3 points chacun (Figure 8).

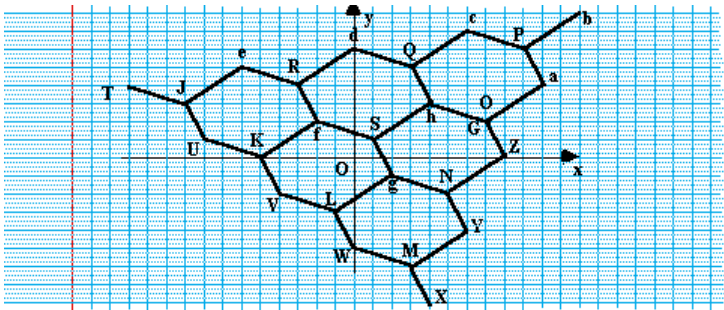


Figure 8. Etape 4

On voit qu'il y a 3 points simples, 9 points doubles et 3 points triples.

Une loi de croissance ?

La superposition des 4 premières étapes nous montre (Figure 9) l'ensemble des points informés.

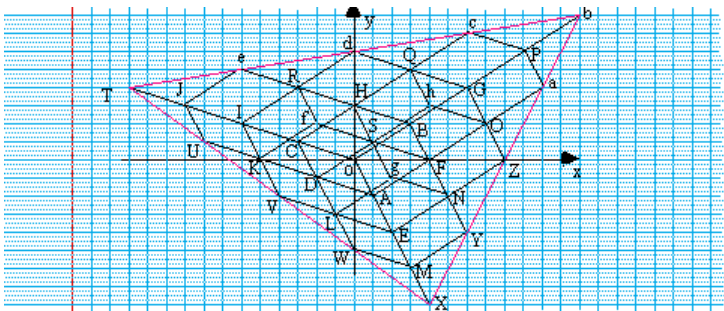


Figure 9. Superposition des 4 premières étapes.

A partir de là le dessin devient trop compliqué pour que l'on continue de la même manière. Heureusement, nous avons vu une règle de croissance sur les 4 premières étapes.

En supposant que la croissance continue toujours comme au début (c'est notre conjecture), nous obtenons le tableau suivant (Tableau 1).

Etape n°	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Situation n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(n)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45
$T(n)$	1	4	10	20	35	56	84	120	165

Tableau 1. Croissance dans le réseau $(1;-2), (3;2), (-3;1)$.

La troisième ligne du tableau représente le nombre $g(n)$ de points nouvellement informés dans la situation n (c'est à dire après l'étape $n-1$). La dernière ligne du tableau indique le nombre total $T(n)$ de points informés dans la situation n : on a $T(n) = g(1)+g(2)+...+g(n)$.

Nous avons trouvé une formule qui permettrait de calculer de proche en proche le nombre de points nouvellement informés.

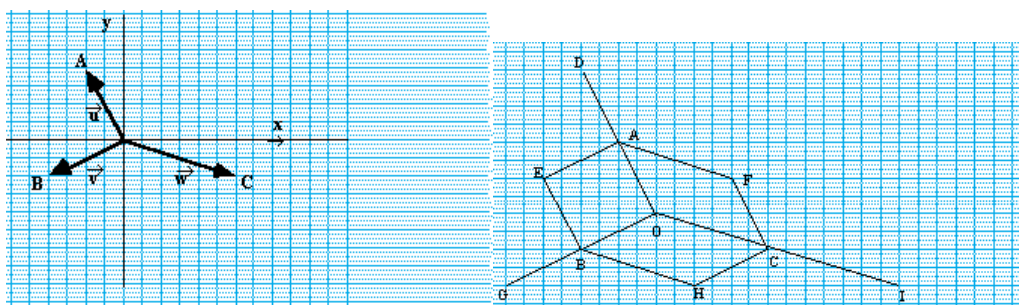
Conjecture 1. Pour le réseau $(1;-2), (3;2), (-3;1)$, on a $g(1)=1$ et $g(n+1)=g(n)+(n+1)$

Exemple. $g(5)+6=g(6) : 15+6=21$ (3)

Mais nous nous sommes rendu compte que le problème général n'était pas si simple : un autre groupe s'est intéressé à d'autres vecteurs de communication (voir ci-dessous) et dans ce cas, la croissance [du nombre] des points informés n'est pas la même.

Le réseau des règles $(-2;4)$ $(-4;-2)$, $(6;-2)$

Les résultats pour les trois premières étapes (Figures 10, 11 et 12) sont [presque] les mêmes que dans le cas précédent. Mais à la troisième étape, on voit que le premier point triple est en fait le point O , origine du repère. Ce qui fait qu'on n'obtient plus que 9 nouveaux points informés et 19 points au total, alors que le premier tableau donnait 10 nouveaux points et 20 au total. [La figure 12 est analogue à la figure 7, mais les appellations des points suivent une règle différente.]



Figures 10 et 11. Le réseau $(-2;4)$, $(-4;-2)$, $(6;-2)$: les deux premières étapes.

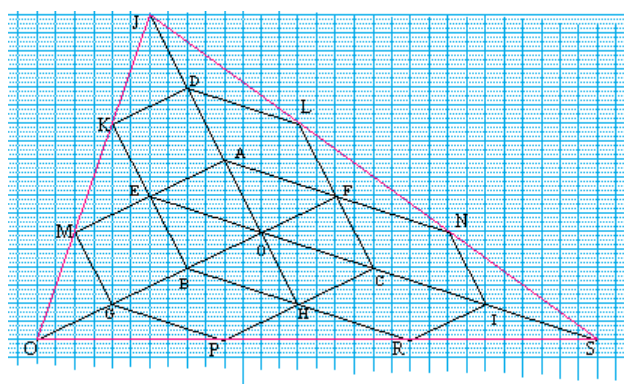


Figure 12. Le réseau $(-2;4)$, $(-4;-2)$, $(6;-2)$, la troisième étape.

De plus, à partir de cette troisième étape, le nombre de nouveaux points informés suit une croissance régulière : il y a 3 points nouvellement informés de plus à chaque étape, ce qui veut dire que la fonction est une fonction affine : $g(n)=3(n-1)=3n-3$. Voici les résultats que nous avons vérifiés (Tableau 2).

Etape n°	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Situation n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(n)$	1	3	6	9	12	15	18	21	24
$T(n)$	1	4	10	19	31	46	64	85	109

Tableau 2. Croissance dans le réseau $(-2;4)$, $(-4;-2)$, $(6;-2)$.

Nous pensons que la loi observée se poursuit :

Conjecture 2 . Pour le réseau $(-2;4)$, $(-4;-2)$, $(6;-2)$, on a $g(1)=1$ et $g(n) = 3(n-1)$ pour $n>2$.

Nous avons trouvé une raison qui explique que nous revenons au point d'origine à la troisième étape. En effet quand on additionne les trois vecteurs de communication on a :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\text{Car } \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion

Nous avons trouvé deux sortes de croissance différentes : une qui suit une loi triangulaire (comme nous l'a dit le professeur) et une autre qui commence pareillement mais qui ensuite devient une fonction affine (comme nous l'avons étudié cette année).

De nombreuses questions restent sans réponse. (voir aussi [3]). (4)

Question 1. Est-ce que ces lois de croissance sont les seules qui existent ?

Question 2. Est-ce qu'il y a d'autres vecteurs qui donnent les mêmes croissances ? Lesquels ?

Question 3. Est-ce qu'on peut informer tous les points de la grille ?

La suite... pour d'autres élèves qui auraient envie de reprendre cette recherche ? (5)

NOTES D'ÉDITION

(1) Ces notations sont les notations conventionnelles pour des vecteurs du plan ; ce mot (voir commentaire [1]) sera souvent utilisé par la suite.

(2) Lorsqu'on connaît le principe de l'addition vectorielle (voir commentaire [1]), cette preuve donne une curieuse impression de circularité : voir notre commentaire [2] en fin d'article.

(3) Les nombres obtenus par cette formule sont connus sous l'appellation de nombres triangulaires : comparer avec la Figure 2 et la formule 1 de l'article Nombres carrés aztèques et penchés, Comptes Rendus MATH.en.JEANS, 1998.

(4) Outre la question de trouver une preuve pour les conjectures 1 et 2.

(5) Pour d'autres résultats sur le réseau $(1;-2)$, $(3;2)$, $(-3;1)$ (en particulier sur la conjecture 1 et la question 3), voir Communication dans une grille, Actes Math.en.Jeans 1994, pp. 45- 50. Voir aussi le commentaire [3].

Commentaires des éditeurs et des chercheurs

Commentaire [1] Les vecteurs

Le mot "vecteur" vient du latin *vehere* "porter". La notion mathématique de vecteur du plan traduit l'idée de *translation*, c'est à dire de déplacement global des points du plan par "glissement" : une translation est une transformation géométrique qui déplace tous les points dans une même direction, dans un même sens et d'une même longueur. Un vecteur peut être mathématiquement défini de plusieurs manières équivalentes. Voici les deux principales.

(a) Point de vue des translations. La notation $\overrightarrow{PQ}$, qui se lit "vecteur PQ", désigne l'unique translation qui transforme le point P en le point Q . On démontre facilement que l'écriture $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ signifie que le quadrilatère $PQSR$ (attention à l'ordre!) est un parallélogramme.

La composition des deux translations est encore une translation : la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{QR}$, est la translation qui transforme P en R , c'est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{PR}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{PR}$ est la *somme* du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ et du vecteur $\overrightarrow{QR}$, et on note $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (*relation de Chasles*).

(b) Point de vue des composantes. Un vecteur $\vec{u}$ peut être considéré comme un couple (a, b) de deux nombres réels a et b (ces nombres sont appelés les *composantes*, ou les *coordonnées*, du vecteur $\vec{u}$). L'addition de deux vecteurs consiste tout simplement, par définition, à faire l'addition composante par composante :

si $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{u}' = (a', b')$, on a $\vec{u} + \vec{u}' = (a + a', b + b')$.

Pour les vecteurs, on utilise souvent une notation en colonne : le vecteur (a, b) est noté $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

La correspondance entre les points de vue **(a)** et **(b)** est possible dès que l'on choisit un repère du plan : une origine O , deux axes Ox et Oy , avec une unité de mesure sur chaque axe. Chaque point est alors repéré par le couple de ses coordonnées dans le repère choisi. A chaque vecteur $\overrightarrow{PQ}$ correspond un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$. Ce sont les coordonnées de ce point M qui sont choisies pour *composantes* du vecteur $\overrightarrow{OM}$. On peut démontrer (c'est ce qui est tenté dans l'article) que les deux définitions de l'addition se correspondent bien : l'addition des "vecteurs-translations" correspond à l'addition des leurs composantes.

Dans les réseaux de communications qui sont étudiés ici, la propagation de l'information au moyen de règles de base s'écrit commodément avec l'addition des vecteurs : par exemple si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ représentent les règles de base, le fait qu'un point g soit informé à la quatrième étape en utilisant successivement la règle $\vec{u}$, puis la règle $\vec{w}$, puis la règle $\vec{u}$ et enfin la règle $\vec{v}$, s'écrit : $\overrightarrow{OG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

Les définitions données des vecteurs du plan et de leur addition se généralisent sans difficulté à l'espace (trois dimensions... ou plus!).

Commentaire [2] Remarque sur la preuve du "point double".

La preuve que les point D et D' sont confondus utilise la commutativité de l'addition des vecteurs. Mais comment prouve-t-on la commutativité de l'addition vectorielle (dont le principe est expliqué en note [1]) ?

Traditionnellement introduite en classe de 3ème, l'égalité entre $\vec{u} + \vec{w}$ et $\vec{w} + \vec{u}$ (on reprend ici les notations de la Figure 6) est établie à partir du fait que le point D , image de A par la translation de vecteur $\vec{w}$ (le point A étant lui-même défini comme l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$ coïncide avec le point D' , image de C par la translation de vecteur $\vec{u}$ (le point C étant défini comme l'image de O par la translation de vecteur $\vec{w}$).

D'où l'impression de "circularité" qui se dégage de la preuve proposée par les collégiens. Nous laissons au lecteur le soin d'approfondir cet exemple qui illustre un trait essentiel de la démarche mathématique : la distinction entre la réalité sensible (propagation d'une information dans une grille suivant certains chemins) et le modèle mathématique de cette réalité (translations et addition vectorielle). Le vrai, au sens mathématique, résulte

logiquement des conventions en vigueur dans la communauté mathématique. Le vrai, au sens de fidélité à la réalité sensible, résulte de la confrontation entre les conventions des mathématiciens et notre expérience du monde sensible.

Commentaire [3] (des chercheurs).

Le sujet proposé met en scène plusieurs domaines actifs des mathématiques contemporaines. Les questions posées à la fin de leur article par les élèves relèvent de l'étude des réseaux entiers (les "sous-groupes discrets" de $\mathbb{R}^n$) et de la "géométrie des nombres" (nombre de points d'un réseau entier dans une forme donnée). La recherche de graphes particuliers permettant la diffusion rapide d'une information relève de la Combinatoire et de la Recherche opérationnelle. L'arithmétique est également concernée : en se restreignant à des vecteurs de base colinéaires du type $(n;0)$ avec $n>0$, on tombe sur un problème célèbre, proposé par *Frobenius*, dont voici une version simplifiée : si les valeurs nominales en francs des pièces en usage dans un système monétaire sont de $n_1, n_2, \dots, n_k$, quelles sommes sont payables exactement dans ce système ? Le problème reste ouvert pour $k>4$.

Outre les résultats présentés dans leur article, les élèves avaient étudié une variante inédite du problème initial : la propagation de l'information avec la contrainte de rester dans un domaine limité. Considérons par exemple le premier réseau (règles $(1;-2)$, $(3;2)$ et $(-3;1)$) limité aux points du rectangle $R = [-3,+3][-2,+2]$ (R est le plus petit rectangle à cotés parallèles aux axes qui contienne les trois vecteurs de base du réseau). Nous fûmes étonnés de constater que tous les points à coordonnées entières de R peuvent être informés sans sortir de R , à l'exception de l'unique point $(-3;-2)$! Nous sommes à la recherche d'une explication générale.

Cette version limitée du problème nous paraît en tout cas très intéressante pour des recherches ultérieures de MATH.en.JEANS.

LOI D'ANTOINE 1

Quand je multiplie 9 par lui même,

1 fois 9×9	le résultat se termine par 1
2 fois $9 \times 9 \times 9$	le résultat se termine par 9
3 fois $9 \times 9 \times 9 \times 9$	le résultat se termine par 1
4 fois $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$	le résultat se termine par 9 ...

Si le nombre de multiplications est pair, le résultat se termine par 9, si il est impair, il se termine par 1.

LOI DE VANESSA / ALBINE 1

Il y a des infinis plus grands que d'autres :

L'infini des nombres à virgule est plus grand que l'infini des nombres qui n'ont pas de virgule.

Preuve :
 entre 0 et 1, il y a une infinité de nombres à virgule.
 entre 1 et 2, il y a une infinité de nombres à virgule.
 entre 2 et 3, il y a une infinité de nombres à virgule.
 entre...

Entre chaque nombre sans virgule (on les appelle des nombres entiers), il y a une infinité de nombres à virgule.

Les crêpes

Année 1998-1999

Tania Zanichelli, Boris Bernier, Nicolas Bouzida et Brice Boyer

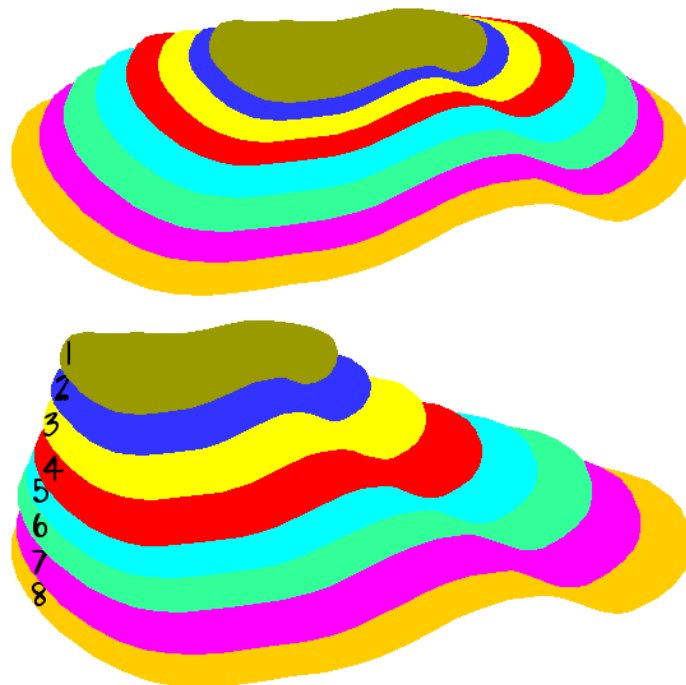
Encadrés par : Alain Idelon-Riton

Établissement : Lycée de La Mure (Isère)

Chercheur : Charles Payan

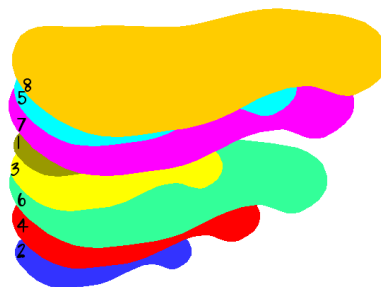
Le Problème

On veut savoir comment ordonner un tas de n crêpes numérotées de 1 à n de façon à avoir la plus grande en bas et la plus petite en haut, les crêpes étant de plus en plus petites en allant du bas vers le haut du tas.



Pour cela on s'oblige à utiliser un seul type de transformation et un seul outil **une pelle à crêpes**.

On coupe le tas à l'endroit choisi. La partie qui se trouve au dessus sera retournée, c'est à dire mise en sens inverse. On se propose par exemple de remettre en ordre la pile ci-dessous.



La méthode naturelle

Explications

Dans cet exemple nous avons ordonné de manière intuitive la pile de crêpes. Nous avons trouvé une méthode qui permet à coup sûr d'ordonner une pile.

Elle consiste à rechercher la plus grande crêpe : si elle n'est pas à sa place (c'est-à-dire en bas) on coupe la pile en dessous de celle-ci et on retourne la partie de la pile située au dessus de l'endroit où on a coupé. Cette crêpe se retrouve alors en haut de la pile. Il suffit alors de retourner la pile pour remettre la plus grande crêpe à sa place. On continue de même avec les crêpes restantes.

Cette méthode nécessite deux opérations pour remettre une crêpe à sa place sauf pour les deux plus petites qui seront soit dans l'ordre soit dans le désordre mais dans ce cas un seul retournement est nécessaire. Cette méthode nous permet d'ordonner une pile à n éléments en $2(n-2)+1$ coups pour $n \geq 2$, c'est-à-dire qu'en $2n-3$ coups, on est sûr de ranger la pile (voir exemple ci-dessous).

Mais cette technique n'est pas forcément la plus rapide, il suffit pour s'en convaincre de regarder l'exemple suivant, avec 9 coups au lieu de 13.

Un exemple :

8	2	3	4	6	1	5	6	7	1
5	4	6	<u>6</u>	4	2	7	<u>7</u>	6	2
7	6	<u>4</u>	3	3	3	<u>6</u>	5	5	3
1	<u>3</u>	2	2	2	4	4	4	4	4
3	1	1	1	<u>1</u>	6	3	3	3	5
6	7	7	7	7	7	2	2	2	6
4	5	5	5	5	<u>5</u>	1	1	<u>1</u>	7
<u>2</u>	8	8	8	8	8	8	8	8	8

Les nombres soulignés (par exemple 4) matérialisent les coups de pelle.

Les arbres

Quelques remarques préliminaires.

Nous avons une pile ; on effectue un retournement ou une suite de retournements. On obtient une nouvelle pile. On peut repartir de cette pile et retrouver la pile initiale en faisant les mêmes retournements.

Exemple :

2		1		2
<u>1</u>	←	<u>2</u>		1
4	⇒	4	⇒	4
3		3		3

Les tirets () représentent les coups de pelle.

C'est le principe de base de notre arbre ; il consistera à partir de la pile ordonnée, à effectuer des retournements qui aboutiront à d'autres ordres.

Construction de l'arbre.

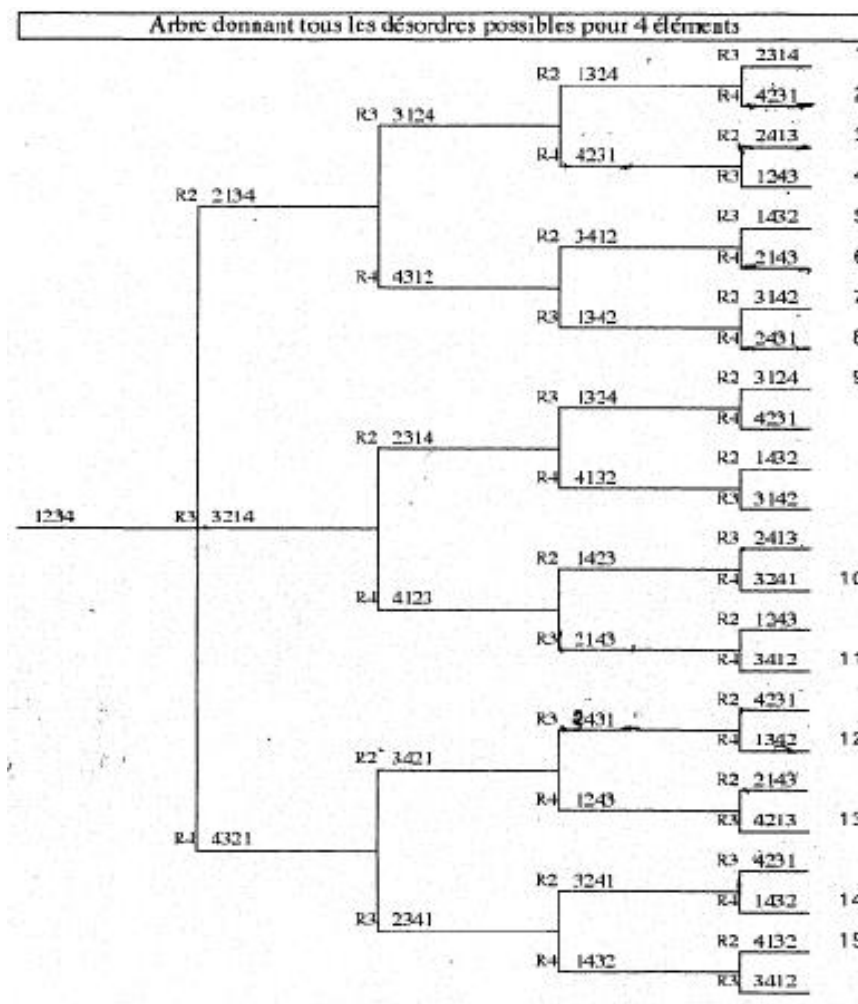
Nous inscrivons la pile ordonnée dans une colonne, le niveau 0 car cette pile ne nécessite aucun retournement pour être remise dans l'ordre.

Cette pile de n crêpes peut être coupée à n endroits différents : on effectue ces retournements et on place les piles obtenues dans le niveau 1 (un seul retournement judicieux permet de remettre ces piles en ordre).

On remarque que l'ordre initial se retrouve dans ce niveau. En effet on a retourné une seule crêpe, ce qui est inutile puisque cette crêpe ne changera pas de place. Nous allons donc supprimer ce retournement.

On effectue maintenant les $(n-1)$ retournements à partir des piles du niveau 1 pour obtenir les combinaisons du niveau 2. On s'aperçoit que des ordres réapparaissent (pour la pile de 4 éléments, c'est l'ordre 1234). Cela s'explique par le fait qu'on a effectué deux fois de suite le même retournement et donc qu'on retrouve l'ordre initial (comme dans l'exemple ci-dessus).

On simplifie encore l'arbre avec ceci. On continue ainsi (1)

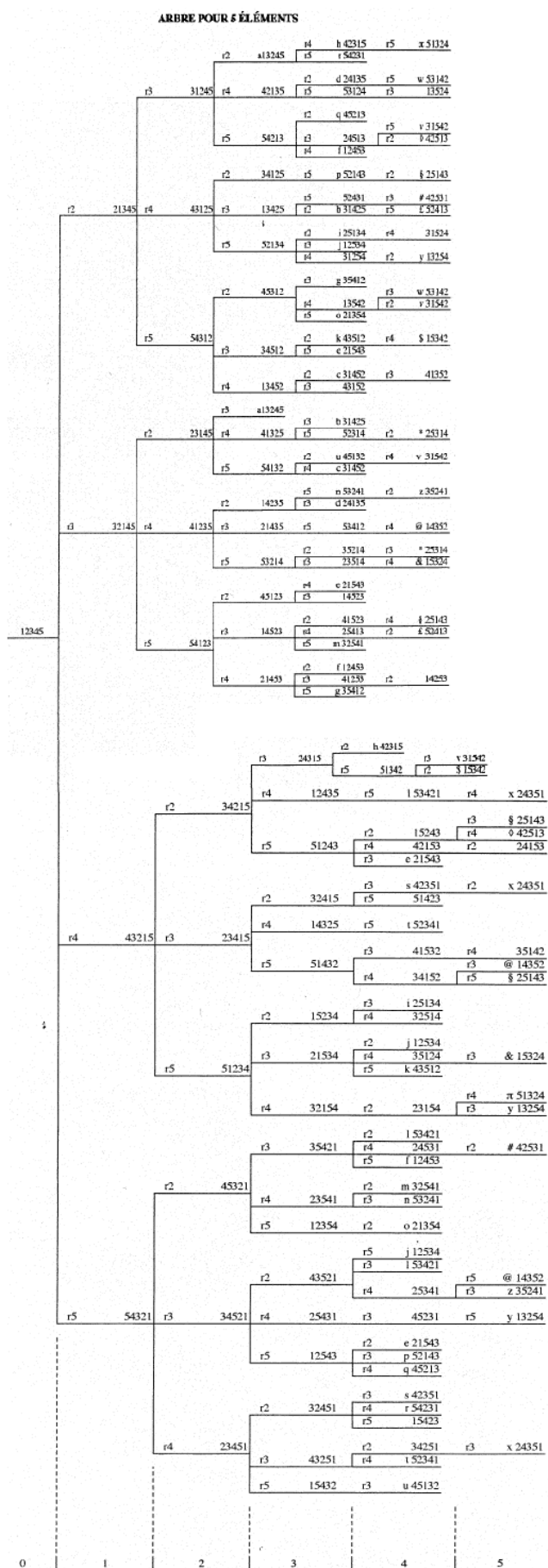


1	$R_2^* R_3^* R_2^* R_3 = R_3^* R_2^*$
2	$R_2^* R_3^* R_2^* R_4 = R_3^* R_2^* R_3^* R_4 = R_4^* R_2^* R_3^* R_2 = R_4^* R_3^* R_2^* R_3$
3	$R_2^* R_3^* R_4^* R_2 = R_3^* R_4^* R_2^* R_3$
4	$R_2^* R_3^* R_4^* R_3 = R_3^* R_4^* R_3^* R_2 = R_4^* R_2^* R_4$
5	$R_2^* R_4^* R_2^* R_3 = R_3^* R_2^* R_4^* R_2 = R_4^* R_3^* R_4$
6	$R_2^* R_4^* R_2^* R_4 = R_4^* R_2^* R_4^* R_2 = R_3^* R_4^* R_3$
7	$R_2^* R_4^* R_3^* R_2 = R_3^* R_2^* R_4^* R_3$
8	$R_2^* R_4^* R_3^* R_4 = R_4^* R_2^* R_3$
9	$R_2^* R_3 = R_3^* R_2^* R_3^* R_2$
10	$R_3^* R_4^* R_2^* R_4 = R_4^* R_3^* R_2$
11	$R_3^* R_4^* R_3^* R_4 = R_4^* R_3^* R_4^* R_3 = R_2^* R_4^* R_2$
12	$R_4^* R_2^* R_3^* R_4 = R_2^* R_4^* R_3$
13	$R_4^* R_2^* R_4^* R_3 = R_2^* R_3^* R_4$
14	$R_4^* R_3^* R_2^* R_4 = R_3^* R_4^* R_2$
15	$R_4^* R_3^* R_4^* R_2 = R_3^* R_2^* R_4$

Validité de l'arbre.

Nous avons n crêpes au départ et nous devons trouver $n!$ permutations. Nous achèverons l'arbre une fois que nous les aurons toutes trouvées.

Nous savons que toute pile peut être remise dans l'ordre avec la méthode naturelle. La méthode naturelle permet d'aboutir à la pile initiale après un certain nombre de retournements. Or, c'est le principe de base de notre arbre.



Notre arbre fournit donc toutes les combinaisons possibles.

Arbre élaboré.

niveau:	1	2	3	4	5
12345	21345	31245	12354	12453	13254
	32145	43125	12435	12534	13524
	43215	54312	12543	13542	14253
	54321	23145	13245	14523	14352
		41235	13425	15243	15324
		54123	13452	15423	15342
		34215	14235	21354	24153
		23415	14325	21543	24351
		51234	14523	23154	25143
		45321	15234	23514	25314
		34521	15432	24135	31524
		23451	21435	24513	31542
			21453	24531	35142
			21534	25134	35241
			23541	25341	41352
			24315	25413	42513
			25431	31254	42531
			32154	31425	51324
			32415	31452	52413
			32451	32514	53142
			34125	32541	
			34512	34152	
			35421	34251	
			41325	35124	
			42135	35214	
			43251	35412	
			43521	41253	
			45123	41523	
			45312	41532	
			51243	42153	
			51432	42315	
			52134	42351	
			53214	43152	
			54132	43512	
			54213	45132	
				45213	
				45231	
				51342	
				51423	
				52143	
				52314	
				52341	
				52431	
				53124	
				53241	
				53412	
				53421	
				54231	

Nous pouvons voir que certaines piles apparaissent plusieurs fois et parfois même à des niveaux différents. Nous ne conserverons que les piles différentes et qui apparaissent dans le niveau le plus proche de 0.

En effet, il est inutile de faire les mêmes retournements à partir de plusieurs piles identiques.

Nous allons maintenant étudier les retournements qui permettent de simplifier l'arbre.

Les bases du retournement.

Nous allons noter un retournement "R". En indice, il y aura le nombre "i" de crêpes retournées : R_i .

Une suite de retournements sera notée "S" et " $\bar{S}$ " la même suite de retournements mais dans l'ordre inverse. Le signe "=" indiquera l'équivalence entre deux suites équivalentes : $S_1 = S_2$. Plusieurs retournements successifs seront notés : $R_2 * R_3 * R_i \dots$

Les égalités.

On remarque que R_1 est l'élément neutre et que

Règle I : $R_i * R_1 = R_1$ et $S * \bar{S} = R_1$

Quelques règles de calcul.

Nous avons observé qu'il était possible que deux suites de retournements différentes appliquées à une même pile donnent le même résultat comme par exemple :

$$R_2 * R_3 * R_2 = R_3 * R_2 * R_3$$

On obtient une pile nouvelle et une seule, à partir de laquelle on peut effectuer d'autres retournements.

Règle II : Si $S_1 = S_2$, alors $S_1 * S_3 = S_2 * S_3$.

Si on sait que $S_1 * S_2 = S_3$ alors $S_1 * S_2 * \bar{S}_2 = S_3 * \bar{S}_2$ or $S_2 * \bar{S}_2 = R_1$ donc $S_1 = S_3 * \bar{S}_2$

On a aussi $\bar{S}_1 * S_1 * S_2 = \bar{S}_1 * S_3$ or $\bar{S}_1 * S_1 = R_1$ donc $S_2 = \bar{S}_1 * S_3$

et finalement on a $S_1 * S_2 = S_3 * \bar{S}_2 * \bar{S}_1 * S_3$ $S_1 * S_2 = S_3 * \bar{S}_2 * \bar{S}_1 * S_3$

En utilisant les règles I et II, à partir de $R_2 * R_3 * R_2 = R_3 * R_2 * R_3$, on obtient les égalités

$$R_2 * R_3 = R_3 * R_2 * R_3 * R_2 \text{ et } R_3 * R_2 = R_2 * R_3 * R_2 * R_3$$

Les mots neutres (2)

Soit la suite :

$$R_a * R_b * \dots * R_x * R_y * R_z * R_\alpha = R_1$$

et on la transforme :

$$R_a * R_b * \dots * R_x * R_y * R_z * R_\alpha * R_\alpha = R_1 * R_\alpha$$

$$R_a * R_b * \dots * R_x * R_y * R_z * R_\alpha * R_\alpha = R_\alpha$$

$$\text{Or } R_\alpha * R_\alpha = R_1$$

$$R_a * R_b * \dots * R_x * R_y * R_z = R_\alpha$$

$$R_a * R_a * R_b * \dots * R_x * R_y * R_z = R_a * R_\alpha$$

$$R_a * R_a * R_b * \dots * R_x * R_y * R_z = R_1$$

on peut aussi écrire :

$$R_z * R_\alpha * R_a * R_b * \dots * R_x * R_y = R_1$$

$$R_y * R_z * R_\alpha * R_a * R_b * \dots * R_x = R_1$$

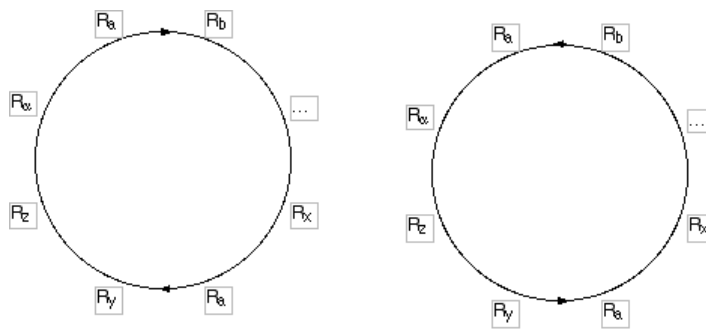
...

et on arrivera bientôt à la suite initiale :

$$R_a * R_b * \dots * R_x * R_y * R_z * R_\alpha = R_1$$

Il y a donc un cycle.

Chaque égalité est équivalente à la suite initiale et on peut donc "commencer" d'où on veut dans ce cycle :



En recherchant les suites correspondant au même cycle, on obtient un ensemble de classes (3) qui constitue un noyau élémentaire à partir duquel on peut retrouver toutes les autres suites.

Voici les mots (représentants de classe) trouvés (jusqu'à 4 éléments) (4) :

$$R_2 * R_3 * R_2 * R_4 * R_2 * R_3 * R_2 * R_4 = R_1$$

$$R_2 * R_3 * R_4 * R_2 * R_3 * R_2 * R_4 * R_3 = R_1$$

$$R_2 * R_3 * R_4 * R_3 * R_2 * R_3 * R_4 * R_3 = R_1$$

$$R_2 * R_4 * R_2 * R_4 * R_2 * R_4 * R_2 * R_4 = R_1$$

$$R_3 * R_4 * R_3 * R_4 * R_3 * R_4 * R_3 * R_4 = R_1$$

$$R_2 * R_4 * R_2 * R_3 * R_4 * R_3 * R_4 = R_1$$

$$R_2 * R_4 * R_2 * R_4 * R_3 * R_4 * R_3 = R_1$$

$$R_2 * R_3 * R_2 * R_3 * R_2 * R_3 = R_1$$

$$R_i * R_i = R_1$$

Curiosité :

La **pile 1** est la pile de référence

La **pile 2** est la pile choisie

La **pile 3** est la pile que l'on désire fabriquer

La **pile 4** est l'ordre

On va ranger les nombres de la **pile 1** dans les cases de la **pile 3**

On associe chaque nombre de la **pile 1** au nombre de la **pile 2** situé sur la même ligne :

On range dans chaque case de la **pile 3** les nombres de la **pile 1** en face des nombres de la **pile 4** égaux aux nombres de la **pile 2** :

1	2	.	1
2	3	.	2
3	4	.	3
4	1	.	4
...	...	.	...
Pile 1	Pile 2	Pile 3	Pile 4

On associe chaque nombre de la **pile 1** au nombre de la **pile 2** situé sur la même ligne :

$(1, c)$

$(2, b)$

$(3, d)$

$(4, a)$

On associe chaque case de la **pile 3** au nombre de la **pile 4** situé sur la même ligne :

(α, a')

(β, b')

(γ, c')

(δ, d')

IV. Majoration et minoration

Pour cela, nous nous intéressons aux éléments de la dernière colonne du tableau. Ces éléments sont ceux qui nécessitent le plus grand nombre de manipulations pour retourner à l'ordre initial. Ce sont les plus grands désordres.

Si nous pouvons arriver à évaluer le niveau de ces plus grands désordres dans l'arbre, nous pourrons alors connaître le nombre de manipulations ou coups nécessaires au maximum pour remettre n'importe quel désordre dans l'ordre initial. Ce nombre de coups maximum est appelé $f(n)$ pour un tas de n crêpes.

A l'aide des arbres, nous avons remarqué que :

$f(1) = 0$, une seule crêpe est forcément dans l'ordre !

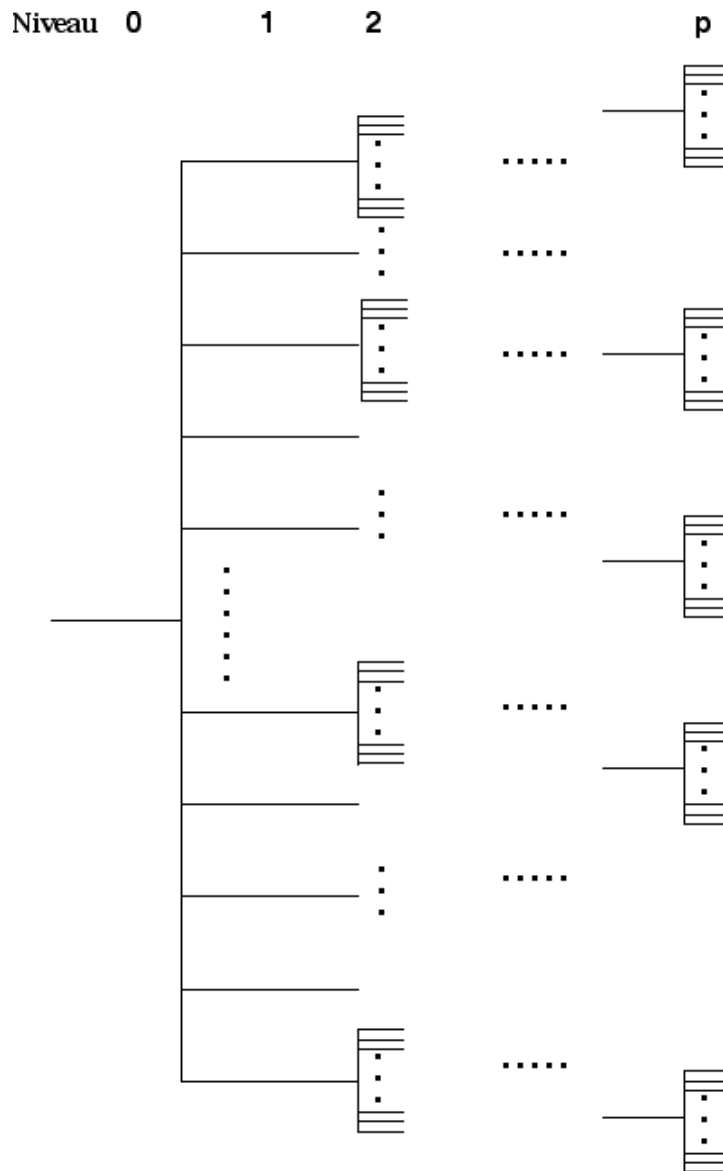
$f(2) = 1$

$f(3) = 3$

$f(4) = 4$

On se propose d'encadrer $f(n)$.

Recherche d'un minorant



(on cherche quelque chose dont on soit sûr que c'est plus petit que $f(n)$)

Nous allons utiliser notre premier arbre.

On se propose de chercher le nombre de combinaisons pas forcément différentes que l'on a trouvées au niveau « p » quelconque.

On additionne le nombre de combinaisons trouvées à chaque niveau.

On a donc :

$$\begin{aligned}
 T &= 1 + (n-1)(n-2)^0 + (n-1)(n-2)^1 + (n-1)(n-2)^2 + \dots + (n-1)(n-2)^{p-1} \\
 &= 1 + (n-1) \frac{1 - (n-2)^p}{1 - (n-2)} \\
 &= 1 + (n-1) \frac{(n-2)^p - 1}{n-3}
 \end{aligned}$$

Le nombre de désordres différents pour n crêpes étant $n!$, pour obtenir ce nombre, il faut que $T = n!$. Voici les calculs : $T \geq n!$ pour tout entier supérieur à 3

$$1 + (n-1) \frac{(n-2)^p - 1}{n-3} \geq n!$$

$$(n-1) \frac{(n-2)^p - 1}{n-3} \geq n! - 1$$

$$(n-2)^p \geq \frac{(n! - 1)(n-3)}{n-1} + 1$$

$$(n-2)^p \geq \frac{n!(n-3) + 2}{n-1}$$

$$\ln[(n-2)^p] \geq \ln\left(\frac{n!(n-3) + 2}{n-1}\right)$$

$$p \ln[(n-2)^p] \geq \ln\left(\frac{n!(n-3) + 2}{n-1}\right)$$

$$p \geq \frac{\ln(n!(n-3) + 2) - \ln(n-1)}{\ln(n-2)}$$

Ainsi, pour être certain d'avoir tous les désordres possibles d'un tas de n crêpes, il faudra, dans l'arbre, aller au moins jusqu'au niveau p tel que p soit supérieur à la partie entière de

$$\frac{\ln(n!(n-3) + 2) - \ln(n-1)}{\ln(n-2)}$$

Recherche d'un majorant

(on cherche quelque chose dont on soit sûr que c'est plus grand que $f(n)$)

Nous avons déjà vu que $f(n) \leq 2n - 3$ pour $n \geq 2$

On se propose de trouver un meilleur majorant.

A l'aide de la méthode naturelle, on range toutes les crêpes d'une pile de n crêpes sauf les cinq du dessus. Cela nécessite $2(n-5)$ retournements, il reste 5 crêpes à remettre en ordre. Or $f(5) = 5$.

On a donc besoin de $2(n-5) + 5$ ou $2n - 5$ retournements pour remettre en ordre une pile de plus de 5 crêpes.

Encadrement de $f(n)$

D'après ce qui précède, on a :

$$\frac{\ln(n!(n-3) + 2) - \ln(n-1)}{\ln(n-2)} \leq f(n) \leq 2n - 3$$

ou pour $n \geq 5$:

$$\frac{\ln(n!(n-3) + 2) - \ln(n-1)}{\ln(n-2)} \leq f(n) \leq 2n - 5$$

Conclusion

Finalement, si on avait un moyen d'éliminer des arbres les désordres en double, triple ... alors on pourrait peut-être trouver un meilleur minorant.

Nous espérons que ces quelques réflexions ont apporté un peu d'eau au moulin de la recherche mathématique et le lecteur aura compris que la question reste posée.

NOTES D'ÉDITION

(1) Attention, les notations utilisées sont celles qui sont définies plus loin, partie Les bases du retournement : "Nous allons noter un retournement «R». En indice, il y aura le nombre «i» de crêpes retournées : R_i ." C'est-à-dire que R_3 consiste à retourner les 3 crêpes d'en haut, peu importe où se trouve la crêpe numéro 3.

(2) Un "mot" est une suite de retournements. Cette suite est notée $R_a * R_b * \dots * R_x * R_y * R_z * R_\alpha$, une "lettre" est un retournement R_x et un mot contient au moins une lettre. Lorsqu'on on fait une première suite de retournements, suite représentée par le mot $R_a * R_b * \dots * R_x * R_y * R_z$ puis une deuxième suite de retournements suite représentée par le mot $R_{a'} * R_{b'} * \dots * R_{x'} * R_{y'} * R_{z'}$, le résultat se représente par le mot qui est la "concaténation" de ces deux mots : $R_a * R_b * \dots * R_x * R_y * R_z * R_{a'} * R_{b'} * \dots * R_{x'} * R_{y'} * R_{z'}$. Le mot constitué d'une seule lettre, la lettre R_1 , est élément neutre pour cette opération de concaténation : $R_a * R_1 = R_a = R_1 * R_a$: car R_1 est élément neutre comme on l'a vu plus haut.

(3) Il s'agit ici d'un ensemble de mots : le "noyau" est l'ensemble des mots qui sont égaux au mot formé de la seule lettre R_1 : dès qu'on rencontre, dans un mot, un mot du noyau on peut le remplacer par R_1 et même le supprimer sauf si ce mot est tout seul dans cette suite (auquel cas on le remplace par R_1).

(4) Dans cet exemple on a une pile de 4 crêpes ; ce sont les "mots" du noyau qui sont donnés ensuite.

LOI DE VANNYNA 1

Si n est n'importe quel nombre, $n \times 1 = N$.

LOI DE MOHAMMED

On peut faire les multiplications de la façon suivante :

123

$\times 24$

123

123

123

123

1230

1230

2952

Le problème des interrupteurs

Année 1999-2000

Laure de la Roque, Aurélie Nicolas, Claire Peltier (1ère L), Benoit Rangel, Cyrille Scifo (2nde)

Encadrés par : Annick Baillou, Jean-Pierre Guibbaud, François Thomas

Établissements : Lycées Fernand Daguin (Mérignac 33), Lycée Elie Faure (Lormont 33)

Chercheur : Emeric Gioan (LABRI, Université de Bordeaux I)

Présentation du sujet.

Les Interrupteurs (Shannon's switch game, c. 1940)

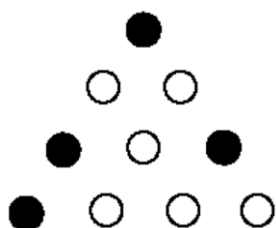


Figure 1

Des boutons lumineux sont disposés en réseau (figure 1). Un clic sur un bouton change l'état, allumé ou éteint, du point et de celui de ses voisins. Par une succession de clics, la plus courte possible, on cherche à éteindre tous les boutons à partir d'une configuration donnée.

On étudiera divers types de réseaux, en cherchant des solutions les plus générales possibles. (1)

On a :

- des lampes-interrupteurs représentées par des points allumés : 
- des lampes-interrupteurs représentées par des points éteints : 
- certaines étant reliées entre elles :



Lorsqu'on change l'allumage d'un point on change l'allumage de ceux qui lui sont directement liés.

Définitions

Réseau : manière dont sont disposés les points et les liaisons. (2)

Etat : un point peut être soit allumé, soit éteint.

Configuration : elle regroupe le réseau et les états des points au départ.

Séquence : suite de touches sur lesquelles on appuie pour modifier un état.

But

Le but est de tout éteindre, quelle que soit la configuration choisie au départ.

Exemple

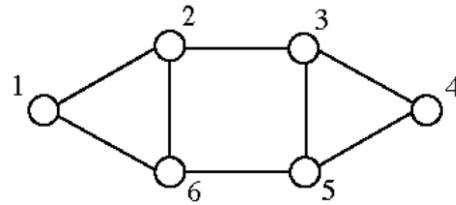


Figure 2

Si on appuie sur la lampe-interrupteur 1, on change l'allumage des lampes-interrupteurs 1, 2 et 6.

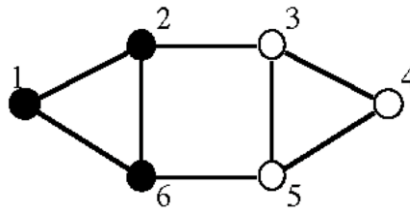


Figure 3

Si on appuie sur la lampe-interrupteur 4, on change l'allumage des lampes-interrupteurs 3, 4 et 5.

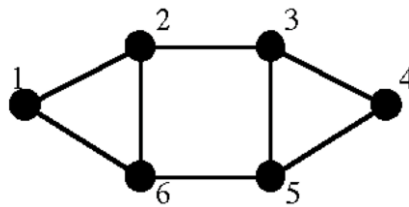


Figure 4

La séquence 1 – 4 est solution.

La commutativité

Soient deux lampes-interrupteurs : L_A et L_B .

On appelle I_A l'ensemble des lampes-interrupteurs dont l'état dépend de la lampe-interrupteur L_A .

On appelle I_B l'ensemble des lampes-interrupteurs dont l'état dépend de la lampe-interrupteur L_B .

On appelle $I_A \cap I_B$ l'ensemble des lampes-interrupteurs dont l'état dépend de deux lampes-interrupteurs.

On cherche à montrer que l'ordre dans lequel on appuie sur les lampes-interrupteurs n'a pas d'importance.



Figure 5

Si on appuie sur la lampe-interrupteur L_A :

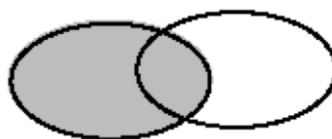


Figure 6

Si on appuie maintenant sur la lampe-interrupteur L_B :

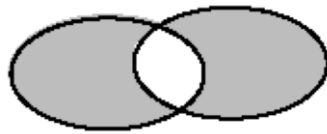


Figure 7

Ensuite, on recommence en changeant l'ordre. On appuie d'abord sur la lampe-interrupteur L_B :

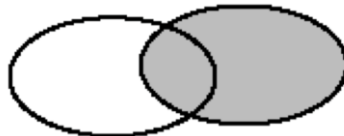


Figure 8

Puis sur la lampe-interrupteur L_A :



Figure 9

On remarque que l'on obtient le même résultat quel que soit l'ordre choisi. On peut donc affirmer :

Théorème 1

L'ordre dans lequel on appuie sur les lampes-interrupteurs n'a pas d'importance.

De plus on peut dire que si l'on appuie sur L_A puis L_B et enfin L_A , cela revient au même que d'appuyer sur L_A puis L_A puis L_B , donc d'appuyer sur L_B . On peut donc en déduire :

Théorème 2

Il n'y a pas besoin d'appuyer deux fois sur la même lampe-interrupteur.

Ainsi, pour le premier exemple (figures 2, 3, 4), la séquence 3 – 1 – 3 – 4 est inutile (3).

Séquences utiles

On appellera donc *séquence utile* une séquence dans laquelle aucun nombre n'est répété.

Quelques configurations

Si l'on prend une configuration avec un nombre quelconque (par exemple 5) de points disposés en cercle ...

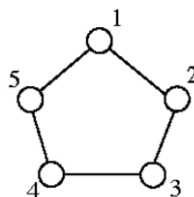


Figure 10

... il suffit d'appuyer successivement sur les 5 points pour tout éteindre.

Si l'on prend une configuration entièrement allumée avec un nombre de points multiple de 3 disposés en cercle ...

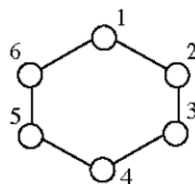


Figure 11

... il suffit d'appuyer sur un point sur trois pour tout éteindre.

Si l'on prend une configuration avec un nombre de points pair (par exemple 8 points) disposés en cercle en éteignant un point sur deux ...

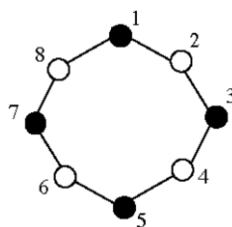


Figure 12

... il suffit d'appuyer successivement sur les points qui étaient allumés au départ pour tout éteindre.

Le nombre de séquences utiles

(4) On a cherché une formule permettant de trouver le nombre de séquences à partir du nombre de points. Tout d'abord nous avons établi un tableau :

Nombre d'interrupteurs	Nombre de séquences utiles
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256

Figure 13

Conjecture

A partir de ces résultats, nous avons trouvé la formule suivante :

$$U_n = 2^n$$

Avec :

- n : nombre d'interrupteurs
- U_n : nombre de séquences utiles.

Exemple : soit $n = 9 : U_9 = 2^9 = 512$. Pour 9 interrupteurs, on a 512 séquences utiles. On peut ainsi remarquer que la taille du problème dépend du nombre de points.

Une autre manière d’exprimer les configurations

Prenons une configuration à 6 points qui peut se résoudre en appuyant sur les lampes-interrupteurs 1 et 4 (figure 11). On peut exprimer cette configuration sous forme de tableau. Pour cela déterminons quel point est relié avec quel point :

- 1 est relié avec 1 – 2 – 6
- 2 est relié avec 1 – 2 – 3
- 3 est relié avec 2 – 3 – 4
- 4 est relié avec 3 – 4 – 5
- 5 est relié avec 4 – 5 – 6
- 6 est relié avec 1 – 5 – 6

On peut ainsi former le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6
1	*	*				*
2	*	*	*			
3		*	*	*		
4			*	*	*	
5				*	*	*
6	*				*	*

Figure 14

Ce tableau permet de visualiser autrement la configuration ; mais pour pouvoir la résoudre il faut en faire un autre :

	1	2	3	4	5	6
Au départ	1	1	1	1	1	1
On appuie sur 1	0	0	1	1	1	0
On appuie sur 4	0	0	0	0	0	0

Figure 15

On réussit donc bien à éteindre cette configuration même en la formulant sous forme de tableau.(5)

Idées pour des recherches futures

- Trouver une manière d’essayer toutes les combinaisons possibles sans se répéter.
- Lorsqu’on a une configuration dessinée, essayer de la dessiner autrement.
- Modélisation informatique.
- Recherche sur des configurations compliquées (ex. 30 lampes-interrupteurs).
- Recherche d’invariants : cercles, chaînes. (6)

NOTES D'ÉDITION

(1) Pour les utilisations pédagogiques de ce jeu dans l'enseignement secondaire, on peut consulter O. Björkqvist, Application of Mathematics to a Category of Advanced Strategy Games in Jan de Lange, Christine Keitel, Ian Huntley and Morgan Niss (eds.), Innovation in Maths Education by Modeling and Applications, Ellis Howood, New York (...), 1993, 269-276. Pour une analyse mathématique d'un cas particulier voir Pelletier D., Merlin's magic Square, Amer. Math. Month. 94,143-150.

(2) Ici, un réseau est un graphe.

(3) Les séquences "inutiles" sont celles que l'on peut simplifier en effaçant deux occurrences d'un même point.

(4) Les auteurs titraient ici "ensemble de solutions" en désignant ainsi l'ensemble dans lequel ils cherchaient des solutions.

(5) Une piste possible pour une approche très générale du problème, consistant à combiner des lignes de 0 et de 1 ...

(6) L'idée est, semble-t-il, d'enrichir le jeu des commutations de base (clics sur un seul interrupteur) en se servant de solutions déjà trouvées pour des morceaux de configuration.

LOI DE LIONEL 1

Si n est n'importe quel nombre, $n \times 0 = 0$.

LOI DE CHARLOTTE 1

Si A et B sont n'importe quels nombres :

$$A + B = B + A$$

$$A \times B = B \times A$$

$$A - B \neq B - A$$

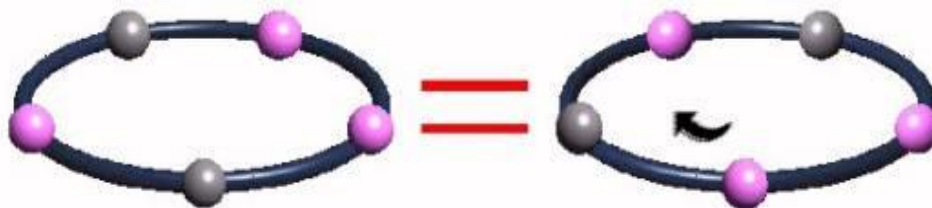
Colliers de perles

Année 2000-2001

Par des élèves des lycées Charles Poncet (Cluses, Haute-Savoie) et Camille Sée (Paris XV)
Encadrés par : Véronique Chauveau (Paris), Michel Lamarre, Marie-Josèphe Schmitt (Cluses)
Chercheuse : Caroline Japhet-Mounier (Institut Galilée, Villetaneuse).

Présentation du sujet

On dispose de n perles, chaque perle étant grise ou violette. Combien de colliers fermés circulaires différents peut-on constituer avec ces perles ? Les colliers ne différant que par une rotation sont considérés comme identiques. (1)



Ainsi ces deux colliers n'en font qu'un car il suffit de faire tourner l'un pour obtenir l'autre.

Par ailleurs, deux colliers symétriques seront considérés comme différents. (2)



Une fois ces conditions posées, quel est alors le nombre de colliers distincts réalisables, pour un nombre fixé n de perles ?

Si l'on prend l'exemple d'un collier de $n = 3$ perles, il nous est possible de réaliser 4 colliers différents :



Première approche de résolution

Soit S_n le nombre de colliers réalisables pour un collier de n perles.

Il n'est point commode de raisonner sur un collier circulaire, ainsi nous allons ouvrir le collier, le représenter par une ligne où s'enchaînent les différentes perles le constituant, et tenter de mettre en évidence les propriétés du collier pour procéder au dénombrement.

Quand on représente un collier de n perles en ligne, on constate que pour chaque perle on a le choix entre une perle violette ou grise.

Il en est ainsi pour les n perles, chacune d'elles nous offre 2 possibilités

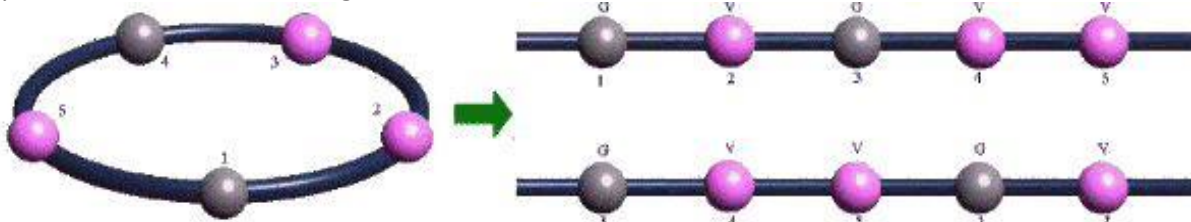
Image collier 2^n



On en déduit donc que *le nombre de colliers en ligne possible est 2^n* .

Ce nombre correspond-il aux différents colliers ronds réalisables ?

Si on considère ce collier et si on l'ouvre en 2 endroits différents, à savoir à la perle 1 puis à la perle 3, on obtient les 2 représentations du collier en ligne suivantes :



Ce contre-exemple met en évidence une redondance de colliers en ligne : plusieurs colliers en ligne peuvent correspondre au même collier rond. Le nombre S_n de colliers ronds n'est donc pas égal à 2^n .

Cette redondance est une entrave au calcul de S_n ,

Peut-on étudier les mécanismes de redondance ?

Quand on dispose de $n = 4$ perles, on peut réaliser 6 colliers et de nouveau, il se trouve qu'un collier rond a plusieurs représentations en ligne.



Les 3 colliers C2, C3 et C5 peuvent être désignés de 4 façons différentes alors que C6, ne peut l'être que de 2 manières.

La redondance de colliers en lignes semble, sur cet exemple, être irrégulière, et expérimentalement pour des valeurs quelconques de n , on constate que ces répétitions sont totalement anarchiques.

La redondance anarchique de colliers en ligne représente un obstacle sérieux à la résolution de notre problème. Nous utiliserons donc une méthode indirecte pour déterminer le nombre S_n . Nous construirons notre démonstration sur l'analyse des propriétés que possèdent les colliers.

Une méthode de résolution indirecte :

Reprenons l'exemple du cas où $n = 3$ perles.



Considérons tous les colliers qu'il nous est possible de réaliser et écrivons-les sur une 1^{ère} colonne.

Puis pour chaque collier, on décale la perle de départ et écrit le nom décalé ainsi obtenu.

$n = 3 \quad S_n = 4$		
1	2	3
nnn	nnn	nnn
bbb	bbb	bbb
bnn	nbn	nnb
bbn	nbb	bnb

On génère ainsi, dans le cas général, une table dont la 1^{ère} colonne contient les colliers solutions et dont les $n - 1$ autres contiennent les différentes appellations correspondantes après un décalage, noté k , de perles.

La table est, de par sa définition, constituée de S_n lignes et de n colonnes

Appelons T le nombre total de colliers écrits à l'intérieur : $T = n \times S_n$

Après avoir construit la table pour quelques valeurs expérimentales de n , un examen attentif révèle que certains colliers peuvent se répéter après un certain décalage de perles.

Par exemple pour $n = 6$ perles, tous les colliers marqués d'une couleur restent identiques après un certain décalage de perles.

1	2	3	4	5	6
nnnnnn	nnnnnn	nnnnnn	nnnnnn	nnnnnn	nnnnnn
bbbbbb	bbbbbb	bbbbbb	bbbbbb	bbbbbb	bbbbbb
bnnnnn	nbnnnn	nnbnnn	nnnbn	nnnnbn	nnnnnb
bbnnnn	nbbnnn	nnbbnn	nnnbbn	nnnnbb	bnnnnb
bnbnnn	nbnbn	nnbnbn	nnnbnb	bnnbn	nbnbnb
bbbnnn	nbbbnn	nnbbb	nnnbbb	bnnbbb	bnnnnb
bnnbnn	nbnbn	nnbnbn	bnnbnb	bnnbn	nbbnnb
bbnbn	nbbnbn	nnbbnb	bnnbbn	nbnbbb	bnnbnb
bbbnn	nbbb	nnbbb	bnnbbb	bnnbb	bbbnnb
bnbnbn	nbnbn	bnnbn	nbnbn	bnnbn	nbnbn
bnbbn	nbnbb	bnnbb	bnnbn	bbbnn	nbbnnb
bbnbb	nbbnb	bnnbb	bnnbb	nbbnb	bnnbb
bbbnn	nbbb	bnnbb	bnnbb	bnnbb	bbbnn

$$T = n \times S_n$$

Ainsi on parvient à montrer que notre table contient :

- tous les colliers qui restent identiques après un décalage de 1 perle, notés I_1 ,
- tous les colliers qui restent identiques après un décalage de 2 perles, notés I_2 ,
- ...
- tous les colliers qui restent identiques après un décalage de n perles, notés I_n .

Donc le nombre total de colliers écrits dans la table est :

$$T = n \times S_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n + \dots + I_p$$

Si l'on parvient alors à calculer les nombres I_n , T nous sera connu et notre solution S_n se calculera par division de T par n .

Au lieu de déterminer S_n directement, cherchons l'expression de I_n en étudiant les propriétés des colliers invariants après une décalage de k perles.

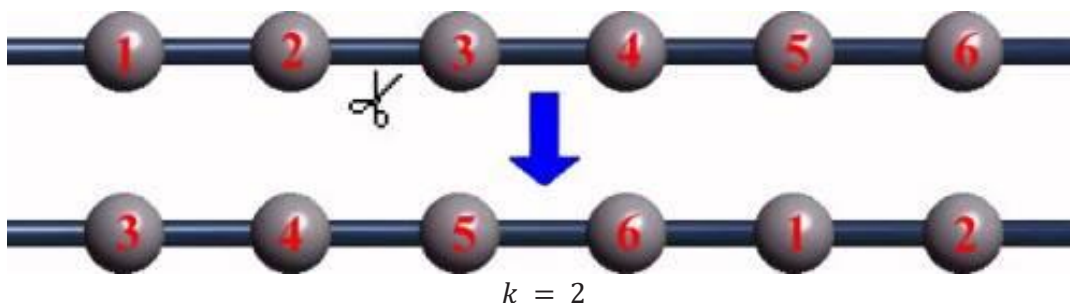
Etude de l'invariance des colliers

Concrètement, qu'est-ce que l'invariance ?

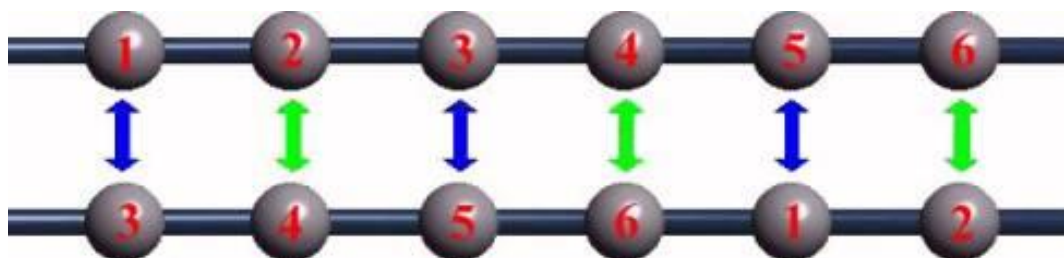
Posons $n = 6$

Si on part de la 1^{ère} perle, on obtient l'enchaînement de perles 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Si on part de la 3^{ème} perle, on obtient l'enchaînement de perles 3, 4, 5, 6, 1, 2.

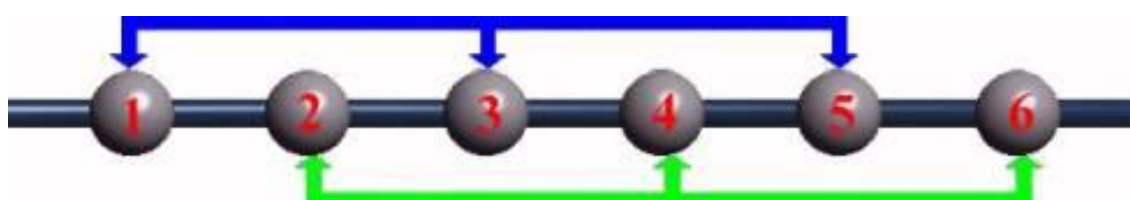


Ces deux colliers semblent identiques après décalage, donc leurs perles sont enchaînées de la même manière.



Les perles 1 et 3, 2 et 4, 3 et 5, etc. sont par conséquent deux à deux identiques, elles ont même couleur.

On en déduit sur cet exemple que les perles 1, 3 et 5 du collier ont nécessairement la même couleur, et de même pour les perles 2, 4, et 6. Sont définies deux relations élémentaires affectant à deux triplets de perles une même couleur.

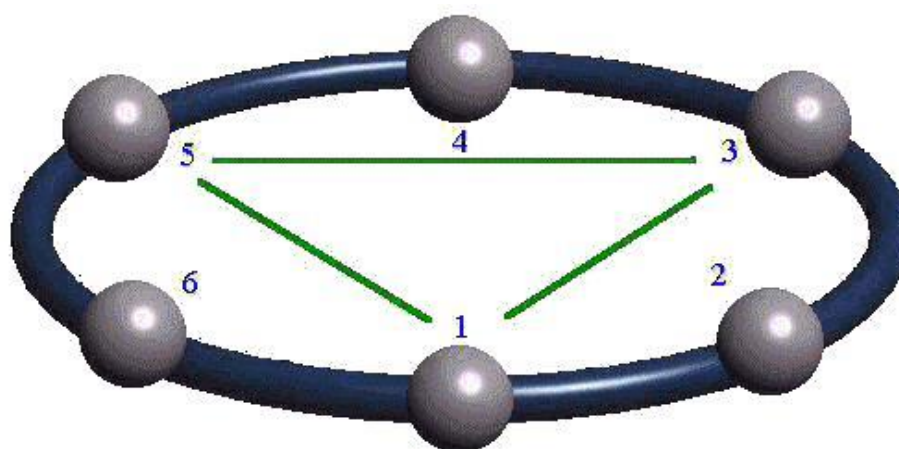


Nous utilisons le terme « relation élémentaire », car il se trouve que grâce à ces égalités de perles, notre collier de 6 perles peut être défini entièrement à partir d'un nombre minimal de 2 perles, les autres se déduisant de la correspondance de couleur entre perles.

Examinons une de ces relations et visualisons-la sur le collier rond.

Pour traduire le fait que 2 perles sont de même couleur, on décide de tracer un segment joignant l'une et l'autre.

Donc « 1, 3 et 5 de même couleur » se représente par un trait qui va de 1 à 3, un autre de 3 à 5 et un dernier de 5 à 1.



On remarque que chacun de ces segments joint les perles 2 en 2 ; ce n'est pas un hasard car $k = 2$.

Autant dire que les segments joignent les perles de k en k .

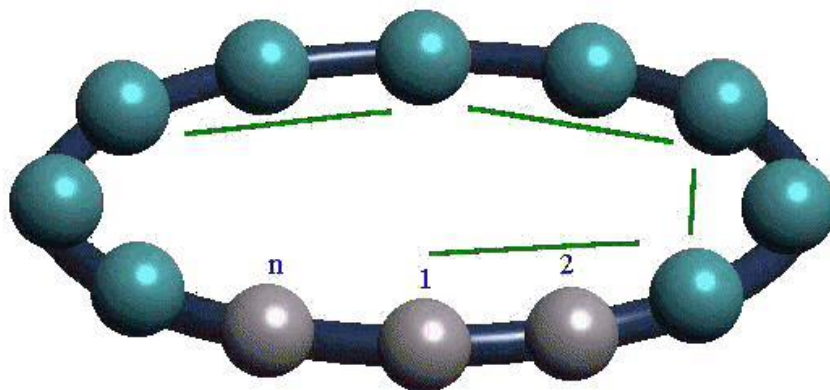
Ainsi notre méthode consiste, à partir d'une perle, à tracer des segments de k en k perles jusqu'à revenir à la perle de départ.

Quel est dans le cas général le nombre de perles liées entre elles, perles de même couleur ?

Dans le cas général, si on prend un nombre m à la fois multiple de n et de k , et si on le prend le plus petit possible, il se trouve que ce m peut s'interpréter de 2 façons différentes :

- m multiple de n : $m = a \times n$. Balayer m perles revient à balayer $a \times n$ perles, on peut considérer donc qu'on tourne a fois sur le cercle.
- m multiple de k : $m = b \times k$ on balaye k perles, puis k autres perles et ainsi de suite, b fois. C'est comme si on sautait de k en k perles b fois.

On peut matérialiser nos sauts par des segments entre la perle de départ et celle d'arrivée.



Ainsi le nombre m traduit le fait qu'on trace b segments en faisant a tours, avec a nombre minimal de tours puisque m est le plus petit multiple possible.

Au moyen de ce raisonnement, il va nous être aisé de calculer le nombre de perles qui ont même couleur dans une relation élémentaire, appelons P_k ce nombre.

On a vu que m était multiple de k et de n , et que m est le plus petit possible, on écrira donc $m = \text{PPCM}(k, n)$. (Tout à l'heure, avec le nombre m que nous nous étions fixé, m était le plus petit commun multiple de k et de n , on aurait très bien pu écrire $m = \text{PPCM}(k, n)$.)

De plus $m = b \times k$ et b est le nombre de segments tracés ; donc pour obtenir b , il nous suffit de prendre m et de le diviser par k donc le nombre de segments tracés, qui est aussi le nombre de perles liées entre elles (nombre que nous avons appelé P_k) se calcule donc grâce à cette formule :

$$P_k = \frac{\text{PPCM}(k, n)}{k}$$

Ainsi, pour chaque perle, on a P_k perles qui sont de même couleur, déterminons alors le nombre de relations élémentaires, nous appelons e_k ce nombre (« e » comme "élémentaire").

Puisqu'un collier comprend n perles, que chaque perle est mise en jeu dans une relation élémentaire et qu'il y a P_k relations élémentaires, il s'en déduit aisément e_k , nombre de perles intervenant dans chaque relation élémentaire :

$$e_k = \frac{n}{P_k}$$

En remplaçant dans cette formule le nombre P_k par ce qu'il vaut, nous obtenons l'expression suivante de e_k .

$$e_k = \frac{k \cdot n}{\text{PPCM}(k, n)}$$

Il se trouve que, considérant l'expression de e_k , une simplification peut être opérée.

Quand on multiplie 2 nombres quelconques, on obtient ainsi un produit ; et si l'on divise ce produit par le plus petit commun multiple des 2 nombres, on obtient ce qu'en arithmétique, on appelle le PGCD, à savoir le plus grand commun diviseur des nombres k et n .

Donc

$$e_k = \text{PGCD}(k, n)$$

Ainsi, pour un collier invariant après un décalage de k perles, sont définies e_k relations élémentaires qui lient des perles du collier entre elles. Pour déterminer entièrement un collier, il nous suffit de fixer e_k perles, les autres se déduisant des relations élémentaires.

Dénombrons alors les colliers qui ont la propriété d'être invariants après un décalage de k perles, nous appellerons I_k le nombre de ces colliers (« I » comme invariant, indice k pour ne pas oublier le fait que tout dépend de k).

Puisque sur les n perles, seulement e_k déterminent les colliers invariants en k , le nombre I_k est nécessairement égal au nombre de manières de créer un enchaînement de e_k perles, chaque perle pouvant prendre 2 couleurs.



Partant de ce raisonnement, on établit que :

$$I_k = 2^{e_k}$$

En remplaçant e_k par sa valeur, on obtient :

$$I_k = 2^{\text{PGCD}(k,n)}$$

Lorsqu'on réfléchit sur notre table, on remarque qu'il y a des colliers qui restaient invariants après un décalage de k perles :

[illegible]

Certains après un décalage de 1 perle, d'autres après un décalage de 2 perles, ... jusqu'à un décalage de n perles. Ainsi notre tableau contient tous les colliers invariants pour $k = 1$, il y en a I_1 , plus ceux qui sont invariants pour $k = 2$, soit I_2 , et ainsi de suite jusqu'aux colliers invariants pour $k = n$.

T (nombre de colliers total inscrits dans la table) est égal à $I_1 + I_2 + \dots + I_n$

Mais souvenons-nous que $T = n \times S_n$.

Nous sommes en mesure de calculer T au moyen de I_k, S_p nous est connu,

$$n.S_n = \sum_{k=1}^n 2^{\text{PGCD}(k,n)}$$

Car $I_k = 2^{\text{PGCD}(k,n)}$

Si n est un nombre premier, on vérifie facilement que le nombre S_n se simplifie et donne l'expression suivante.

$$S_n = \frac{2^n - 2}{n} + 2$$

Extension aux colliers dont les perles prennent un nombre quelconque de couleurs

Dans notre problème nous avons raisonné seulement sur 2 couleurs mais notre raisonnement peut être étendu à un nombre quelconque de couleurs et sur le même modèle.

On établirait que pour un nombre fixé C de couleurs alors les expressions de S_n seraient les suivantes :

Pour tout n , entier naturel :

$$S_n = \sum_{k=1}^n C^{\text{PGCD}(k,n)}$$

Lorsque n est premier :

$$S_n = \frac{C^n - C}{n} + C$$

Ainsi notre problème est résolu et nous sommes désormais en mesure de déterminer le nombre de colliers différents qu'il est possible de réaliser lorsque l'on dispose d'un nombre donné de perles, quand les perles peuvent prendre uniquement 2 couleurs, et même quand les perles peuvent prendre un nombre quelconque de couleurs.

Remarques sur nos résultats

On remarque à la vue de l'expression simplifiée de S_n , pour n premier, que puisque S_n représente un nombre de colliers, il est nécessairement entier, alors il en est de même pour $(C_n - C)/n$

Ce qui signifie que $C_n - C$ est divisible par n . L'explication de cette propriété est fournie par le petit théorème de Fermat, qui énonce la chose suivante :

Si p est un nombre premier, alors pour tout $a \in \mathbb{N}$, le nombre $a^p - a$ est divisible par p .

Dans notre résolution, nous n'avons pas considéré le cas où les colliers sont identiques par symétrie et rotation. La résolution du problème dans ce cas nécessite l'utilisation d'outils théoriques beaucoup plus complexes, et contrairement à ce qui précède elle ne donne pas de caractérisation numérique des solutions.

Il s'agit donc d'une résolution, très abstraite sur le plan théorique, qui fournit des résultats qualitatifs et non quantitatifs, telles sont les raisons qui nous ont conduit à ne pas approfondir notre propos.

Les applications pratiques de ce problème

De plus, il se trouve, si l'on fait abstraction des colliers de perles, que nos résultats peuvent avoir un intérêt et des applications dans des domaines variés.

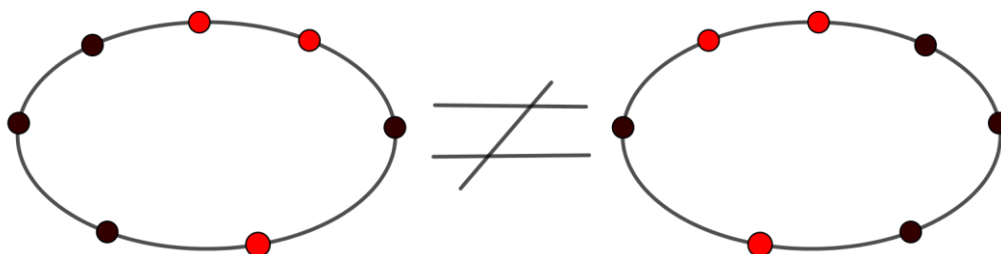
En résolvant ce problème nous avons été conduits à étudier l'invariance de colliers après un certain décalage de perles.

Plus généralement il arrive que l'on étudie l'invariance d'objets mathématiques après une transformation donnée. C'est notamment le cas en théorie des codes, et lorsqu'on analyse des transmissions d'informations par des signaux électriques, lumineux, sonores, etc.

D'où des applications multiples de nos résultats et de nos raisonnements.

NOTES D'ÉDITION

- (1) Illustration de l'énoncé : deux colliers seront considérés comme identiques s'ils ne diffèrent que par rotation.
- (2) L'exemple de deux colliers symétriques donné ici ne convient pas : les deux colliers sont bien symétriques mais se déduisent l'un de l'autre par une rotation, et sont donc identiques! Ci-dessous un exemple de deux colliers symétriques qui ne se déduisent pas l'un de l'autre par rotation.



LOI DE RÉMI 1

Si je multiplie 9, 90, 900, 9 000, 90 000, 900 000,... par n'importe quel nombre, la somme des chiffres du résultat fait 9 ou un nombre de la table de 9.

LOI DE RACHIDA ET HAYATE 1

$$9 \times 9 = 81$$

$$99 \times 99 = 9801$$

$$999 \times 999 = 998001$$

$$999999999 \times 999999999 = 999999998000000001$$

$$9 \dots\dots\dots 9 \times 9 \dots\dots\dots 9 = 9 \dots\dots\dots 980 \dots\dots\dots 01$$

$$N \quad N \quad N-1 \quad N-1$$

Les plus courts chemins sur le cube si la terre était cubique ?

Année 2001-2002

Julien Heyries, Mickaël, Xavier Terracol

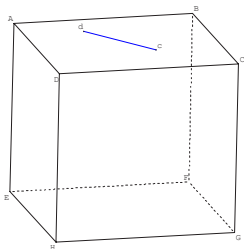
Encadrés par : Hubert Proal

Établissement : Lycée d'Altitude (Briançon)

Présentation du sujet

Notre travail de recherche a consisté à trouver les plus courts chemins entre deux points d'un cube et savoir s'ils étaient uniques.

Nous avons commencé par regarder les différents patrons du cube pour savoir lequel serait le plus judicieux pour représenter ces chemins.



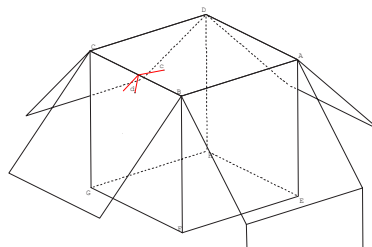
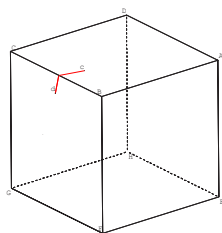
Les cas simples

Les deux points sont sur la même face alors un seul plus court chemin.

Les deux points sont sur deux faces mitoyennes : d et c

Deux cas de figure:

Cas n° 1 : d et c sont tous deux proches du côté commun [CB] alors un seul plus court chemin : le segment [dc]



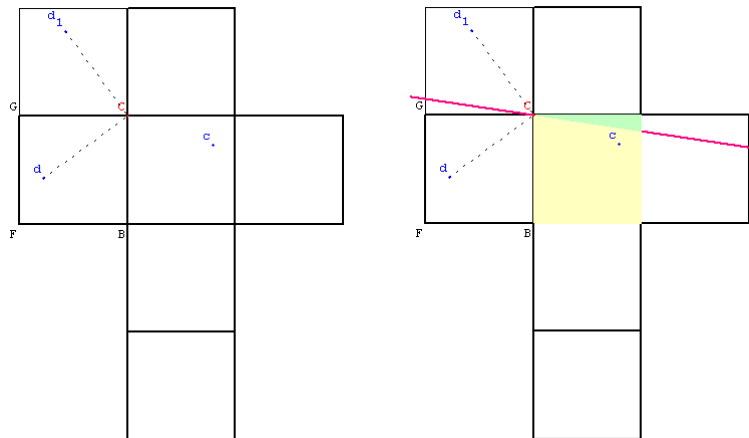
Cas n° 2 : d et c se rapprochent des arêtes non mitoyennes

Explications :

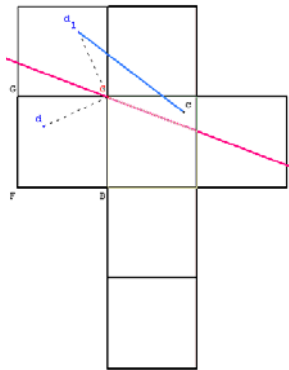
On effectue une rotation de centre C de la face CBFG d'angle -90° .

d_1 image de d dans la nouvelle face.

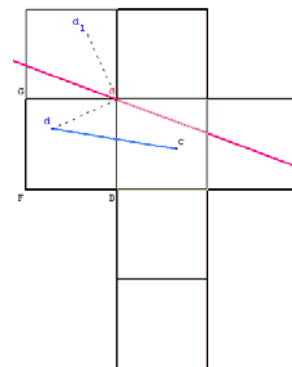
On trace la médiatrice de $[d d_1]$; on obtient deux zones :



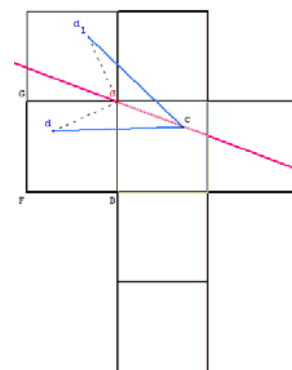
Si c est au-dessus de cette médiatrice, on utilise ce nouveau patron avec comme plus court chemin d_1c , chemin passant par trois faces.



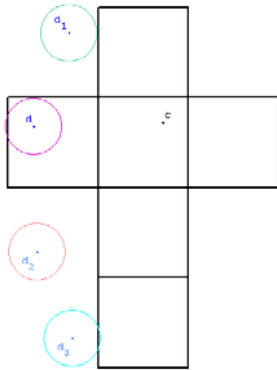
Si c est en dessous, on utilise l'ancien patron avant rotation ; le plus court chemin étant [cd].



Si c est sur la médiatrice, deux plus courts chemins $[cd]$ ou $[cd_1]$.



Étude plus générale



On considère un point d quelconque sur une face. On reporte cette face à différents endroits selon les patrons désirés ; on obtient ainsi plusieurs représentations de d .

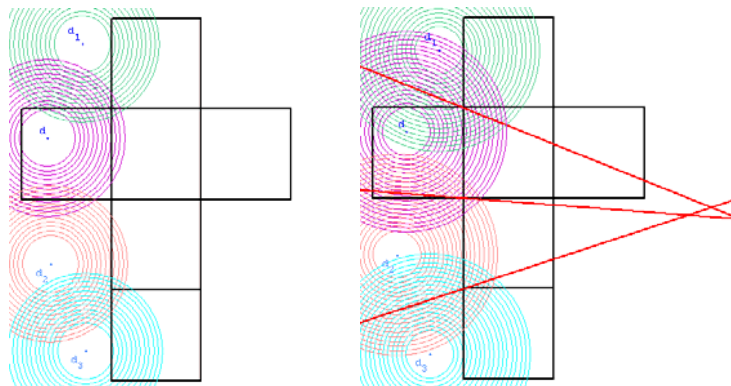
A partir de ces points, on trace des cercles de même rayon que l'on fait varier.

Lorsque le cercle de centre d sort du patron il suffit de considérer une autre disposition de celui-ci.

Maintenant si on place un point c sur le patron, quel cercle va-t-il rencontrer en premier ? Pour l'instant on ne peut pas y répondre mais on y reviendra plus tard.

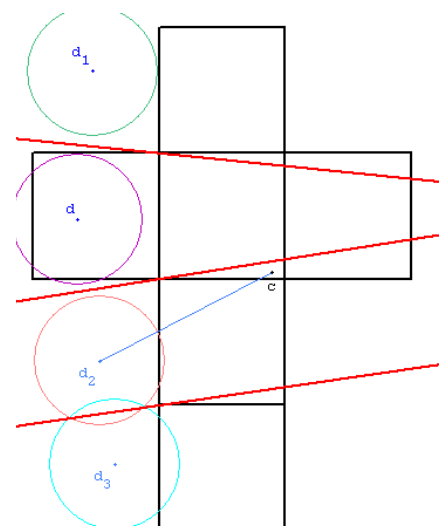
En revanche si c se situe à l'intersection de deux cercles, cela voudra dire qu'il y a 2 plus courts chemins.

Si on trace l'ensemble de ces intersections en continuant d'agrandir les cercles, on met en évidence la médiatrice vue précédemment.



On peut alors répondre à la question que l'on se posait. Il suffit de voir, avec le principe des médiatrices, à quelle zone prédominante le point c appartient; et l'on retrouve ainsi le plus court chemin et le meilleur patron.

Mais y a-t-il plus de deux plus courts chemins ? Pour le voir il faut procéder autrement !



Peut-on avoir plus de deux chemins les plus courts ?3 chemins les plus courts.

Nous pensions en avoir trouvé, mais lors du congrès on nous a fait remarquer que ce n'était pas des chemins les plus courts.

4 chemins les plus courts.

Pour obtenir la position des points pour que l'on ait quatre chemins les plus courts. Nous nous sommes dit qu'à une face correspondaient 4 arêtes ; si l'on positionnait les deux points au milieu de deux faces opposées, on obtiendrait quatre chemins de longueur égale.

5 chemins et plus.

Pour résoudre cette problématique, nous avons pensé que chaque face étant entourée de 4 arêtes ; il ne pouvait pas y avoir plus de 4 chemins les plus courts.

Ainsi, le problème était clos, nos recherches étaient arrivées à leur paroxysme, plus besoin de se coltiner les 3 pommes de terre et les deux croûtons de pains qui composaient le plat de résistance du self pour commencer à 13h afin d'assister à MATH.en.JEANS.

Mais malheureusement pour nous, nos collègues de Grenoble ont trouvé un cas de figure avec 6 chemins les plus courts. En effet, si l'on place les deux points sur deux sommets diamétralement opposés, on obtient 6 chemins les plus courts.

Nous n'avons pas trouvé de cas à 5 chemins, ni d'autres cas à 6 et encore moins à plus.

LOI DE JAMAL 2

Si n est n'importe quel nombre, $n - n = 0$.

LOI DE EMILIE 1

Il y a 39 façons d'écrire 10 avec des additions.

Le découpage de la France

Année 2002-2003

Clément Barbier et Damien Grangirard

Encadrés par : Martine Bargoin, Mariette Donnet, Cyril Fouquet et Sylvie Bouthors

Établissements : Collège Gérard Philippe et Collège des Explorateurs (Cergy Pontoise, 95)

Chercheur : Hervé Pajot, Université de Cergy Pontoise

Présentation du sujet

En 2050, le ministre de l'intérieur décide de faire un découpage de la France en départements. Pour simplifier son travail, il assimile la France à un hexagone régulier, chaque département doit avoir la forme d'un triangle, et il n'utilise que des diagonales pour faire le découpage. Pouvez-vous l'aider (1) ?

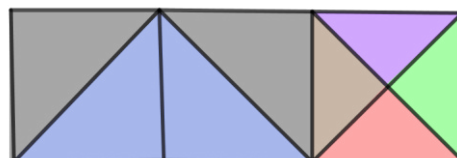
Nous avons commencé par étudier le carré, le pentagone puis l'hexagone (2) car la France peut être considérée comme telle.

Nous examinons tous les cas, suivant le nombre et la disposition des diagonales.

Nous ne retenons une figure comme **découpage possible** que si elle est solution de notre problème, c'est-à-dire **si toutes les régions formées sont des triangles**. Les triangles des figures-solutions sont colorés.

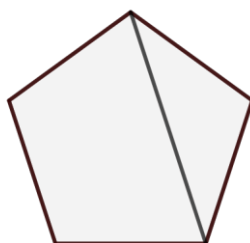
Carré

Il y a 2 possibilités avec 1 diagonale et 1 possibilité avec 2 diagonales.



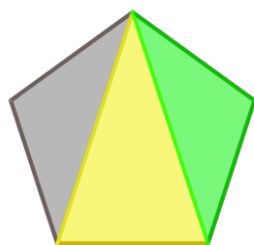
Pentagone

Avec 1 diagonale : c'est impossible car il restera toujours une figure (3) à 4 côtés



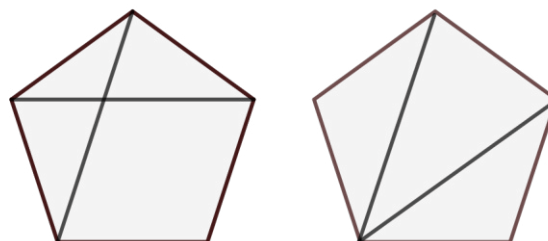
Avec 2 diagonales

-issues du même sommet



(4)

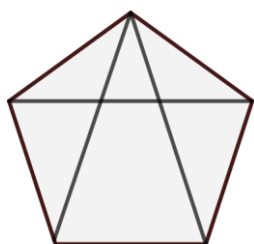
-issues de sommets différents on revient au cas précédent.(5)



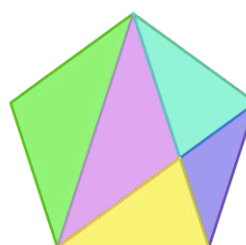
Avec 3 diagonales

-2 diagonales issues d'un même sommet et la 3ème diagonale d'un sommet consécutif (6)

Le résultat est impossible quand la deuxième extrémité atteint un sommet consécutif au premier.



Mais est possible dans l'autre cas.



(7)

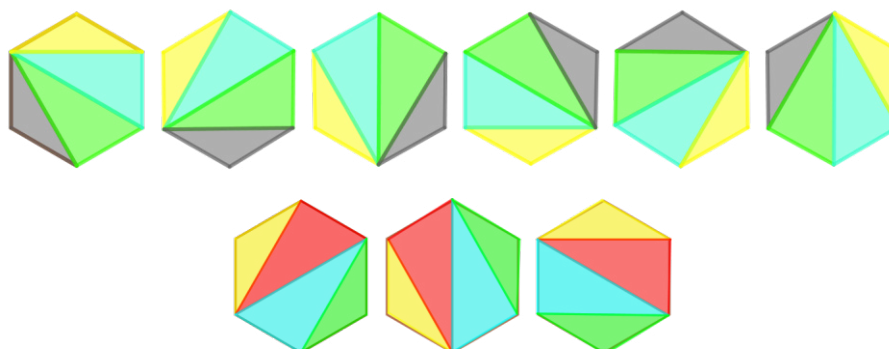
Avec 4 diagonales

Issues de 2 sommets consécutifs, c'est impossible (8).

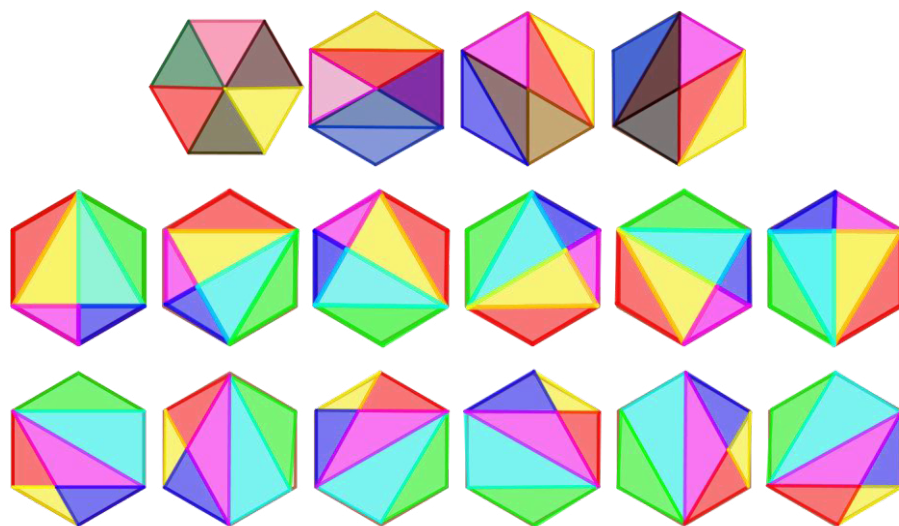
Hexagone

Voici le résultat de nos recherches (avec la même méthode). Nous avons classé les solutions par nombre de départements.

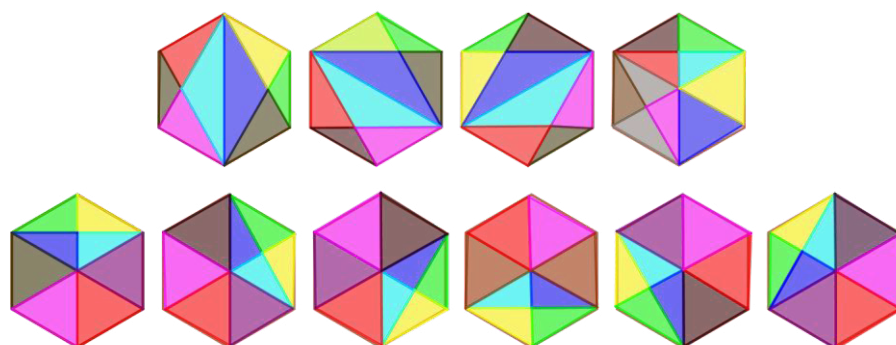
4 départements (9) :



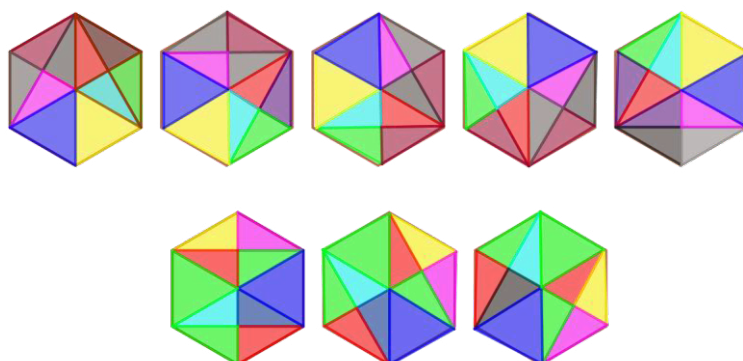
6 départements (10):



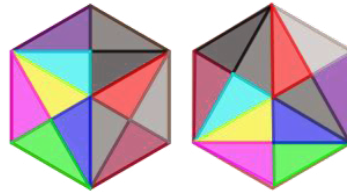
8 départements



10 départements

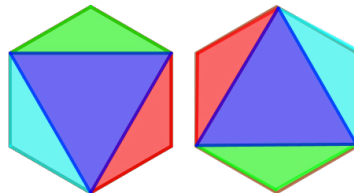


12 départements



NOTES D'ÉDITION

- (1) Ce problème (dans le cas général d'un polygone convexe) a été posé en 1751 par le très grand mathématicien suisse Leonard Euler (1707-1783) au mathématicien allemand Christian Goldbach.
- (2) Il s'agit ici d'un pentagone puis d'un hexagone réguliers.
- (3) Ici, une figure = une région
- (4) Cette figure donne lieu à 5 solutions différentes, suivant le choix du sommet initial.
- (5) En fait, soit cela est impossible soit on revient au cas précédent
- (6) Numérotions les sommets dans le sens des aiguilles d'une montre. Les auteurs fixent d'abord les diagonales 13 et 14 et tracent une troisième diagonale issue de 2, sommet consécutif à 1.
- (7) Cette figure donne lieu à 5 solutions différentes, suivant le sommet initial choisi, auxquelles il convient de rajouter les 5 solutions qui s'en déduisent par réflexion (symétrie axiale).
- (8) Et il n'y a pas d'autre cas à considérer
- (9) 3 autres solutions se déduisent par réflexion. Voici deux solutions supplémentaires, oubliées par les auteurs :



- (10) 6 autres solutions se déduisent de celles-ci par réflexion.

LOI D'ADRIEN 3

Si A et B sont des nombres différents de 0,
si $B > A$, on ne peut pas faire de division $A \div B$ qui tombe juste (dont le résultat n'a pas de virgule).

LOI DE LOU 3

Il y a 8 façons différentes d'écrire 15 avec une seule addition (sans utiliser de 0).

Il y a 18 façons différentes d'écrire 15 avec une addition et une multiplication (sans utiliser de 0).

ex : $2 \times 7 + 1$; $2 \times 6 + 3$; ...

Le Labyrinthe

Année 2003-2004

Hanaé Abou Walli, Laïla Barbach, Nour el Houdra Frarma, élèves de première S

Encadrés par : Dominique Guy et Mickaël Prado

Établissement : Lycée Romain Rolland (Argenteuil, 95)

Chercheur : Loïc Allys, Université du Mans

Présentation du sujet

Comment trouver son chemin dans un labyrinthe?

Bien sûr on ne dispose pas du plan du labyrinthe. On peut seulement marquer certains couloirs ou carrefours pour éviter de tourner en rond, avec des craies ou des petits cailloux.

1. Les recherches effectuées

Pour commencer, on a voulu mettre en avant l'aspect mathématique. C'est pour cela qu'on a choisi d'insérer les lettres *X*, *Y*, *Z* et *O* spécifiques d'une orientation :

X droite ; *Y* gauche ; *Z* tout droit ; *O* demi-tour.

Les points cardinaux. On a découvert qu'il était plus judicieux d'utiliser les points cardinaux. En effet suivant la position d'une personne la droite et la gauche diffèrent.

On a donc noté à l'aide des points cardinaux le chemin emprunté, et ce dans plusieurs labyrinthes, puis on a comparé les résultats. Nous avons vu que certaines périodes se répétaient et on a donc essayé de les supprimer.

Or ceci n'a pas marché.

Suite aux recherches vaines précédentes, nous sommes allés chercher d'autres pistes, dont la définition du labyrinthe, afin d'avoir plus d'informations sur celui-ci.

Par définition, dans un labyrinthe tous les murs sont reliés entre eux (1).

2. La solution

Ceci nous a poussés à nous dire que le mur d'entrée est relié au mur de la sortie.

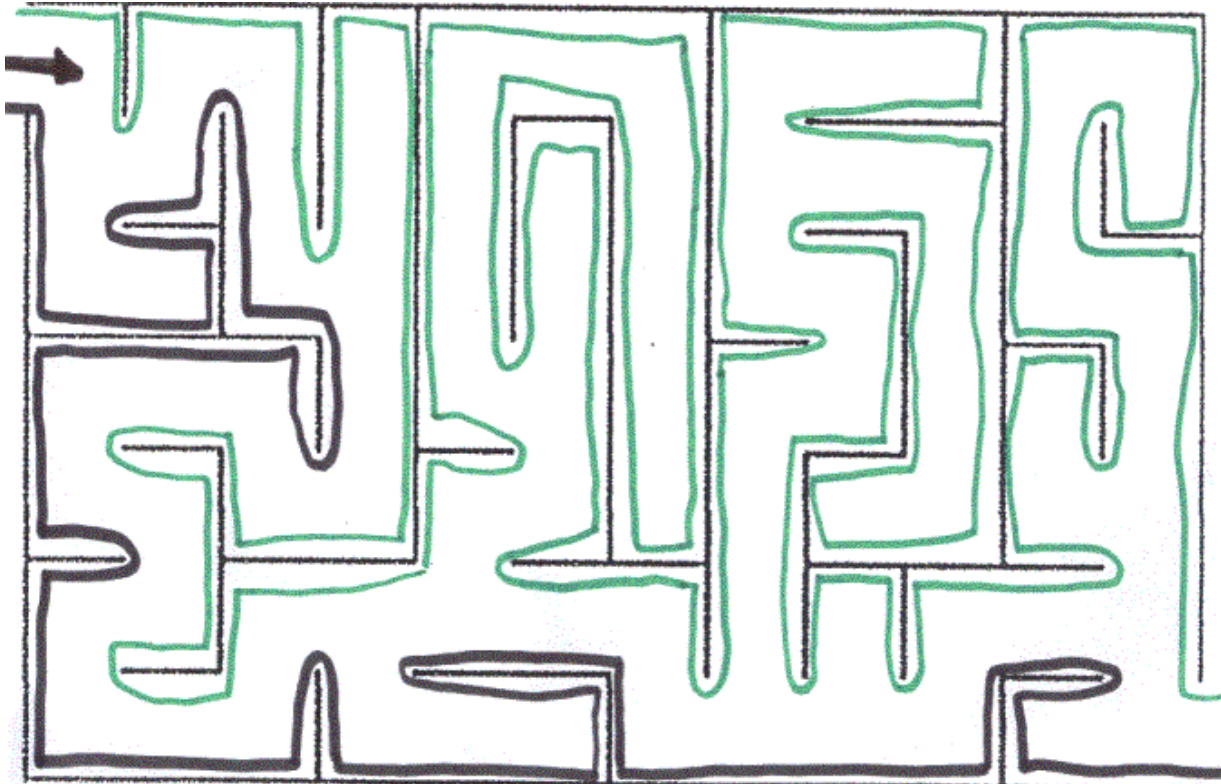
Nous avons donc suivi le mur se situant à notre **droite** pour voir s'il nous mène à la sortie. Ceci a marché.

Nous avons procédé de manière analogue pour le mur de **gauche** et avons également trouvé la sortie ainsi.

Nous avons étendu ce procédé à plusieurs labyrinthes.

Nous en avons conclu :

La solution (2) consiste à toujours suivre de la même main le mur droit, ou le mur gauche, à l'entrée du labyrinthe, celui-ci nous menant à la sortie.



3. La démonstration de la solution.

Nous allons donc vous démontrer notre solution mathématiquement par le biais du *raisonnement par l'absurde*

Raisonnement par l'absurde

Soit une propriété dont on désire montrer qu'elle est vraie.

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que cette propriété est fausse et à aboutir à une contradiction

Exemple de raisonnement par l'absurde.

On veut démontrer que 5 est impair, commençons par supposer que 5 est pair

Supposons que 5 est pair.

Soit n un nombre entier naturel non nul. Si 5 est pair alors on peut l'écrire $2n$.

Donc $2n = 5$. D'où $n = 2,5$.

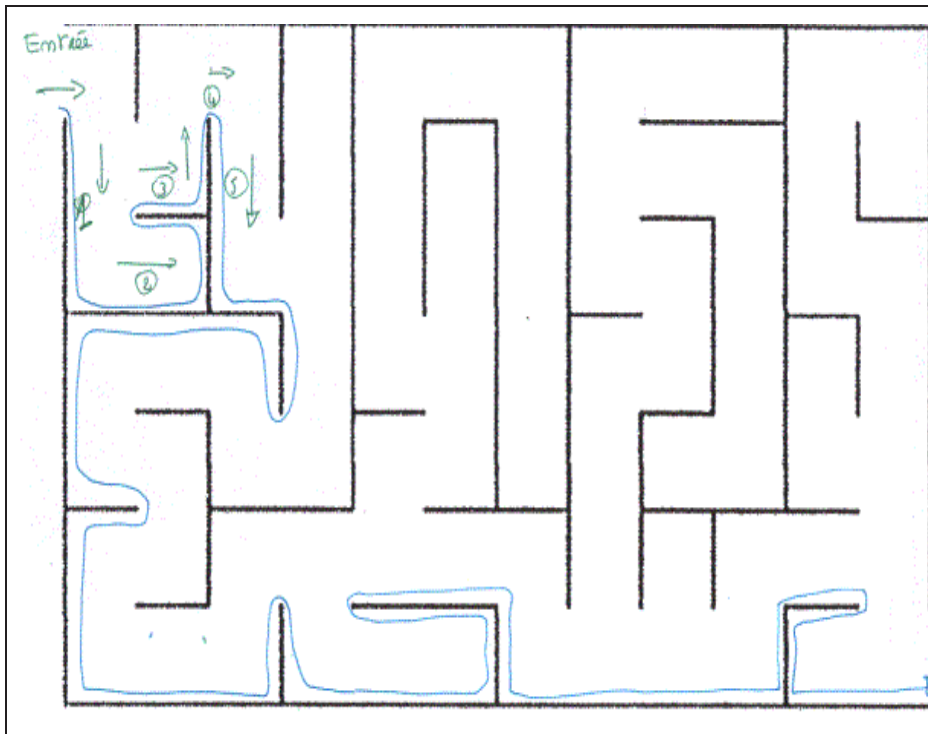
Or 2,5 n'est pas un nombre entier naturel non nul. Notre hypothèse de départ est donc absurde.

On en conclut donc que 5 n'est pas pair mais impair !

On s'est rendu compte que notre solution est valable car on ne passe pas par le même chemin deux fois dans le même sens.

Démonstration de notre solution avec le raisonnement par l'absurde

On veut démontrer qu'on ne peut pas passer deux fois dans le même sens dans le même couloir.
On suppose donc que l'on peut passer deux fois dans un même couloir dans le même sens.



On commence par numéroté les couloirs par lesquels on est passé.

On remarque que par exemple si on repasse par le chemin numéro 5 dans le même sens cela signifie que l'on est déjà passé par le chemin numéro 4 et ainsi par tous les chemins précédents c'est-à-dire 3, 2, 1 et donc l'entrée.

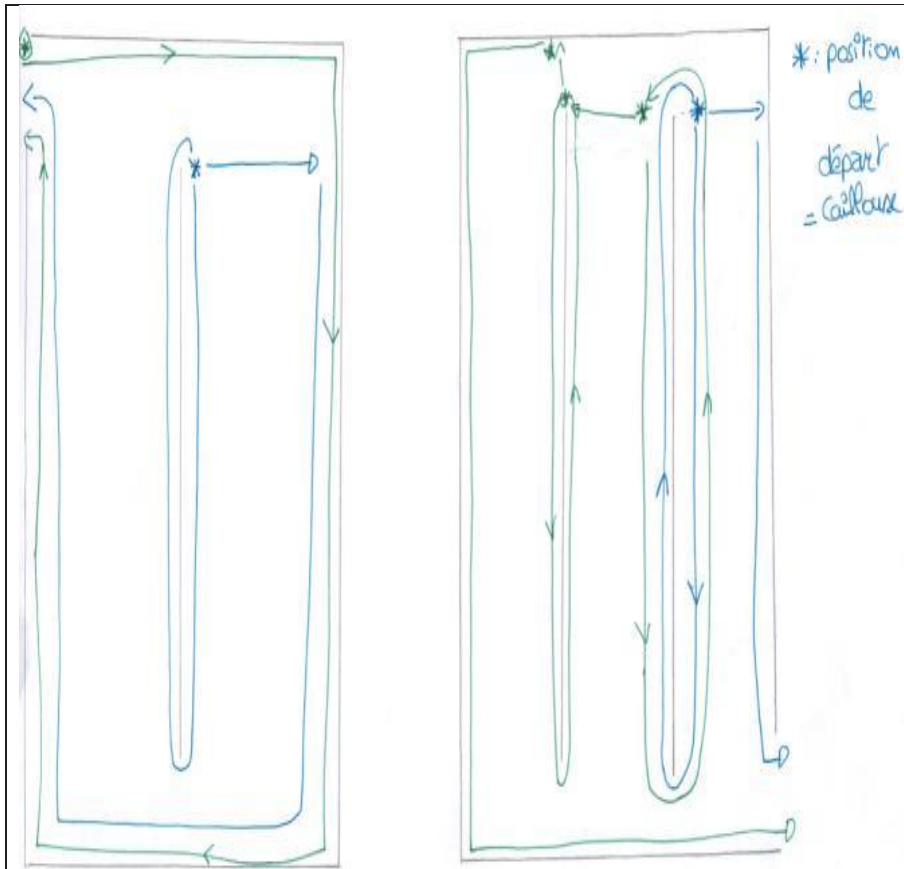
Or l'entrée étant à l'extérieur du labyrinthe cela signifie qu'on est déjà sorti et donc l'hypothèse de départ est absurde

Donc on ne peut pas passer dans le même chemin deux fois dans le même sens.

Ainsi notre solution concernant le fait de trouver la sortie dans un labyrinthe sans disposer du plan de celui-ci est donc valable.

4. Autres labyrinthes.

Il existe un certain type de labyrinthes, où tous les murs ne sont pas reliés entre eux. Pour ce cas, notre solution marchera si on est à l'extérieur du labyrinthe au départ.



Par contre si au départ on est au milieu du labyrinthe, il suffit de poser des cailloux pour déterminer sa position de départ.

Ainsi, si on se rend compte que l'on est revenu à notre position de départ, on change de mur. Il faut poser un caillou à chaque nouveau mur pour éviter d'emprunter des murs par lesquels on est déjà passé.

En procédant ainsi nous finissons par trouver le mur relié à la sortie et ainsi la sortie !!!

NOTES D'ÉDITION

(1) Ce n'est pas vraiment la définition ; on suppose que tous les murs sont reliés entre eux pour les paragraphes 2 et 3, mais au 4 les autres cas seront étudiés.

(2) Ce n'est pas la seule solution : il faudrait dire "Une" solution, ou bien "Notre" solution...

LOI DE ANTOINE 5

Si n est n'importe quel nombre, $n \div 1 = N$.

LOI DE HANANE 2

Une égalité est une relation entre deux nombres. Une opération est une relation entre trois nombres.

Relations à 2 nombres Relations à 3 nombres

$$a = b$$

$$a < b$$

$$a > b$$

$$a = b$$

$$a + b = c$$

$$a - b = c$$

$$a \times b = c$$

$$a \div b = c$$

La stratégie des allumettes

Année 2004-2005

Alexandre Mothe, Laurent Orban, Elodie Privat, Sylvain Rocher, Laurent Thouy

Encadrés par : Bernard Privat, Catherine Ranson, Yves Serrat

Établissements : Lycées Fernand Daguin à Mérignac (Gironde) et Pape Clément à Pessac (Gironde)

Chercheur : Eric Sopena (LaBRI, Université Bordeaux I Talence)

Présentation du sujet

Il existe de nombreux jeux d'allumettes et celui qui nous intéresse est le suivant.

- Deux joueurs disposent d'un tas de 50 allumettes et retirent à tour de rôle un certain nombre d'allumettes.
- Le premier joueur peut retirer **une** ou **deux** allumettes.
- Lorsqu'un joueur a retiré n allumettes, son adversaire peut en retirer au maximum $2n$ (1).
- Le joueur qui doit retirer la dernière allumette est déclaré perdant.

Problème posé : existe-t-il une stratégie gagnante pour le premier joueur ? Pour le second ? Et si oui laquelle ?

A. Avec un tas de 50 allumettes

A.I. Approche du problème

Illustration :

Tas initial : 50 allumettes. Coups successifs :

Le joueur n°1 peut en retirer 1 ou 2. Il en retire 2.

Le joueur n°2 peut en retirer jusqu'à 4. Il en retire 3.

Le joueur n°1 peut en retirer jusqu'à 6. Il en retire 1.

Le joueur n°2 peut en retirer jusqu'à 2.

Et ainsi de suite.

Couples

Nous avons modélisé toutes les situations possibles de jeu par des couples (a, n) où a est le nombre d'allumettes restantes et n le nombre d'allumettes retirées au coup précédent. Une partie est alors modélisée par une suite de couples. Exemple. En reprenant l'exemple précédent et en utilisant les couples, nous obtenons :

$(50,1)$ $(48,2)$ $(45,3)$ $(44,1)$ etc.

Les positions gagnantes (2).

- Une position est gagnante s'il existe un coup qui envoie l'adversaire dans une position perdante.
- Une position est perdante si tous les coups envoient l'adversaire dans une position gagnante.
- Toutes les positions $(1, n)$ sont perdantes : en effet le tas en question ne contient qu'une seule allumette, le joueur qui doit jouer a donc perdu.

Liste des positions gagnantes jusqu'à 50 allumettes.

Nous avons établi à la main la liste des positions gagnantes jusqu'à 50 allumettes.

	(On a naturellement établi cette liste en commençant par le bas !)
Si un couple (a, n) est gagnant, tous les couples de la forme (a, n') avec $n' > n$ sont gagnants car on pourra toujours retirer le nombre d'allumettes nécessaire pour gagner.	(50,1)G2 (49,1)G1 $(48,1)P (48,2)P (48,3)P (48,4)P (48,5)P (48,6)P \dots$ (48,7)G13 (47,1)G1 $(46,1)P$ (46,2)G3 (45,1)G2 (44,1)G1 $(43,1)P (43,2)P (43,3)P \dots$ (43,4)G8 (42,1)G2 (41,1)G1 $(40,1)P (40,2)P \dots$ (40,3)G5 (39,1)G1 $(38,1)P$ (38,2)G3 (37,1)G2 (36,1)G1 $(35,1)P (35,2)P (35,3)P (35,4)P (35,5)P (35,6)P (35,7)P (35,8)P (35,9)P (35,10)P \dots$ (35,17)G34 (34,1)G1 $(33,1)P \dots$ (33,2)G3 (32,1)G2 (31,1)G1 $(30,1)P (30,2)P (30,3)P \dots$ (30,4)G8 (29,1)G2 (28,1)G1 $(27,1)P (27,2)P \dots$ (27,3)G5 (26,1)G1 $(25,1)P \dots$ (25,2)G3 (24,1)G2 (23,1)G1 $(22,1)P (22,2)P (22,3)P (22,4)P (22,5)P (22,6)P (22,7)P (22,8)P (22,9)P (22,10)P \dots$ (22,11)G21 (21,1)G2 (20,1)G1 $(19,1)P (19,2)P \dots$ (19,3)G5 (18,1)G1 $(17,1)P$ (17,2)G3 (16,1)G2 (15,1)G1 $(14,1)P (14,2)P (14,3)P (14,4)P (14,5)P (14,6)P$ (14,7)G13 (13,1)G1 $(12,1)P \dots$ (12,2)G3 (11,1)G2 (10,1)G1 $(9,1)P (9,2)P (9,3)P \dots$ (9,4)G8 (8,1)G2 (7,1)G1 $(6,1)P (6,2)P \dots$ (6,3)G5 (5,1)G1 $(4,1)P \dots$ (4,2)G3 (3,1)G2 (2,1)G1 $(1,n)P$
Ainsi, pour chaque valeur de a , nous cherchons à déterminer le plus petit n pour lequel le couple (a, n) est gagnant.	
Nous noterons :	
$(a, n)Gi$ le fait que le couple (a, n) est gagnant et qu'il faut retirer i allumette(s) pour gagner ;	
et $(a, n)P$ le fait que (a, n) est perdant.	
Exemples :	
On a $(4,1)P$ car $(3,1)$ et $(2,2)$ sont gagnantes.	
On a $(4,2)G3$ donc $(4,3)G3 (4,4)G3 \dots$	

A.II. Observations des résultats et premières conjectures

Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci (F_n) est définie par :

$F_1 = 1, F_2 = 2$ et pour tout entier $n > 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Les premiers termes de la suite sont donc : $F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13, F_7 = 21$, etc.

Nous nous sommes intéressés au nombre d'allumette(s) à retirer pour chaque position gagnante. Nous avons remarqué que tous les nombres de cette liste sont des nombres de la suite de Fibonacci.

Voici les nombres d'allumettes successifs à retirer pour gagner, si on le peut, jusqu'à 55 allumettes (qui est le premier nombre de la suite de Fibonacci supérieur ou égal à 50).

1 2 3 1 5 1 2 8 1 2 3 1 13 1 2 3 1 5 1 2 21 1 2 3 1 5 1 2 8 1 2 3 1 34 1 2 3 1 5 1 2 8 1 2 3 1 13 1 2 3 1 5 1 2 55... (3)

Obtention de la suite gagnante

La question est maintenant de savoir comment construire la suite des nombres d'allumettes à retirer.

- On commence tout d'abord par écrire les premiers nombres de la suite de Fibonacci : 1 2 3 5 8 13 21 34...
- Puis, lorsqu'un nombre A est supérieur ou égal à 3, on calcule le quotient entier du nombre A divisé par 2 ($A \text{ div } 2 = Q$) et on inscrit à la suite de A les termes de la suite que l'on est en train de construire (4).

1 2 3 1 5	(3 div 2 = 1, on insère 1 nombre de la suite)
1 2 3 1 5 1 2 8	(5 div 2 = 2, on insère 2 nombres de la suite)
1 2 3 1 5 1 2 8 1 2 3 1 13	(8 div 2 = 4, on insère 4 nombres de la suite)
1 2 3 1 5 1 2 8 1 2 3 1 13 1 2 3 1 5 1 2 21	(13 div 2 = 6, on insère 6 nombres de la suite) et (5 div 2 = 2, on insère 2 nombres de la suite)
etc.	

(5)

A.III. Justifications

Voici pour mémoire la liste des premiers termes de la suite de Fibonacci qu'on a appelés plus simplement nombres de Fibonacci : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987.

On a observé que chaque nombre entier pouvait s'écrire comme une somme de nombres de Fibonacci :

$2 = 1 + F_1 (=F_2)$	$17 = 1 + F_6 + F_3$
$3 = 1 + F_2 (=F_3)$	$18 = 1 + F_6 + F_3 + F_1$
$4 = 1 + F_3$	$19 = 1 + F_6 + F_4$
$5 = 1 + F_3 + F_1 (=F_4)$	$20 = 1 + F_6 + F_4 + F_1$
$6 = 1 + F_4$	$21 = 1 + F_6 + F_4 + F_2 (=F_7)$
$7 = 1 + F_4 + F_1$	$22 = 1 + F_7$
$8 = 1 + F_4 + F_2 (=F_5)$	$23 = 1 + F_7 + F_1$
$9 = 1 + F_5$	$24 = 1 + F_7 + F_2$
$10 = 1 + F_5 + F_1$	$25 = 1 + F_7 + F_3$
$11 = 1 + F_5 + F_2$	$26 = 1 + F_7 + F_3 + F_1$
$12 = 1 + F_5 + F_3$	$27 = 1 + F_7 + F_4$
$13 = 1 + F_5 + F_3 + F_1 (=F_6)$	$28 = 1 + F_7 + F_4 + F_1$
$14 = 1 + F_6$	$29 = 1 + F_7 + F_4 + F_2$
$15 = 1 + F_6 + F_1$	$30 = 1 + F_7 + F_5$
$16 = 1 + F_6 + F_2$	$31 = 1 + F_7 + F_5 + F_1$

Lemme préliminaire : Soit p un entier naturel, $p \geq 3$. Alors $2F_{p-1} > F_p > 2F_{p-2} \geq 2F_i$ pour $i \leq p - 2$.

Preuve :

a) $F_p = F_{p-1} + F_{p-2} = F_{p-2} + F_{p-3} + F_{p-2} = 2F_{p-2} + F_{p-3}$. Comme $F_{p-3} > 0$, $F_p > 2F_{p-2}$. De plus, la suite (F_n) étant croissante, pour tout $i \leq p - 2$, on a $F_{p-2} \geq F_i$ donc $2F_{p-2} \geq 2F_i$.

b) $F_p - F_{p-1} = F_{p-2} < F_{p-1}$ car la suite (F_n) est strictement croissante. Donc $F_p < 2F_{p-1}$.

Lemme : Tout entier naturel $a \geq 2$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $a = 1 + F_{p_1} + F_{p_2} + \dots + F_{p_k}$ où $k \geq 1$ et où $F_{p_1}, F_{p_2}, \dots, F_{p_k}$ sont des nombres de la suite de Fibonacci avec pour tout $i > 1$, $p_i \leq p_{i-1} - 2$.

Démonstration : on démontre d'abord l'existence de la décomposition, par récurrence.

Cette propriété est vraie pour $a = 2$ ($F_2 = 1 + F_1$). Supposons qu'elle soit vraie jusqu'à a . Considérons $a + 1$: soit F_{p_1} le plus grand nombre de Fibonacci inférieur ou égal à a : $F_{p_1} \leq a < F_{p_1+1}$;

$$a + 1 = 1 + F_{p_1} + R \quad (R = \text{le reste} = a - F_{p_1}) ;$$

Si $R = 0$, $a + 1 = 1 + F_{p_1}$, c'est terminé, la propriété est vérifiée.

Sinon $R \geq 1$ et F_{p_1} est le plus grand nombre de Fibonacci strictement inférieur à a : $F_{p_1} < a < F_{p_1+1}$;

$$a + 1 = 1 + F_{p_1} + R = F_{p_1} + R + 1.$$

On a $R + 1 \geq 2$. D'autre part $R < F_{p_1+1} - F_{p_1} = F_{p_1-1}$ donc $R < a$. Donc $R + 1 \leq a$.

On peut appliquer à $R + 1$ l'hypothèse de récurrence : $R + 1 = 1 + F_{p_2} + F_{p_3} + \dots + F_{p_k}$, où F_{p_2} est le plus grand nombre de Fibonacci $\leq R$ et on a les conditions sur les indices $p_2, p_3, \dots : p_3 \leq p_2 - 2, \dots, p_k \leq p_{k-1} - 2$.

$$\text{Alors } a + 1 = F_{p_1} + 1 + F_{p_2} + F_{p_3} + \dots + F_{p_k} = 1 + F_{p_1} + F_{p_2} + F_{p_3} + \dots + F_{p_k}.$$

On a F_{p_1} qui est le plus grand nombre de Fibonacci $\leq a$, F_{p_2} qui est le plus grand nombre de Fibonacci $\leq R$; les nombres $p_2, p_3, \dots$ vérifient les conditions sur les indices. On n'a plus qu'à s'assurer que $p_2 \leq p_1 - 2$.

Comme $F_{p_2} \leq R < F_{p_1-1}$, on en déduit $p_2 < p_1 - 1$, donc $p_2 \leq p_1 - 2$. CQFD.

En ce qui concerne l'unicité, nous n'en exposons pas la preuve en détail pour ne pas lasser le lecteur. Nous en donnons simplement le principe: nous avons montré par récurrence qu'un autre choix de nombres de Fibonacci que celui inférieur ou égal à a ne pouvait aboutir à une autre décomposition que celle attendue (les nombres de Fibonacci ne se suivant pas de 2 en 2 au minimum) (6).

Cela est dû à la propriété $2F_{p_1-1} > F_{p_1}$

(par exemple : $29 = 1 + F_7 + F_4 + F_2 = 1 + 2F_6 + F_2$ qui ne convient pas ; autre exemple : $30 = 1 + F_7 + F_5 = 1 + 2F_6 + F_3$).

Théorème. Si a désigne le nombre d'allumettes ($a \geq 2$), a s'écrit $1 + F_{p_1} + F_{p_2} + \dots + F_{p_k}$ avec les conditions déjà énoncées dans le lemme précédent. La position (a, n) est gagnante si on peut retirer F_{p_k} allumettes, c'est-à-dire si $F_{p_k} \leq 2n$, et perdante sinon.

Preuve de : « La position (a, n) est gagnante si on retire F_{p_k} allumettes ».

Par récurrence sur le nombre a : vrai pour $a = 2$ ($2 = 1 + F_1$, et on gagne en retirant $F_1 = 1$ allumette).

Supposons que la propriété soit vraie pour $a \geq 2$ et pour les nombres ≥ 2 qui précèdent a . Montrons qu'elle est vraie pour $a + 1$. Reprenons les mêmes notations que dans la démonstration précédente :

$$a + 1 = 1 + F_{p_1} + R \text{ où } F_{p_1} \text{ est le plus grand nombre de Fibonacci } \leq a.$$

Si $R = 0$, $a + 1 = 1 + F_{p_1}$; $(a + 1, n)$ est une position gagnante si on enlève F_{p_1} allumettes car on passe alors à la position $(1, F_{p_1})$ qui est perdante (on sait d'après la règle du jeu que toutes les positions $(1, n)$ sont perdantes).

Sinon, $a + 1 = 1 + F_{p_1} + F_{p_2} + \dots + F_{p_k}$.

Si on enlève F_{p_k} on obtient $1 + F_{p_1} + F_{p_2} + \dots + F_{p_{k-1}}$ qui est $\leq a$; pour gagner, d'après l'hypothèse de récurrence, il faudrait enlever $F_{p_{k-1}}$.

Or le maximum qu'on puisse enlever d'après la règle du jeu est $2F_{p_k}$ et, d'après le lemme préliminaire, comme $p_k \leq p_{k-1} - 2$ on a $F_{p_{k-1}} > 2F_{p_k}$.

Il n'y a donc pas assez d'allumettes pour gagner ; le retrait de F_{p_k} allumettes avec $(a + 1)$ allumettes met l'adversaire en position perdante (7) ; donc $(a + 1, n)$ est gagnante avec F_{p_k} .

Preuve de « La position (a, n) est perdante si on retire moins de F_{p_k} allumettes ».

Par hypothèse a s'écrit $1 + F_{p_1} + F_{p_2} + \dots + F_{p_k}$ avec les conditions sur les indices.

On enlève m allumettes avec $m < F_{p_k}$.

Alors $a - m = 1 + 1 + F_{p_1} + F_{p_2} + \dots + F_{p_{k-1}} + (F_{p_k} - m)$. Or $F_{p_k} - m$ s'écrit $F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_j}$ avec 2 d'écart au minimum entre F_{k_i} et $F_{k_{i+1}}$ (8).

Évidemment $F_{p_k} - (F_{p_k} - m) = m$, d'où $F_{p_k} = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_j} + m$. Il en résulte que $m \geq F_{k_{j-1}}$, car sinon $F_{k_j} + m < F_{k_{j+1}} \leq F_{k_{j-1}-1}, \dots$, et on voit par récurrence que la somme de droite serait strictement inférieure à F_{p_k} .

Pour "faire tomber" F_{k_j} , il faut que $2m$ soit supérieur ou égal à F_{k_j} . Or d'après le lemme préliminaire on a $2F_{k_{j-1}} > F_{k_j}$, d'où $2m \geq 2F_{k_{j-1}} > F_{k_j}$.

L'adversaire est dans la position $(a - m, m)$ qui est gagnante avec F_{k_j} (car F_{k_j} est le plus petit Fibonacci de la décomposition de $(a - m)$ et il peut le faire car $F_{k_j} < 2m$). Donc la position (a, n) est perdante avec m allumettes retirées, $m \leq 2n < F_{p_k}$. CQFD.

Corollaire : Pour le jeu avec a allumettes au départ ($a \geq 2$) le joueur qui commence a une stratégie gagnante si et seulement si la décomposition de a se termine par F_1 ou F_2 (c'est-à-dire 1 ou 2).

Conclusion : Pour un tas de 50 allumettes, la stratégie gagnante pour le joueur qui commence est de retirer 2 allumettes car la décomposition de 50 se termine par 2.

$$50 = 34 + 16 = 34 + 1 + 13 + 2 = 1 + 34 + 13 + 2 = 1 + F_8 + F_6 + F_2$$

B. Variantes

Dans un premier temps, nous avons voulu automatiser le processus pour étudier le problème au-delà de 50 allumettes puis nous avons changé le nombre de tas (2 tas de 50 allumettes) et cherché une stratégie gagnante en ne retirant que dans un seul tas à son tour de jouer. Enfin, en revenant à un seul tas d'allumettes, nous avons cherché une stratégie gagnante pour une règle de jeu différente.

B.I. Au-delà de 50 allumettes

Les programmes

Ils sont basés sur les observations faites qui ont été démontrées par la suite.

Un programme sur ordinateur en Turbopascal : ce programme crée un premier tableau de nombres de Fibonacci et insère un bout de tableau de nombres de Fibonacci dans les cases laissées libres du tableau précédent. Ce programme fournit le nombre d'allumettes à retirer pour gagner avec un nombre d'allumettes inférieur ou égal à 10 950. Voir le texte du programme en Annexe 1

Un programme sur TI 83+ : le concepteur du programme a repéré la répétition de la suite des nombres de Fibonacci dans le tableau des nombres d'allumettes à retirer pour être en position gagnante, son programme teste quand le (nombre d'allumettes -1) est entre deux nombres de Fibonacci puis il revient à une ligne antérieure et peut donc donner le nombre d'allumettes à jouer (qui est toujours un nombre de Fibonacci) (9).

B.II. Deux tas de 50 allumettes

Observations

Nous nous sommes ensuite intéressés à une éventuelle stratégie gagnante sur deux tas de 50 allumettes. Chaque joueur retire à son tour les allumettes dans un même -seul des deux tas, qu'il est libre de choisir. Comme pour le jeu avec un seul tas, nous avons modélisé les différentes positions de jeu par des triplets. Pour les écrire :

- nous avons bloqué un paramètre du triplet (le nombre d'allumettes dans le 1^{er} tas) ;
- puis nous avons fait varier le nombre d'allumettes dans le 2^{ème} tas (dans les lignes) jusqu'à ce qu'il y ait autant d'allumettes dans chaque tas ;
- enfin le nombre d'allumettes retirées le coup précédent (dans les colonnes) jusqu'au nombre minimum nécessaire pour vider un tas entièrement.

Comment les lire ?

(a, b, n) a est le nombre d'allumettes dans le premier tas
 b est le nombre d'allumettes dans le second tas
 n est le nombre d'allumettes retirées le coup précédent.

La lettre en gras (qui suit un triplet) indique la position gagnante (**G**) ou perdante (**P**).

Le chiffre en italique (qui suit la lettre indique une possibilité de nombre d'allumette(s) à retirer pour gagner, avec le tas précisé par la lettre correspondante A ou B .

Cette écriture implique très vite de nombreux triplets pour chaque allumette en plus dans le 1^{er} tas (paramètre bloqué), nous avons donc travaillé sur les premiers triplets jusqu'à (9, 9, 5).

NB : la différence essentielle entre ces triplets et les couples est qu'à un triplet gagnant peuvent correspondre plusieurs stratégies. Ex : dans la position (4, 1, 2) on peut jouer 1A ou 4A.

Voici donc les premiers triplets : (La lecture de ce tableau commence par le bas).

$(6, 1, 1)G 1A (6, 2, 1)P (6, 3, 1)G 1B (6, 4, 1)G 2A (6, 5, 1)G 1A (6, 6, 1)P$
 $(6, 1, 2)G 1A (6, 2, 2)G 4A (6, 3, 2)G 1B (6, 4, 2)G 2A (6, 5, 2)G 1A (6, 6, 2)P$
 $(6, 1, 3)G 1A (6, 2, 3)G 4A (6, 3, 3)G 1B (6, 4, 2)G 2A (6, 5, 3)G 1A (6, 6, 3)P$
 $(5, 1, 1)P (5, 2, 1)G 1B (5, 3, 1)G 2A (5, 4, 1)G 1A (5, 5, 1)P$
 $(5, 1, 2)P (5, 2, 2)G 1B (5, 3, 2)G 2A (5, 4, 2)G 1A (5, 5, 2)P$
 $(5, 1, 3)G 5A (5, 2, 3)G 1B (5, 3, 3)G 2A (5, 4, 3)G 1A (5, 5, 3)P$
 $(4, 1, 1)G 1A (4, 2, 1)G A (4, 3, 1)G 1A (4, 4, 1)P$
 $(4, 1, 2)G 1A (4, 2, 2)G 2A (4, 3, 2)G 1A (4, 4, 2)P$
 $(3, 1, 1)P (3, 2, 1)G 1A (3, 3, 1)P$
 $(3, 1, 2)G 3A (3, 2, 2)G 1A (3, 3, 2)P$
 $(2, 1, 1)G 2A (2, 2, 1)P$
 $(1, 1, n)G 1A$

On voit nettement que tous les triplets de la forme (a, a, n) sont perdants (pour $a \neq 1$), c'est-à-dire quand les deux tas possèdent le même nombre d'allumettes. On est sûr jusqu'à $(9, 9, n)$ que ces positions sont perdantes.

Conjecture et preuve

On émet donc la conjecture suivante.

Une stratégie gagnante revient à jouer le même nombre d'allumettes que son adversaire mais dans le tas opposé, tant que le nombre d'allumettes dans chaque tas est supérieur ou égal à 2.

Le 2^{ème} joueur commence donc en position gagnante. Nous avons appliqué cette stratégie sur deux tas de 50, et elle fonctionne aussi, puis nous avons démontré qu'elle fonctionne pour n'importe quel $a1$.

On sait que toutes les positions (a, a, n) sont perdantes pour $a = 2$ jusqu'à $a = 9$. On cherche à montrer par récurrence que c'est vrai pour tout $a \geq 2$.

Supposons que c'est vrai pour toutes les valeurs de 2 jusqu'à p . Nous avons donc pour tout k , $2 \leq k \leq p$, $(k, k, n)P$. On cherche à montrer que c'est vrai pour $(p + 1, p + 1, n)$.

- Supposons que notre adversaire enlève j allumettes avec $1 \leq j \leq p - 1$ donc $p + 1 - j \geq 2$. Nous nous retrouvons donc dans une position $(p + 1 - j, p + 1, j)$. Nous décidons donc de retirer j allumettes dans l'autre tas. Notre adversaire se retrouve donc dans une position $(p + 1 - j, p + 1 - j, j)$ qui est une position perdante car elle est de la forme (p', p', j) où $p' = p + 1 - j$ et $2 \leq p' \leq p$.
- Si maintenant dans la configuration $(p + 1, p + 1, n)$, notre adversaire est en mesure d'enlever $p + 1$ allumettes dans un tas, une stratégie gagnante consiste à en ôter p dans l'autre tas; et s'il peut enlever p allumettes dans un tas, une stratégie gagnante est de vider l'autre tas. CQFD

Nous avons essayé de travailler sur 3 tas, mais nous n'avons pas réussi à modéliser les positions sous forme d'ensembles à 4 termes.

III. Avec un tas de 50 allumettes et avec les règles de $3n$ et $4n$:

Règle de $3n$: Si un joueur retire n allumettes, son adversaire peut retirer jusqu'à $3n$ allumettes.

Observations

Nous avons construit la suite des nombres d'allumettes à jouer tout d'abord à la main jusqu'à 50 allumettes et nous avons trouvé ceci :

1 2 3 4 1 6 1 8 1 2 11 1 2 3 15 1 2 3 4 1 21 1 2 3 4

1 6 1 29 1 2 3 4 1 6 1 8 1 2 40 1 2 3 4 1 6 1 8 1 2

Conjecture :

Nous avons alors conjecturé la construction de la suite de la manière suivante (construction qui est similaire à celle du problème initial) :

- tout d'abord, on commence par écrire le début de la suite de base suivante : 1 2 3 4 6
- puis pour calculer la suite de cette suite on applique la formule suivante : $U_p = U_{p-1} + U_{p-4}$.
1 2 3 4 6 8 11 15 21 29 40 55 ...

• enfin, lorsqu'un nombre (A) de la suite (que l'on est en train de construire) est supérieur ou égal à 4, on le divise par 3 et le quotient ainsi obtenu désigne le nombre de termes de la suite à inscrire après le nombre ($n^{\circ}1$). (10)

Exception : si le nombre à diviser est un multiple de 3, alors il faudra enlever 1 au résultat (c'est-à-dire au quotient obtenu). (11)

Ainsi on peut calculer la suite :

1 2 3 4 1 6 1 8 1 2 11 1 2 3 15 1 2 3 4 1 21 1 2 3 4 1 6 1 29 1 2 3 4 1 6 1 8 1 2 40 1 2 3 4 1 6 1 8 1 2 (12)

Règle de $4n$: Si un joueur enlève n allumettes le joueur suivant peut en retirer jusqu'à $4n$.

Observations

Nous avons construit la suite des nombres d'allumettes à jouer tout d'abord à la main jusqu'à 50 allumettes et nous avons trouvé ceci :

1 2 3 4 5 1 7 1 9 1 2 12 1 2 15 1 2 3 19 1 2 3 4 24 1 2 3 4 5 1 31 1 2 3 4 5 1 7 1 40 1 2 3 4 5 1 7 1 9

Conjecture :

Nous avons alors conjecturé la construction de la suite de la manière suivante (similaire à la construction précédente) :

- tout d'abord on commence par écrire le début de la suite de base suivante : 1 2 3 4 5 7 9 12
- puis pour calculer la suite de base, on applique la formule suivante : $U_p = U_{p-1} + U_{p-6}$.
1 2 3 4 5 7 9 12 15 19 24 31 40 ...

• enfin, lorsqu'un nombre (A) de la suite est supérieur ou égal à 5, on le divise par quatre et le quotient ainsi obtenu désigne le nombre de termes de la suite déjà obtenue à inscrire après le nombre (A).

Exception : si le nombre à diviser est un multiple de 4, alors il faudra enlever 1 au quotient obtenu (13). On obtient :

1 2 3 4 5 1 7 1 9 1 2 12 1 2 15 1 2 3 19 1 2 3 4 24 1 2 3 4 5 1 31 ...

Généralisation à kn :

- Tout d'abord, il faut commencer par écrire les nombres de 1 à $k + 1$ dans l'ordre croissant.
- Puis, arrivé à $k + 1$, on applique la formule $U_p = U_{p-1} + U_{p-k}$ jusqu'à ce que p soit égal à $k(k - 1)$.
- Ensuite, on applique jusqu'à la fin la formule $U_p = U_{p-1} + U_{p-2(k-1)}$. On obtient ainsi la suite dite *suite de base*.
- Enfin, on forme une nouvelle suite en appliquant la règle suivante : lorsqu'un nombre (1) de la suite est supérieur ou égal à $k + 1$, on le divise par k et le quotient ainsi obtenu désigne le nombre de termes de la suite déjà obtenue à inscrire après le nombre (1).

Exception : si le nombre à diviser est un multiple de k , alors il faudra enlever 1 au quotient obtenu. (13)

B. IV. Avec un tas de 50 allumettes et la règle de $n + 1$

Règle de $n + 1$: Si un joueur enlève n allumettes, alors le joueur suivant peut en retirer jusqu'à $n + 1$.

Observations :

Nous avons construit la liste des positions gagnantes à la main jusqu'à 81 allumettes:

(81,1)P...(81,79)G80	(40,1)G1
(80,1)G1	(39,1)P (39,2)G3
(79,1)P (79,2)G3	(38,1)G2
(78,1)G2	(37,1)G1
(77,1)G1	(36,1)P ...(36,4)G5
(76,1)P ...(76,4)G5	(35,1)G1
(75,1)G1	(34,1)P (34,2)G3
(74,1)P (74,2)G3	(33,1)G2
(73,1)G2	(32,1)G1
(72,1)G1	(31,1)P (31,9)G10
(71,1)P ...(71,9)G10	(30,1)G1
(70,1)G1	(29,1)P (29,2)G3
(69,1)P (69,2)G3 (	(28,1)G2
68,1)G2	(27,1)G1
(67,1)G1	(26,1)P ..(26,4)G5
(66,1)P ...(66,4)G5	(25,1)G1
(65,1)G1	(24,1)P (24,2)G3
(64,1)P (64,2)G3	(23,1)G2
(63,1)G2	(22,1)G1
(61,1)P ...(61,19)G20	(21,1)P ...(21,19)G20
(60,1)G1	(20,1)G1
(59,1)P (59,2)G3	(19,1)P (19,2)G3
(58,1)G2	(18,1)G2
(57,1)G1	(17,1)G1
(56,1)P ...(56,4)G5	(16,1)P ...(16,4)G5
(55,1)G1	(15,1)G1
(54,1)P (54,2)G3	(14,1)P (14,2)G3
(53,1)G2	[SEP] (13,1)G2
(52,1)G1	[SEP] (12,1)G1
(51,1)P ...(51,9)G10	(11,1)P...(11,9)G10
(50,1)G1	(10,1)G1
(49,1)P (49,2)G3	(9,1)P (9,2)G3
(48,1)G2	(8,1)G2
(47,1)G1	(7,1)G1
(46,1)P.. (46,4)G5	(6,1)P (6,2)P..(6,4)G5
(45,1)G1	(5,1)G1
(44,1)P (44,2)G3	(4,1)P (4,2)G3
(43,1)G2	(3,1)G2
(42,1)G1	(2,1)G1
(41,1)P ...(41,39)G40	(1,n)P

Conjecture :

Nous avons alors conjecturé la règle suivante, qui permet de savoir le nombre d'allumettes à enlever.

- Avec un nombre d'allumettes divisible par 5, pour gagner il faut enlever 1 allumette.
- Avec un nombre d'allumettes dont le chiffre des unités est 2 ou 7, pour gagner il faut enlever 1 allumette
- Avec un nombre d'allumettes dont le chiffre des unités est 3 ou 8, pour gagner il faut enlever 2 allumettes.
- Avec un nombre d'allumettes dont le chiffre des unités est 4 ou 9, pour gagner il faut enlever 3 allumettes.
- Lorsque le chiffre des unités est 1, on va s'intéresser au chiffre des dizaines.

S'il est impair : il faut jouer 10 allumettes.

S'il est pair : on le divise par 2 :

si le nombre obtenu est impair, il faut jouer 20 allumettes.

si le nombre obtenu est pair, il faut jouer le nombre d'allumettes – 1.

Conclusion

Nous avons trouvé une solution au problème initial : avec 50 allumettes, le joueur qui commence est en position gagnante s'il retire 2 allumettes. Nous avons trouvé une stratégie lui permettant de gagner. Nous avons pu généraliser ensuite cette stratégie à un nombre quelconque d'allumettes. Après avoir modifié les règles, nous avons proposé des stratégies suite à nos observations. Il reste encore à les démontrer. Par la suite, nous pourrions envisager d'autres recherches en ajoutant un troisième joueur avec un seul tas d'allumettes tout d'abord. Le problème semble d'une autre nature car il faut prévoir les possibilités de deux joueurs au lieu d'un seul.

NOTES D'ÉDITION

(1) et il doit en retirer au moins une.

(2) Les auteurs définissent ici ce qu'ils appellent « position gagnante » et « position perdante ».

Ces définitions sont indirectes et présentent apparemment un cercle vicieux. En fait il n'en est rien : les règles données permettent bien de déterminer les positions gagnantes et les positions perdantes de proche en proche à partir de positions perdantes "ultimes" (celles de la forme $(1, n)$), qui elles sont définies directement. Un tel procédé de définition est appelé définition récursive.

(3) On appellera cette suite la suite gagnante : le k -ème terme de la suite gagnante est le nombre d'allumettes qu'il faut pouvoir retirer d'un tas de $k+1$ allumettes afin d'obtenir une position perdante

(4) Il faut comprendre : "Puis, lorsqu'un nombre de cette suite, A , est supérieur ou égal à 3, on calcule le quotient entier du nombre A divisé par 2 (ce qui est noté $A \text{ div } 2 = Q$) et on inscrit en intercalant à la suite de A les Q premiers termes de la suite que l'on est en train de construire."

(5) Un graphique donnant "le nombre d'allumettes à retirer pour gagner, en fonction du nombre d'allumettes restantes" a été réalisé par les auteurs : leur tableau figurait "en abscisse le nombre d'allumettes restantes dans le tas et en ordonnée le nombre d'allumettes à retirer pour gagner". Ce graphique ne nous est malheureusement pas parvenu.

(6) Il s'agit de montrer par récurrence qu'une somme $F_{p_1} + F_{p_2} + F_{p_3} + \dots + F_{p_k}$ avec les conditions du lemme est strictement inférieure à F_{p_1+1} : il en résulte que dans la décomposition F_{p_1} doit être le plus grand nombre de Fibonacci strictement inférieur à a . On peut ensuite raisonner avec le reste comme dans la démonstration de l'existence.

(7) Le fait que l'adversaire qui ne pourra pas retirer $F_{p_{k-1}}$ allumettes est en situation perdante est montré juste en-dessous. De même que pour les définitions (note 2), il y a apparemment un cercle vicieux, mais en fait la

démonstration qu'une situation est gagnante ou perdante ne fait intervenir que les situations avec strictement moins d'allumettes et on obtient bien ainsi une démonstration correcte, par récurrence sur le nombre d'allumettes.

(8) Et aussi entre $F_{p_{(k-1)}}$ et F_{k_1} puisque $F_{k_1} \leq F_{p_k} - m < F_{p_k}$.

Donc la décomposition de $a - m$ est $F_{p_1} + F_{p_2} + F_{p_3} + \dots + F_{p_{(k-1)}} + F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_j}$.

(9) L'algorithme du programme ne nous est pas parvenu. Voir le texte du programme en Annexe 2

(10) Comme pour le jeu avec la règle de $2n$, les nombres que l'on inscrit sont les premiers termes de la suite que l'on est en train de construire.

(11) En fait la dernière règle donnée ici reste imprécise et ne permet pas de prolonger de manière sûre la suite au-delà du nombre 40. Il nous semble que les termes intercalés doivent être écrit au fur et à mesure et qu'il faille appliquer la règle d'intercalation immédiatement pour chaque nombre supérieur à 3 nouvellement écrit : au final, le nombre total de termes intercalés entre deux termes consécutifs A et B de la suite originale 1 2 3 4 6 8 11 15 21 29 40 55..., peut dépasser le quotient entier de A par 3 (diminué d'une unité si A est divisible par 3). Un tel cas de dépassement se produit dès la valeur $A=21$: sept termes au final vont être intercalés avant $B=29$ et non six comme le voudrait une simple application de la règle.

(12) suivi de 11 1 2 3 55 ?

(13) Pour préciser l'application de la règle, voir la note (11).

Annexe 1 : Programme en Turbo Pascal

```
Uses wincrt;
Const  u1:Byte=1;
       u2:Byte=2;
Type   Tnombre=Integer;
Var     Nombre:Tnombre;
Const  Nmax=12045;
Type   Ttableau=Array[0...Nmax] of Tnombre;
Var     i:Tnombre;
        T,TabFibo:Ttableau;
Procedure Fibonacci (var TabFibo:Ttableau);
  Var  c,un,un-1,un-2:Tnombre;
  Begin
    If  Nombre > =1 then TabFibo[1]:=u1;
    If  Nombre > =2 then
      Begin
        TabFibo[2]:=u2
        un-2:=u1
        un-1:=u2
        un:=un-1+un-2;
        While un<=Nombre do
          Begin
            c:=un
            TabFibo[c]:=c;
            un-2:=un-1;
            un-1:=un;
            un:=un-1+un-2;
          End;
        End;
      End;
  End;
Procedure Insérer_bout_de_tableau (var T:Ttableau;deb,fin:Tnombre);
  Var  j:Tnombre;
  Begin
    For j:=deb to fin do T[j]:=TabFibo[j-deb+1];
  End;
```

```

BEGIN
  Writeln('Pas plus de 10950');
  Write ('Nombre d'allumettes='); Readln(Nombre);
  Nombre:=Nombre-1;
  For i:=1 to Nombre do TabFibo[i]:=0;
  Fibonacci(TabFibo);
  T:=TabFibo;
  For i:=1 to Nombre do
    Begin
      If T[i]>2 then
        Insérer_bout_de_tableau(T,i+1,i+(T[i]div2));
      End;
  For i:=1 to Nombre do Write (T[i], ' ');
  Writeln (' ');
  Write (' il faut en jouer',T[Nombre]);
END

```

Annexe 2 : Programme pour TI 83+

```

*/ initialisation des variables. /*
a=1 */ valeur inférieure de l'intervalle [a;b]/*
b=2 */ valeur supérieure de l'intervalle [a;b]/*
c=0 */ nombre d'allumettes restantes/*
input c */ on entre la valeur de c /*
c=c-1lb11
  If c=a or c=b
    goto 3
  If a<c and c<b
    then
      b=2
      c=c-a
      a=1
      goto 1
    end
  b=a+b
  a=b-a
  goto 1 lb13
disp m
*/ m est le nombre d'allumettes à enlever! si m ne peut pas être joué alors
c'est perdu!/*
goto 0

```

LOI DE LOUISE 3

Si on écrit les tables de 2, 12, 22,..., 82, 92, les résultats se termineront toujours par les mêmes chiffres (0, 2, 4, 6, 8).

LOI DE JULIEN 1

Pour trouver combien d'additions font un nombre n (combien de a et b différents pour faire $a + b = N$)

Si n est pair, il y a $n \div 2$ additions

Si n est impair, il y a $(N-1) \div 2$ additions.

Jeu de miroirs

Année 2005-2006

*Par Aurélie Verdon, Cécile Voinier, Alexandre Longuet et Vincent Lartaud
Encadrés par : Dominique et Pierre Grihon, Mathieu Claudel et Olivier Carcone
Etablissement : Lycées Sud-Médoc (Le Taillan Médoc) et Montaigne (Bordeaux)
Chercheur : Rémi Abgrall (Université Bordeaux 1)*

1 Introduction

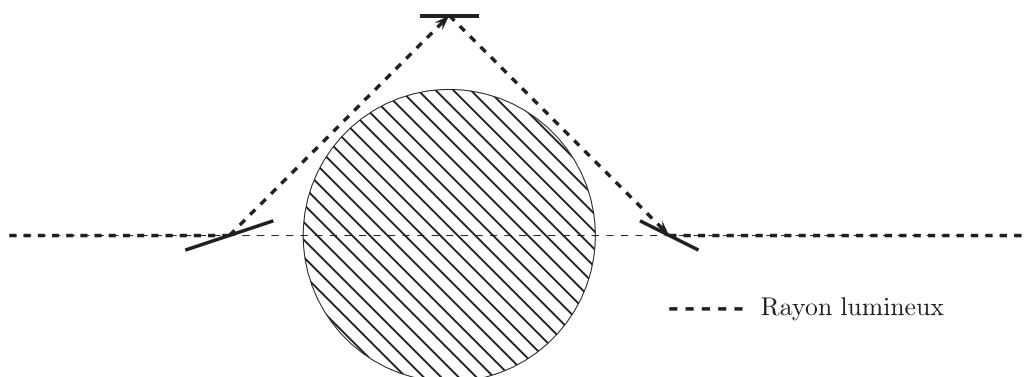
Le problème sur lequel nous avons travaillé est le suivant :

Un faisceau lumineux se trouvant interrompu par la présence d'un solide opaque, le but est de contourner ce solide en utilisant des miroirs de telle façon que le faisceau retrouve la même direction qu'il suivait au départ.

L'intérêt est soit de minimiser la longueur du trajet parcouru par le rayon lumineux, soit de minimiser le nombre de miroirs.

2 Cas de Solides basiques

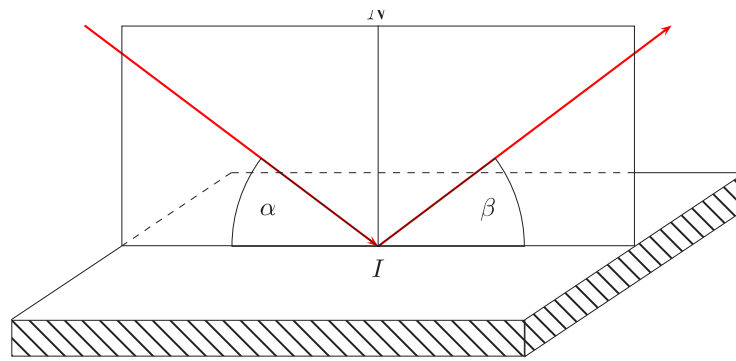
On peut constater que quel que soit le solide considéré, il suffit de trois miroirs pour le contourner tel que le présente le schéma ci-dessous.



En effet, quel que soit le solide considéré, celui-ci peut être placé dans un cylindre. Ce qui veut dire qu'il faut toujours trois miroirs pour répondre au problème. Il s'agit ici donc du nombre minimum de miroirs nécessaires pour contourner avec un rayon lumineux tout obstacle.

2.1 Règle des angles d'incidence

Nous allons préciser ici la règle concernant le comportement d'un rayon lumineux réfléchi par un miroir plan. Cette règle fût énoncée par **Descartes** en 1637. Il s'agit de la règle d'incidence (il existe aussi la règle de réfraction). Considérons un rayon lumineux qui vient frapper le miroir plan au point I . En I élevons la perpendiculaire (IN) au miroir. Le rayon incident et la perpendiculaire définissent un plan appelé plan d'incidence.



La loi de **Descartes** est double.

1. Le rayon réfléchi reste dans le plan d'incidence.
2. L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion $\alpha = \beta$.

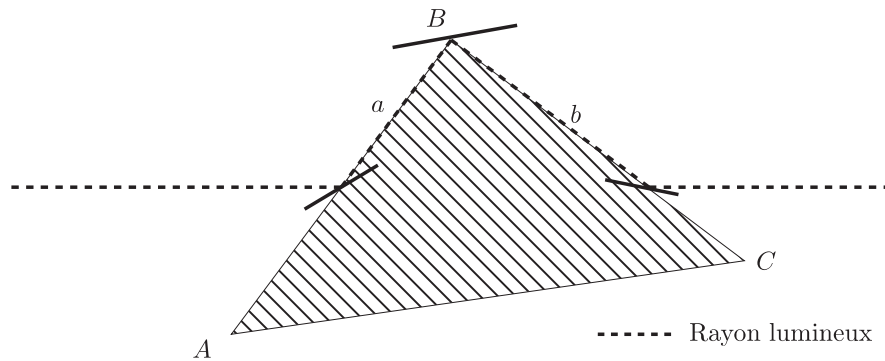
La loi reste valable lorsque la surface est de forme quelconque. La direction perpendiculaire étant alors remplacée par la normale au plan tangent en I à la surface.

2.2 Les différents cas

On va considérer maintenant un certain nombre de situations faisant intervenir des formes simples. Le but est ici de calculer la longueur minimale de parcours du rayon lumineux (que l'on notera S_m) et la longueur correspondant au nombre minimal de miroirs c'est-à-dire trois (que l'on notera S)

2.2.1 Le cas d'un triangle

On considère un triangle ABC . Le schéma ci-dessous présente la situation et la position des miroirs pour obtenir le parcours de distance minimale.

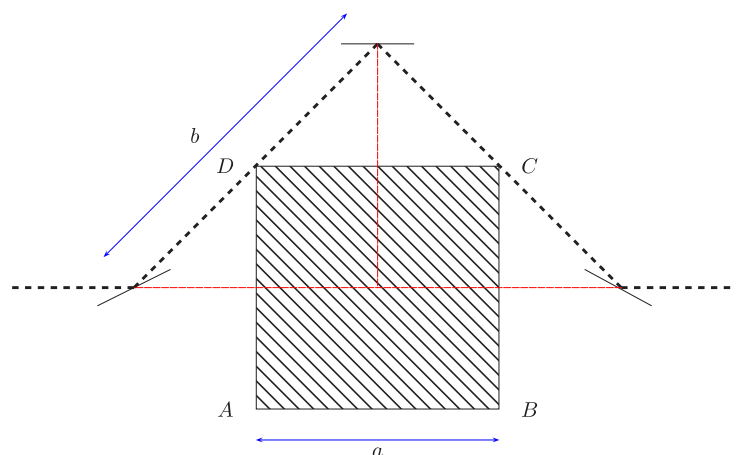


On peut constater que dans ce cas, seuls trois miroirs suffisent pour obtenir le trajet minimum en terme de distance. On a donc en utilisant les notations introduites :

$$S_m = S = a + b$$

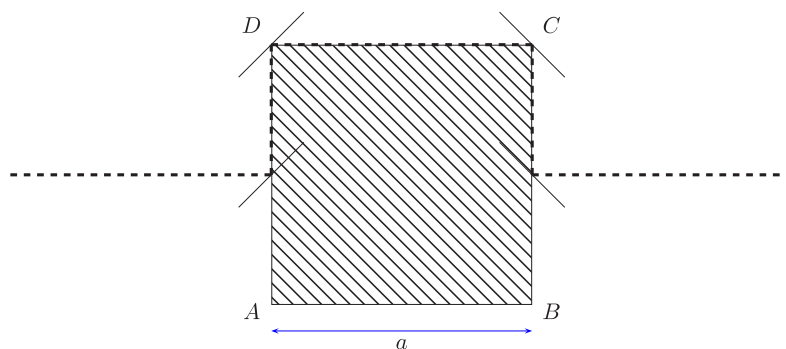
2.2.2 Le cas d'un carré

On considère maintenant un solide dont la section par un plan contenant le rayon lumineux est un carré. On peut s'apercevoir rapidement que dans ce cas, quatre miroirs sont nécessaires pour obtenir un contournement de l'objet avec un parcours de distance minimale. Le schéma ci-dessous présente la situation pour trois miroirs.



Dans ce cas, en utilisant les notations de la figure, on a : $b^2 = a^2 + a^2$ donc $b = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} a$ et $S = 2a\sqrt{2}$.

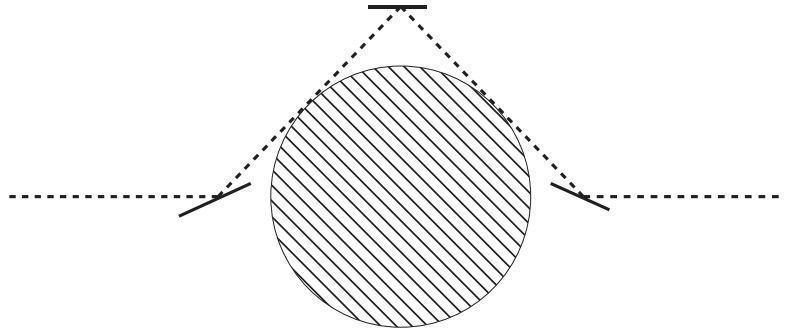
La situation ci-dessous présente la configuration permettant d'obtenir le parcours de distance minimale.



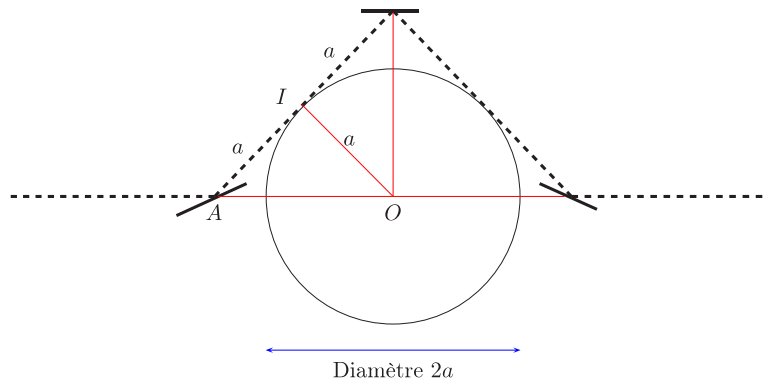
On obtient ici $S_m = 2a$, soit le demi-périmètre.

2.2.3 Le cas d'un cercle

Nous allons maintenant considérer un cylindre. Dans le cadre d'un nombre minimum de miroirs, on obtient la figure suivante.



Dans la situation présentée ci-dessus, si a est le rayon du cercle, alors le trajet du rayon est ici égal à $2 \times 2a$ donc $4a$. En effet, en notant O le centre du cercle, A le point d'impact du rayon avec le premier miroir et I le point de tangence entre le cercle et le rayon, on constate que le triangle AIO est isocèle rectangle en I et donc $IA = IO = a$.

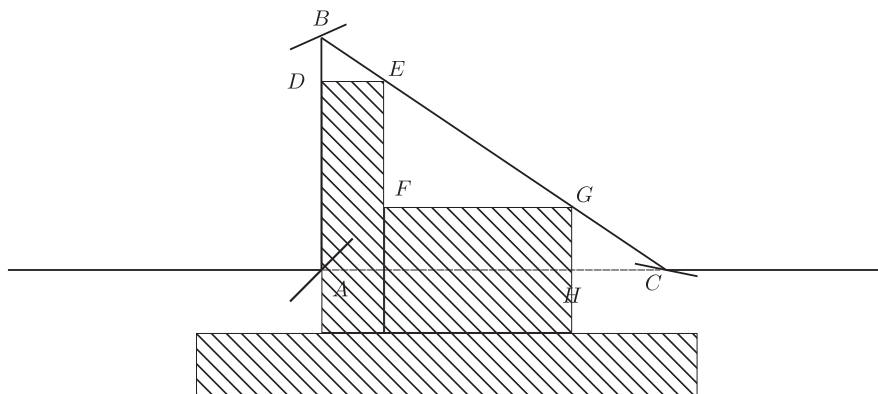


Si par contre, on cherche à réduire le parcours du rayon, on utilise pour cela de plus en plus de miroirs. Le parcours du rayon est alors de plus en plus proche du contour de l'obstacle et donc du demi-périmètre du cercle dans la situation qui nous occupe. En fait, plus le nombre n de miroirs augmente, plus la longueur p_n du parcours du rayon est proche de πa qui est la longueur du demi-périmètre.

Nous nous intéresserons plus en détail à ce phénomène dans la suite de cet article.

3 Solide en L

On considère maintenant un obstacle dont le profil présente une forme en *L* comme présenté sur le schéma ci-dessous. Nous allons calculer la longueur du trajet minimum. On peut remarquer que ce trajet minimum est aussi celui faisant intervenir le nombre minimum de miroirs.



On introduit pour les besoins des calculs, les points A, B, C, D, E, F, G et H tels qu'ils sont placés sur la figure. De plus, on pose $EF = a$, $FG = x \times a$, $DE = y \times a$, $DA = z \times a$ et $GH = v \times a$, a, x, y, z et v étant des nombres réels strictement positifs. On peut constater que les triangles ABC, BDE, EFG et GHC sont des triangles semblables (leurs angles étant égaux deux à deux).

Calcul de EG :

Dans le triangle EFG rectangle en F , on applique le théorème de Pythagore. On obtient

$$EG^2 = EF^2 + FG^2 = a^2 + (xa)^2 = a^2 + x^2a^2$$

Et donc $EG = \sqrt{a^2 + a^2x^2} = \sqrt{(1 + x^2)a^2} = a\sqrt{1 + x^2}$.

Calcul de BD :

EBD et EFG étant des triangles semblables, les mesures de leurs côtés sont proportionnelles deux à deux. On a donc :

$$\frac{BE}{EG} = \frac{BD}{EF} = \frac{DE}{FG}, \quad \text{d'où } \frac{BD}{a} = \frac{ya}{xa}$$

Donc $BD = \frac{ya^2}{xa}$.

Calcul de BE :

Dans le triangle EBD rectangle en D , on applique le théorème de Pythagore. On obtient

$$BE^2 = BD^2 + DE^2 = \left(\frac{ya^2}{x}\right)^2 + (ya)^2 = \frac{(ya)^2}{x^2} + \frac{(ya)^2x^2}{x^2} = \frac{(ya)^2(1 + x^2)}{x^2}$$

et donc

$$BE = \sqrt{\frac{(ya)^2(1 + x^2)}{x^2}} = \frac{ya}{x} \sqrt{1 + x^2}.$$

Calcul de BA :

$$BA = BD + DA = \frac{ya}{x} + za = \frac{ya + xza}{x} = \frac{a(y + zx)}{x}.$$

Calcul de HC :

EFG et GHC sont des triangles semblables. On a donc

$$\frac{EF}{GH} = \frac{FG}{HC} = \frac{EG}{GC} \text{ d'où } \frac{EF}{GH} = \frac{FG}{HC} \text{ et } \frac{a}{va} = \frac{xa}{HC}$$

et donc $HC = \frac{xava}{a} = xva$, donc $HC = xGH$.

Calcul de CG :

Dans le triangle GHC rectangle en H , on applique le théorème de Pythagore. On obtient

$$GC^2 = GH^2 + HC^2 = (va)^2 + (xva)^2 = (va)^2 + x^2(va)^2 = (va)^2(1 + x^2)$$

et donc $GC = \sqrt{(va)^2(1 + x^2)} = va\sqrt{1 + x^2}$.

Calcul de BC :

$$\begin{aligned} BC = BE + EG + GC &= \frac{ya}{x} \sqrt{1 + x^2} + a\sqrt{1 + x^2} + va\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + x^2} \left(\frac{ya}{x} + a + va \right) \\ &= a\sqrt{1 + x^2} \left(\frac{y}{x} + 1 + v \right). \end{aligned}$$

Calcul de AB :

$$AB = AD + DB = za + \frac{ya}{x} = a \left(z + \frac{y}{x} \right).$$

En définitive

Le parcours minimal du rayon lumineux est égal à $AB + BC$ soit

$$a \left(z + \frac{y}{x} \right) + a\sqrt{1 + x^2} \left(\frac{y}{x} + 1 + v \right) = a \left[\left(z + \frac{y}{x} \right) + \sqrt{1 + x^2} \left(\frac{y}{x} + 1 + v \right) \right].$$

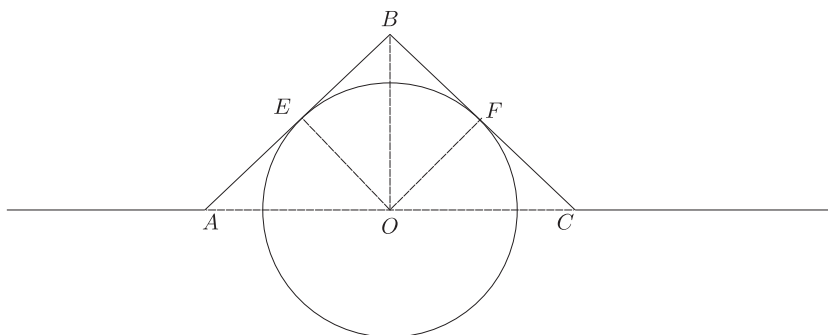
On peut ainsi constater que le parcours minimum est proportionnel à a .

4 Le cas particulier d'un cylindre

Nous revenons ici sur la situation où l'on doit contourner un obstacle dont le profil est un disque. Nous avons pu voir que plus le nombre de miroirs utilisés est important, plus le trajet du rayon lumineux est court.

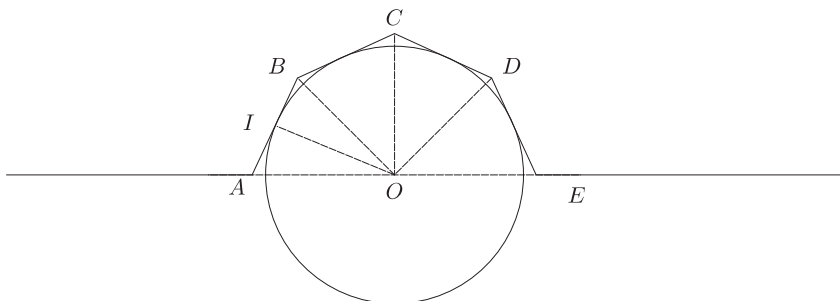
4.1 Recherche du trajet minimum

On pose n , le nombre de miroirs utilisés. De plus, on suppose le rayon du disque égal à 1. Nous allons déterminer la longueur du trajet du rayon lorsque l'on utilise n miroirs. On va de plus supposer que ce nombre de miroirs est impair. Ainsi si $n = 3$, on a la figure suivante :



Si on pose x la longueur AE , la longueur du trajet est alors $4x$. Or dans le triangle AOE rectangle en E , puisque l'angle $\widehat{AOE} = \frac{\pi}{4}$, on en déduit que $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{AE}{OE} = \frac{x}{1}$. Donc finalement, on a $4x = 4 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$.

Si $n = 5$, on a la figure suivante :



On peut constater que le triangle AOI est rectangle en I et que $AOI = \frac{\pi}{8}$.

Donc si on pose $x = AI$, on a $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{AI}{OI} = \frac{x}{1}$. Mais le parcours du rayon est ici égal à $4 \times 2x$ soit donc $8x$. On obtient finalement que ce parcours est égal à $8 \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \simeq 3.313708499$.

On peut généraliser les résultats précédents.

Si n est le nombre de miroirs utilisés, alors la longueur du parcours du rayon lumineux est égal à

$$2(n-1)\tan\left(\frac{\pi}{2(n-1)}\right).$$

4.2 Approximation de π

Nous savons de plus que plus le nombre n de miroirs est important plus le parcours du rayon lumineux est proche de la longueur du demi-périmètre du cercle soit donc π (le cercle est de rayon 1). On déduit de cela une méthode pour obtenir une valeur approchée de π .

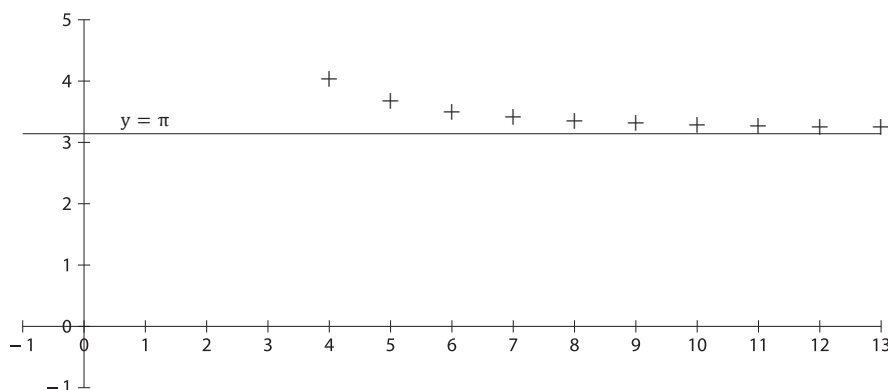
Ainsi si $n = 7$, on obtient :

$$12 \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) \simeq 3.215390309173472477670644.$$

Si $n = 100$, on obtient :

$$198 \tan\left(\frac{\pi}{198}\right) \simeq 3.141856312054318402160991.$$

Il est possible graphiquement de se rendre compte du phénomène qui a lieu ici. Ci-dessous est représenté dans un repère l'ensemble des points M_n de coordonnées $n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ pour n entier supérieur à 4.



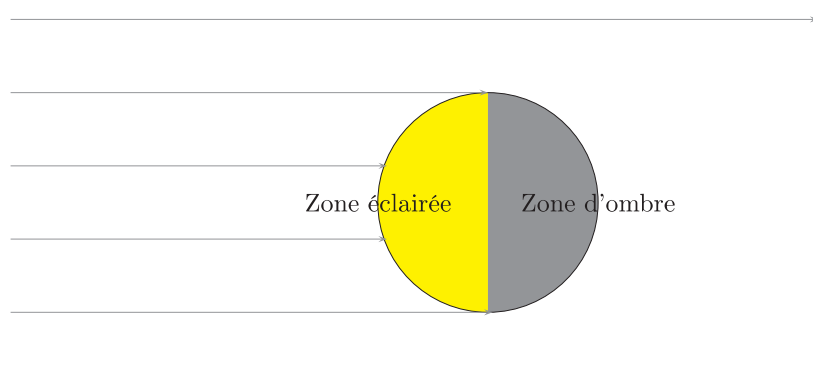
On peut donc constater que les points du nuage sont de plus en plus proches de la droite d'équation $y = \pi$, marquant ainsi le fait que plus n devient grand, plus la valeur $n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ devient proche de π .

Cette méthode d'approximation de π passe naturellement par le calcul de la tangente d'un angle. Ceci nous est actuellement permis facilement grâce à une calculatrice ou un ordinateur. Dans le cas inverse, un tel calcul reste difficile à mener.

On retrouve dans cette démarche une partie de la technique qu'employa Archimède. En effet, celui-ci pour obtenir une valeur approchée de π encadra la valeur du périmètre d'un cercle de rayon 1 par la valeur du périmètre d'un polygone inscrit dans ce cercle et par la valeur du périmètre d'un polygone circonscrit au cercle. En augmentant le nombre de côtés des deux polygones, il est possible d'approcher de façon satisfaisante la valeur du périmètre du cercle. On obtient ainsi un encadrement de π .

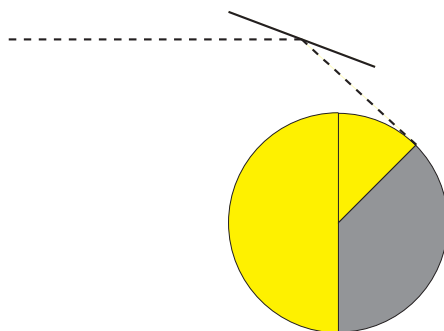
5 Vers une autre piste

Nous allons examiner maintenant une autre situation mettant là encore en jeu des miroirs. Il s'agit de considérer une sphère placée dans un éclairage unidirectionnel.

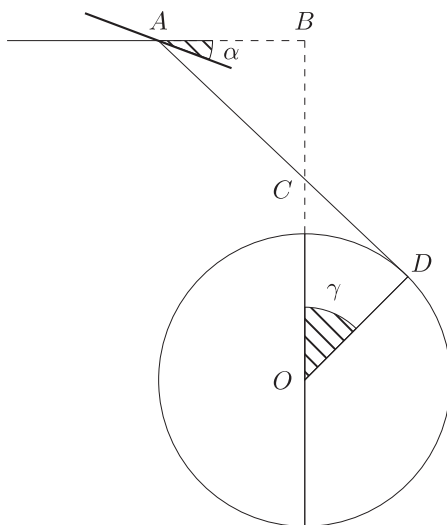


Le but est de savoir combien de miroirs il nous faut pour faire en sorte que toute la surface de la sphère soit éclairée.

Nous allons examiner la situation dans laquelle nous utilisons un miroir plan de grandeur variable. On a donc la situation ci-dessous :



Nous allons voir qu'il existe une relation entre l'angle que forme le miroir avec le rayon incident (que l'on note α) et l'angle de la zone d'ombre qui se retrouve éclairée par le biais du miroir (que l'on note γ).



La configuration ci-dessus permet facilement d'en conclure que $2\alpha = \gamma$. En effet, les triangles ABC et OCD sont semblables. On en déduit que plus l'angle que forme le plan du miroir avec le rayon incident est grand et proche de 90° plus la surface éclairée par les rayons réfléchis est grande.

Cependant, on peut constater qu'il existe une contrainte liée au fait que le miroir doit être placé au point de concours d'un rayon et de la tangente au point D du cercle de centre O représentant la sphère. Plus précisément, la position la plus proche du miroir est donnée par cette intersection donc si on augmente γ , on voit que le miroir va à l'infini. Cette contrainte implique qu'il n'est pas possible d'éclairer toute la surface de la sphère avec un seul miroir.

LOI DE ANTOINE 6

Quand on compte de 10 en 10, les unités ne changent pas, ce sont les chiffres à gauche qui changent.

LOI DE JULIEN 2

Pour multiplier un nombre de 2 chiffres par 11 :

J'ajoute le chiffre des unités et celui des dizaines, et je place le résultat entre les deux.

ex : 35×11	$3 + 5 = 8$	385	$35 \times 11 = 385$
67×11	$6 + 7 = 13$	737 (la retenue!)	$67 \times 11 = 737$

Ça roule à Saint-Orens

Année 2006-2007

Par Claire Hévin-Zaccaron, Maxime Collodel, Maxime Mametsa, Bastien Mesquida, Clémentine Delarue, élèves de seconde

Encadrés par : Anne Copros et Boris Véron

Établissement : lycée Pierre-Paul Riquet (Saint-Orens)

Chercheur : Vincent Guirardel (Université Paul Sabatier - Toulouse 3)

vSujet

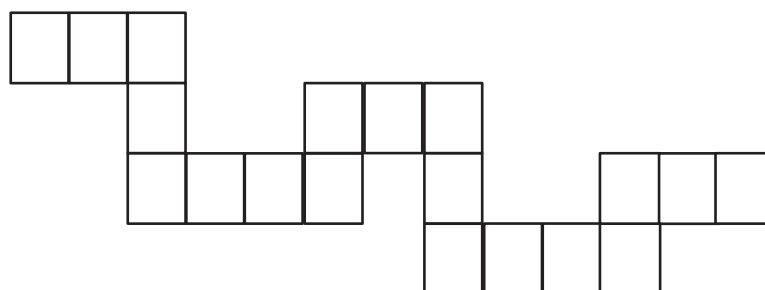
Notre recherche a consisté à déterminer les régions du plan accessibles lorsque l'on fait pivoter des polyèdres réguliers autour de leurs arêtes.

Nous avons étudié l'évolution de la zone accessible en fonction du nombre et de la position des faces auxquelles on a interdit de toucher le plan.

Exemple avec le cube :

→ Que se passe-t-il lorsque l'on fait pivoter un cube ?

On imagine aisément que l'on peut parcourir n'importe quel réseau tel que celui-ci :



→ Que se passe-t-il si l'on interdit à une face de toucher le plan ?

Peut-on encore accéder à toutes les positions ?

→ À deux faces de toucher le plan ?

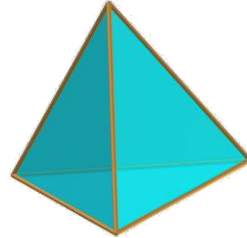
→ Et pour les autres polyèdres réguliers ?

Présentation des 5 polyèdres réguliers

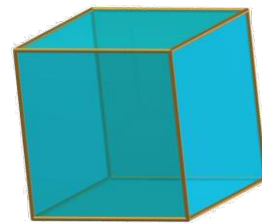
Un polyèdre est régulier lorsqu'il possède toutes ses faces identiques composées de polygones réguliers et que tous ses sommets sont équivalents (1).

Il existe 5 polyèdres réguliers :

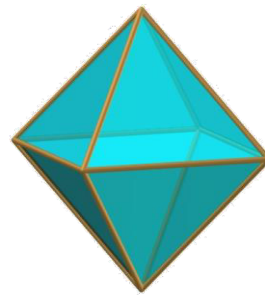
- Le tétraèdre : 4 faces, 6 arêtes, 4 sommets



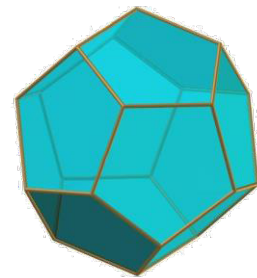
- Le cube : 6 faces, 12 arêtes, 8 sommets



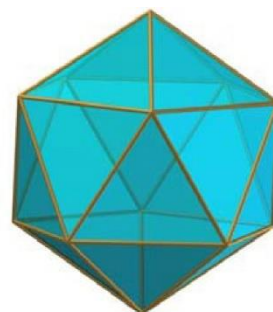
- L'octaèdre : 8 faces, 12 arêtes, 6 sommets



- Le dodécaèdre : 12 faces, 30 arêtes, 20 sommets



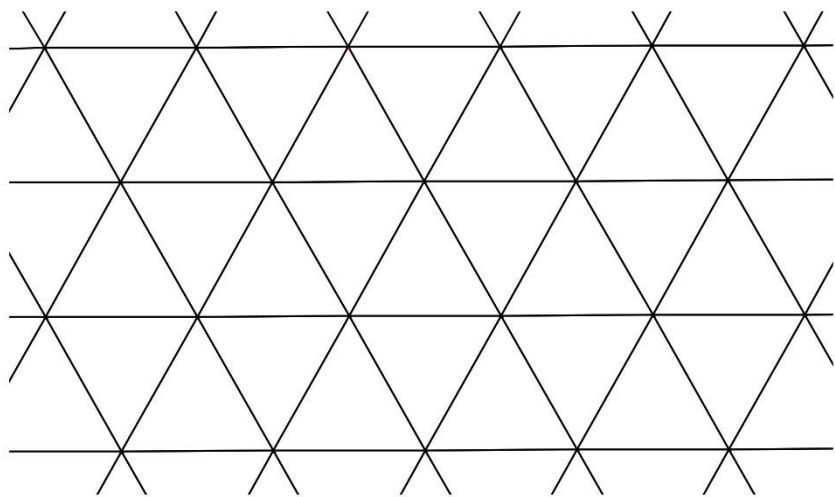
- L'icosaèdre : 20 faces, 30 arêtes, 12 sommets



I. Le tétraèdre

Le tétraèdre possède 4 faces étant des triangles équilatéraux.

- Le tétraèdre se déplace sur ce réseau, composé de triangles équilatéraux :

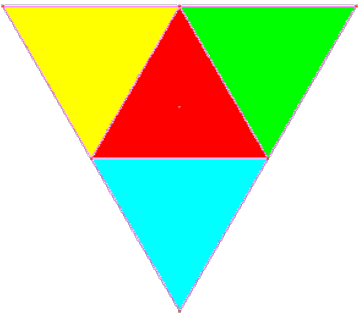


Ce réseau est illimité

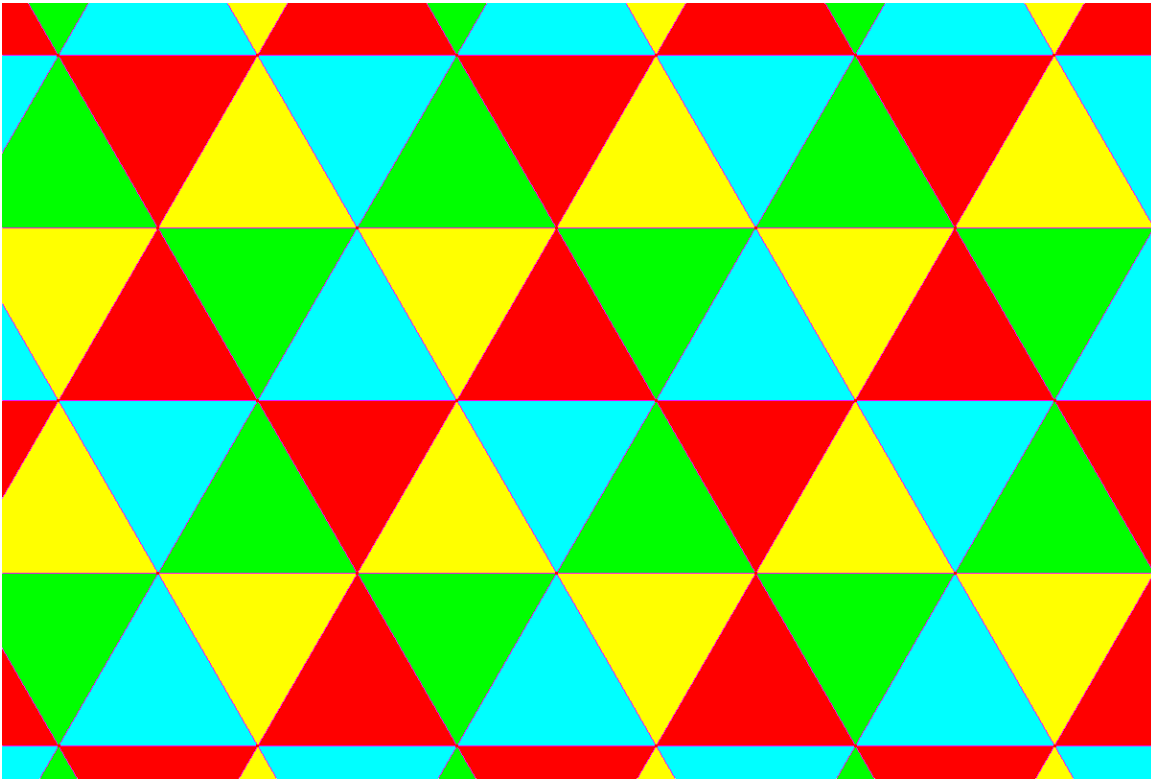
- Lorsque l'on interdit à des faces de toucher le plan, le réseau se réduit éventuellement.

1 face interdite : on obtient un hexagone	2 faces adjacentes interdites : un losange	3 faces interdites : la face de départ

Étudions maintenant sur quelle face nous retombons lorsque l'on fait pivoter le tétraèdre. Pour cela prenons un tétraèdre dont les faces sont de couleurs différentes. Nous obtenons le début du réseau :



Nous obtenons alors le réseau coloré suivant :



Nous pouvons faire l'observation suivante :

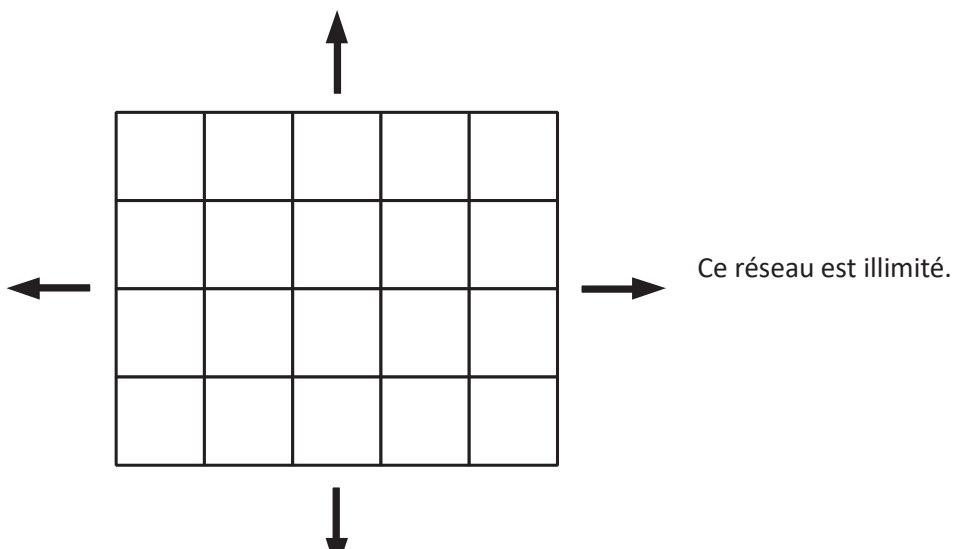
Il est impossible de tomber sur une face autre que celle prévue sur le réseau. On peut ainsi savoir où tombera l'une des faces du tétraèdre.

C'est-à-dire qu'une face du tétraèdre ne peut « tomber » que sur une face de même couleur du réseau (2).

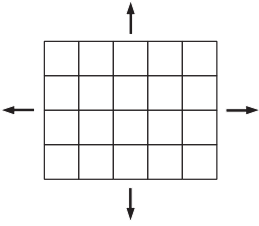
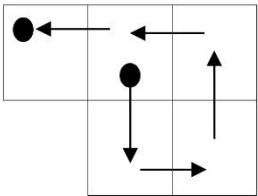
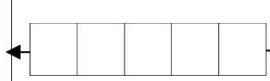
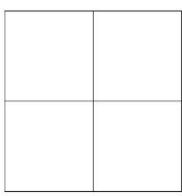
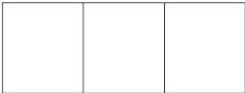
II. Le cube

Nous avons observé ce qu'il se passe lorsque l'on fait rouler un cube sur ses arêtes.

- Le cube se déplace sur un réseau, composé de carrés :



- Lorsque l'on interdit à des faces de toucher le plan, le réseau se réduit.

1 face interdite : plan illimité	2 faces adjacentes interdites : plan illimité *	2 faces opposées interdites : illimité sur une ligne	3 faces adjacentes interdites
			
3 faces dont 2 opposées interdites	4 faces adjacentes interdites	4 faces interdites opposées 2 à 2 ou 5 faces interdites	
			

*Le schéma montre comment aller de gauche à droite lorsque la face de gauche est interdite ou lorsque gauche et arrière sont interdites.

- Déplacements sur un carré de côté n :

On a aussi regardé si l'on revenait sur la face de départ lorsque l'on fait pivoter le cube sur les bords d'un carré.

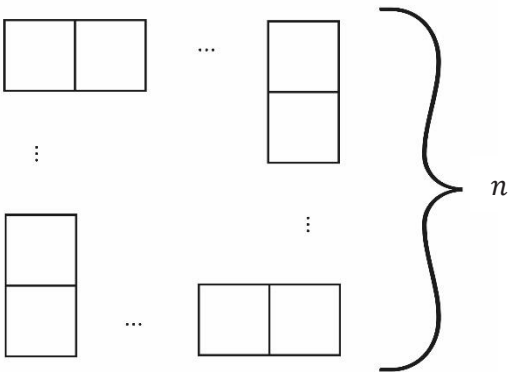
On fait pivoter le cube de cette manière :

On désigne par n le nombre de cases concernées par le roulement du cube.

On remarque que :

- lorsque n est pair, il faut 3 tours au cube pour revenir dans la position de départ ;
- lorsque n est impair, il faut un tour au cube pour revenir dans sa position de départ.

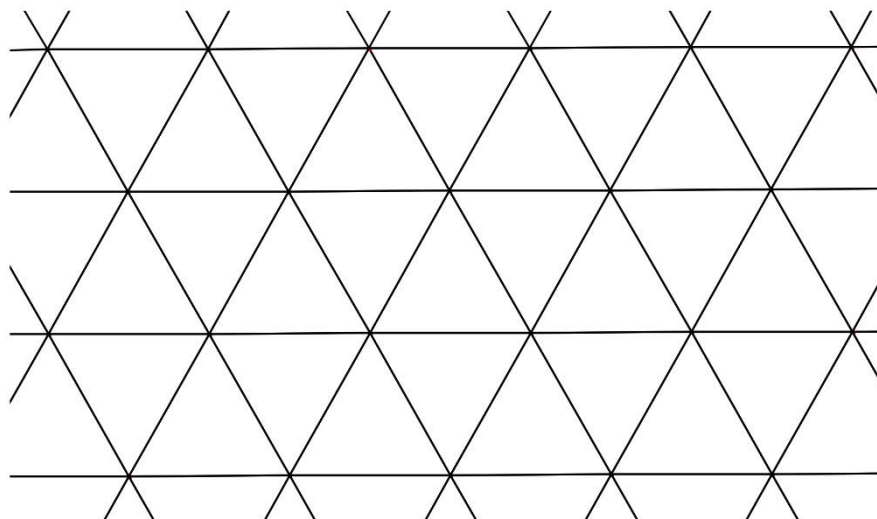
Ceci a été vérifié jusqu'à $n = 6$.



III. L'octaèdre

L'octaèdre possède 8 faces étant des triangles équilatéraux.

- L'octaèdre se déplace sur ce réseau, composé de triangles équilatéraux comme pour le tétraèdre.



- Lorsque l'on interdit à des faces de toucher le plan, le réseau se réduit éventuellement.

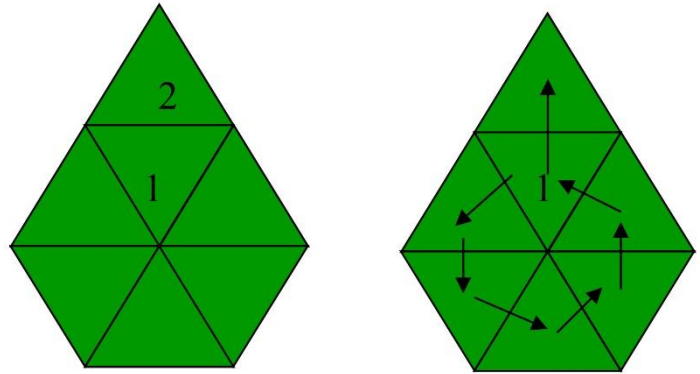
1 face interdite : plan illimité	2 faces adjacentes interdites : plan illimité	2 faces opposées interdites : illimité sur une ligne	2 faces opposées par le sommet interdites :

Pour obtenir le plan illimité lorsque nous avons 2 faces adjacentes interdites, nous devons faire des déplacements précis :

On part de la face 1 et on veut aller à la face 2 du réseau.

Cependant une face de l'octaèdre nous l'interdit. Nous faisons alors la manipulation suivante :

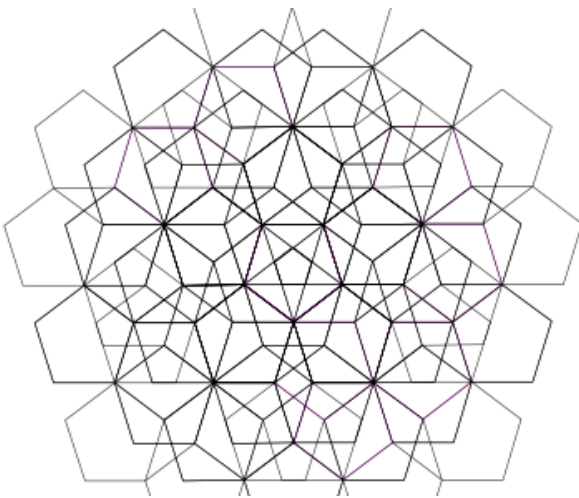
Plus on interdit de faces plus le réseau se réduit.



IV. Le dodécaèdre

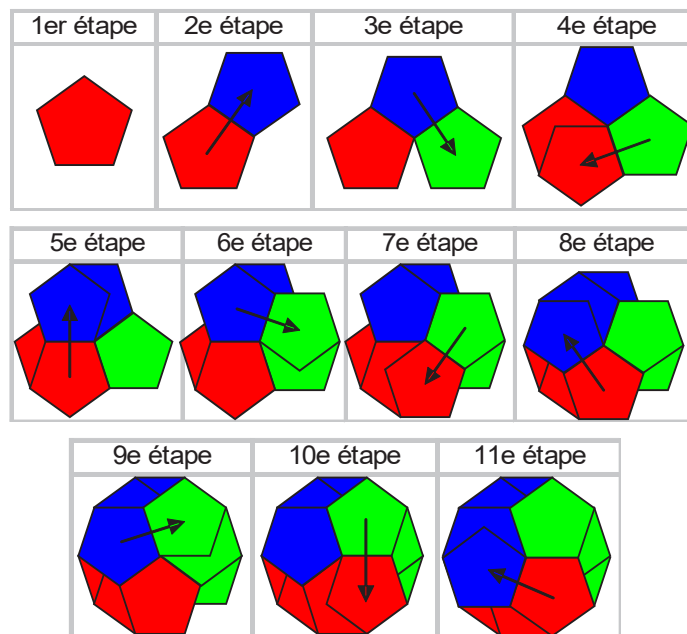
Le dodécaèdre régulier possède 12 faces qui sont des pentagones réguliers.

Voici le plan de son réseau lorsqu'on le fait pivoter :



Comme on peut l'apercevoir les faces se superposent rendant le réseau difficile à représenter (le plan ci-dessus ne montre que 3 mouvements possibles en partant de la face du milieu), pour faciliter nos recherches on a fait une recherche en autorisant 1, 2 ou 3 faces juxtaposées (3).

Lorsqu'il y a 1 face autorisée le plan est alors un pentagone, avec 2 faces le plan est de 2 pentagones juxtaposés mais lorsqu'il y a 3 faces il faut faire une manipulation décrite ci-dessous (pour cela on a colorié les faces).



En pivotant sur un sommet (4), on remarque qu'avec 3 faces adjacentes, tous les 10 mouvements, on retombe sur le même endroit sur une face adjacente à celle de départ (la bleue de la 11^e étape se superpose sur la rouge de départ). Au bout de 30 mouvements, on retombera alors sur la face de départ.

On pense qu'à partir de 4 faces bien sélectionnées, le réseau devient alors infini, avec 3 faces adjacentes on oriente et avec la 4^e on se déplace.

NOTES D'ÉDITION

- (1) Sommets équivalents : ici, sommets d'où il part le même nombre d'arêtes.
- (2) Toutes ces observations ont été faites grâce aux manipulations effectuées que le lecteur est invité à reproduire.
- (3) La contrainte est ici différente de celle imposée au départ qui consistait à interdire à une face de toucher le plan.
- (4) Le polyèdre pivote toujours autour d'une arête.

LOI DE GÉRALDINE 1

Pour enlever 9 à un nombre, on peut faire : J'ajoute 1 et j'enlève 10.

ex : $37 - 9 = 37 + 1 - 10$

LOI DE HANANE 3

On peut partager en 2 tous les nombres pairs, parce qu'ils sont dans la table de 2.

Tout noir, tout blanc

Année 2007-2008

Par Anaïs Bellezza-Berger et Lucie Maurin

Encadrés par : Elisabeth Julliard et Colette Martinon

Etablissement : Collège Le Chamandier à Gières

Chercheur : Éric Dumas (Université Joseph Fourier Grenoble)

Des pions bicolores recouvrent un damier, blancs dessus, noirs dessous. Quand on retourne un pion, on retourne aussi ses voisins (4 voisins en général, sauf au bord) Peut-on passer d'un damier tout noir à un damier tout blanc ?

Nous avons cherché des solutions en commençant par des plateaux de dimensions $1 \times n$, puis des plateaux $2 \times n$, $3 \times n$, ...

Règles trouvées en cours de recherche pour simplifier la liste des mouvements.

Faire deux fois le mouvement (retourner le même pion) redonne la situation de départ.

L'ordre des mouvements n'a aucune importance.

Démonstration pour des plateaux de $1 \times n$

Règle : un pion « central » a deux voisins quand on le retourne, on retourne 3 pions.

Les deux pions du bord, n'ont qu'un voisin : on ne retourne que 2 pions.

Pour n'importe quelle longueur, on retournera des groupes de 3 et si besoin un ou deux groupes de 2 (aux bouts)

On montre que le nombre n peut s'écrire sous la forme d'une somme d'un multiple de 3 et 2×2 ou 1×2 .

On divise n par trois : si le reste est 0, on ne fera que des groupes de trois.

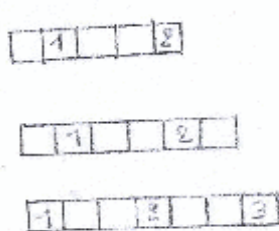
Si le reste est 2, on fera des groupes de trois et on retournera un pion du bout pour faire un groupe de deux.

Si le reste est 1, on retire 1 au quotient et on a un multiple de trois +4, on retourne des groupes de trois et les deux pions des bouts.

EXEMPLES

DEMONSTRATION SUR DES PLATEAUX DE $1 \times n$:
On divise n'importe quel nombre par 3. Quand le reste est égal à 1 alors on retire un multiple de 3 au quotient et on ajoute deux multiples de 2 dans les angles.

EXEMPLES:



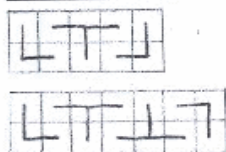
Légende:

- 1 On retourne ce pion en premier
- 2 On retourne ce pion en deuxième
- 3 On retourne ce pion en troisième
- 4 etc ...

Démonstration pour des plateaux de $2 \times n$

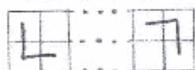
Règle : Selon la place du pion qu'on retourne, on a un « L » ou un « T »

EXEMPLES:



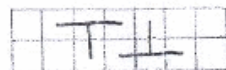
Légende:

Pour faire un L :



on retourne un pion dans un coin

Pour faire un T :



on retourne un pion qui n'est pas dans un coin

1) Le nombre n est impair

On peut faire tous les cas avec deux « L » et des « T »

2) Le nombre n est pair

On arrive à retourner tous les pions d'un bloc de 2×3 en étant sûr de ne pas retourner les pions d'à côté et on peut aussi retourner un bloc de 2×4 .

EXEMPLES:

1	3			7	5
2	4			8	6

	1	3			5	7	
	2	4			6	8	

Il suffit d'écrire n en somme d'un multiple de 4 et d'un multiple de 3.

On divise n par 4. Quand le reste est 0, on ne fait que des blocs de 4.

Quand le reste est 2, on retire 1 au quotient et le reste est 6 donc deux blocs de 3.

Remarque : Le reste ne peut pas être 1 ou 3 car n est pair.

Pour les plateaux de $3 \times n$

Nous n’avons pas trouvé de méthode générale mais nous avons réussi quelques cas.

D’abord nous avons donné des coordonnées aux pions et quand on écrit A3 cela signifie qu’on retourne le pion A3 et ses voisins.

	1	2	3	4
A				
B				
C				

- 3x3

Liste des mouvements

A1 C1 C3 A3 B2
- 3x4

Liste des mouvements

A1 B1 C1 C2 C3 C4 B4 A4 A3 A2
- 3x5

Liste des mouvements

A5 A3 B1 C3 B4 C5
- 3x8

Liste des mouvements

A1 C2 A4 B4 B5 A5 C7 A8
- 3x9

Liste des mouvements

A1 C1 B2 C3 A3 B5 A7 C7 B8 A9 C9

NOTES D’ÉDITION

Cet article reflète le travail de collégiens, dont les professeurs encadrant l’atelier ont écrit : "Les élèves ont découvert et utilisé des notions mathématiques essentielles, en particulier en arithmétique, par exemple le travail sur les décompositions en somme de multiples. Ils ont dû préciser certaines notions avant de les utiliser. Ils ont choisi une notation pour garder des traces de leur travail d’une séance à l’autre et ont dû optimiser cette notation pour qu’elle soit efficace, plus simple et plus précise.

... Ce long travail, qu’on reprend de semaine en semaine, fait appel à des qualités intéressantes de persévérance, de mémoire et à la capacité de reprendre une réflexion là où on l’a laissée sans recommencer au début".

LOI DE ANTOINE 7

Si X et Y sont deux nombres différents de 0 et si $Y > X$

$$\frac{X}{Y} + \frac{Y-X}{Y} = \frac{Y}{Y} = 1$$

LOI DE RHALED 1

On peut changer la loi de Manuel pour faire une nouvelle loi :

$$N + (2 \times N) + (3 \times N) + (4 \times N) + (10 \times N) = 20 \times N$$

La géométrie du tas de sable

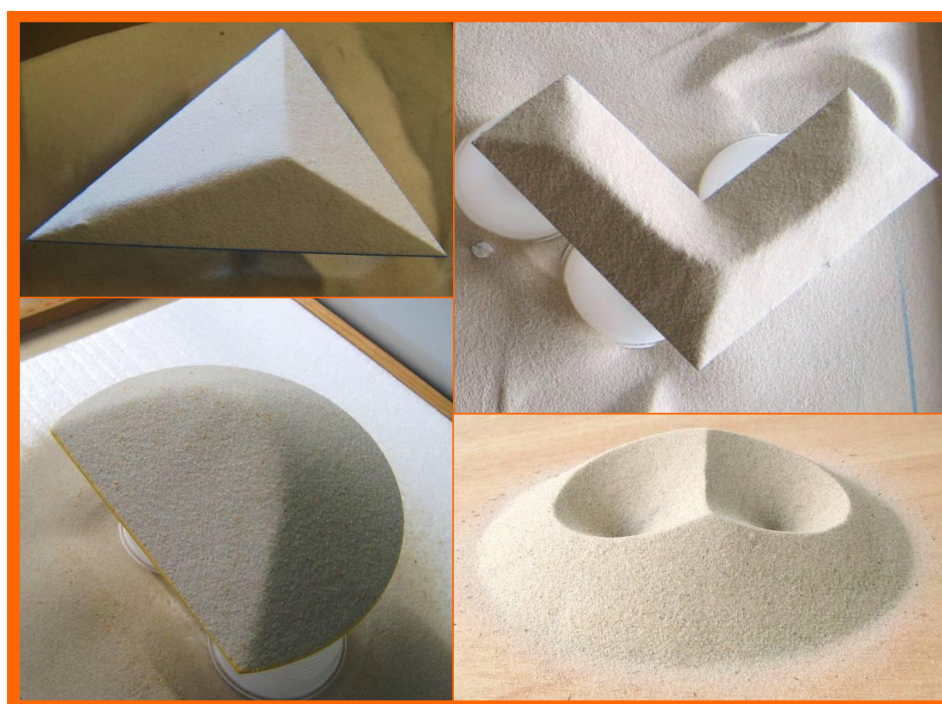
Année 2008-2009

Par Chloé Milsonneau, Caroline Anger, Pierre Chaligné, Gwendoline Lecomte, Alexandre Daumin et Damien Bouasba, élèves de 4e et 3e.

Encadrés par : Martine Janvier et Guillaume François

Établissements : Collège Vieux colombier (Le Mans) et Vieux Chêne (La Flèche)

Chercheur : Dominique Bénard (IREM du Mans)



I- PRESENTATION

Sujet

1. On verse du sable régulièrement en un point d'une surface plane, un tas se forme. Voilà devant nous un bel « objet mathématique ». Que peut-on connaître de cet objet ? Mesurer ? Calculer ? Et que se passe-t-il si on verse encore plus de sable ? Et si on prend un autre sable ? Puis, on pourra observer ce qui se passe si on fait évoluer le tas. Par exemple en perçant un trou au centre de sa base. Et si au lieu de verser le sable sur une large surface on le versait seulement sur un carré, ou sur un rectangle, ou sur un triangle, un losange, un hexagone... ?
L'activité passera donc par des étapes de manipulations, d'observations, puis de mesures. Ensuite on se demandera ce qu'on peut calculer avec les quelques données à notre disposition ; on recherchera les moyens offerts par les mathématiques pour effectuer ces calculs.
2. Observer des tas de sable et utiliser des mathématiques pour réfuter ou confirmer les observations ; Tas à base en forme de L , tas à base en forme de D (disque coupé). Approche des coniques avec les connaissances du collège.

I-2-Présentation des propriétés physiques du tas de sable « naturel »

SABLE: nom masculin (latin Sabulum) roche sédimentaire meuble, formée de grains, souvent quartzeux. Du point de vue de la sédimentologie, la taille des grains est comprise entre 62,5 μm et 2 mm.

Donc, toute roche ne répondant pas à une de ces propriétés (ou les deux) n'est pas appelée « sable ». Mais aussi, par extension, des matériaux non rocheux peuvent répondre à ces critères, par exemple du sucre en poudre.

A Bordeaux nous sommes allés visiter un laboratoire où les chercheurs étudient les matériaux en grains, en particulier le sable. Nous avons encore mieux compris que c'est un milieu étrange qui a, à la fois, des propriétés de gaz, de liquide et de solide. On sait encore peu de choses sur ce milieu et c'est pourquoi beaucoup de scientifiques s'y intéressent.

En 2000, année mondiale des mathématiques, un plasticien sarthois, *Jean-Bernard Métais*, avait installé un sablier géant dans le Jardin des Plantes à Paris. C'est ce qui a donné l'envie à notre professeur de faire des applications en mathématiques au collège.

<http://www.jbmetais.com/web-content/www/phototemps%20imparti.swf>

En particulier, Jean-Bernard Métais avait reçu l'aide d'un physicien de l'université de Jussieu à Paris et il avait beaucoup insisté sur une propriété physique *des tas de sable naturels* :

Quand on verse du sable sur un plan horizontal, il s'installe naturellement pour former un cône dont l'angle de base est constant ; on appellera cet angle l'angle de talus.

Nous avons utilisé des photographies de tas de sable avec des grains et des hauteurs différentes pour évaluer l'angle de talus. Nos résultats étaient entre 32° et 34° et nous avons admis comme valeur moyenne : $\theta = 33^\circ$.

Nous n'utiliserons 33° que pour des calculs de quantités. Pour les démonstrations nous noterons l'angle de talus, θ .

Cette propriété nous permet de dire que tous les tas sont semblables.

II - À PROPOS DES ÉCOULEMENTS

Matériel : Un plateau horizontal percé d'un trou de quelques millimètres de diamètre. Pour la géométrie, le trou sera considéré comme ponctuel (diamètre négligeable) et on appelle O ce point. Ce plateau est placé sur des supports qui permettront un écoulement libre du sable recueilli sur une surface plane et horizontale.

II -1 - Première situation : le trou est au centre du disque de base

Expérience, observation.

L'orifice est bouché. Nous versons du sable sur le point O . Il s'installe naturellement en formant un cône dont :

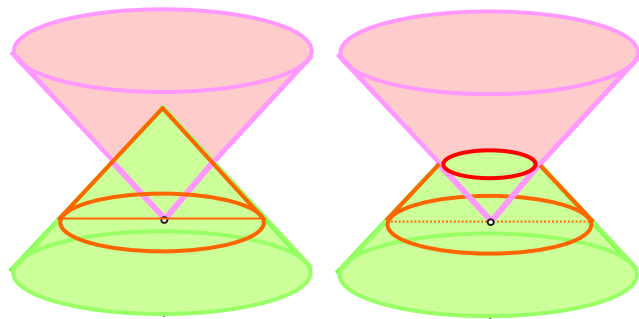
- la base est un disque centré en O et dont le diamètre dépend de la quantité de sable versé. Nous notons R le rayon de ce disque.
- l'angle de base du cône est l'angle de talus θ .

Nous ouvrons l'orifice. Le sable s'écoule, formant sous le plateau un autre cône. Peu à peu le cône supérieur se creuse. Puis l'écoulement cesse. Le tas de sable est dans une nouvelle situation d'équilibre : une sorte de couronne et, dans le cratère, l'angle de talus est θ .



Au niveau inférieur, le cône formé est un modèle réduit du cône initial.

Nous avons pu observer qu'il se forme une ligne de crête qui ressemble à un cercle et qui semble être parallèle au plan de base. On peut imaginer que nous avons produit une intersection de deux cônes : l'un de sable, l'autre de vide.



Questions

Nous avons alors cherché à répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la hauteur du cône initial ? Quel est son volume ?
- Quel est le rapport de réduction entre les deux cônes ?
- Quels sont les volumes du sable restant après l'écoulement et du cône inférieur ?

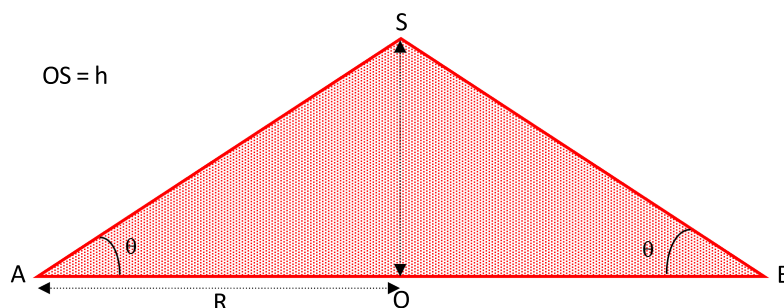
Analyse mathématique de cette situation

Un schéma en coupe du tas initial va nous permettre de calculer la hauteur ; le plan de coupe est perpendiculaire à la base et passe par O .

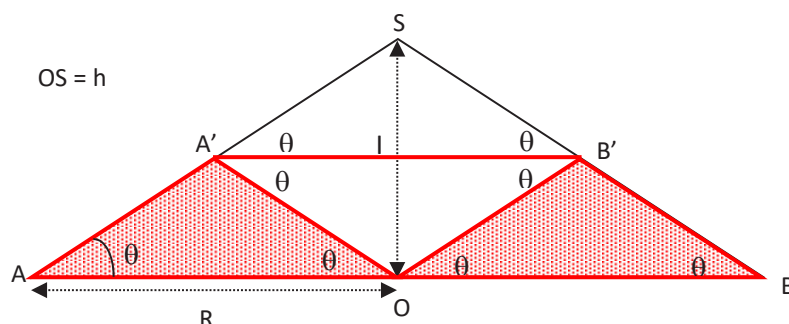
Nous avons utilisé la trigonométrie dans OSA rectangle en O : $h = OS = R \tan \theta$

Le volume est donc : $V = (\pi R^2) (R \tan \theta)/3 = \pi R^3 \tan \theta/3$

Il suffit de connaître R pour connaître le volume V du tas.



Pour trouver le rapport de réduction, nous sommes passés par le même schéma en coupe du tas restant.



Dans ce plan, le triangle ASB est la trace du cône initial ; en rouge la trace du tas restant. On repère tous les angles égaux à θ et on en déduit que $(OB') \parallel (AS)$, $(A'B') \parallel (AB)$, $(BS) \parallel (OA')$.

AS est donc partagé par trois droites des milieux en quatre triangles superposables. Le rapport de réduction pour passer de ASB à l'un de ces petits triangles est donc $1/2$. Et le rapport des volumes sera $1/8$.

$$V' = 2V/8 \text{ ou } V' = V/4$$

Le rapport de réduction de V à V' est 1 sur racine cubique de 4.

Et le volume de sable restant sur le plateau est $V'' = V - V' = 3V/4$.

Autre façon de connaître le volume de sable restant : théorème de Guldin.

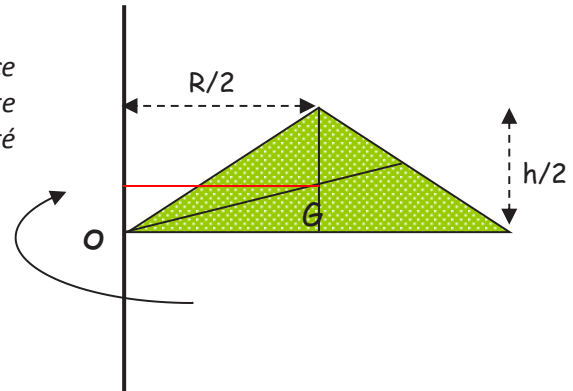
« Le volume du solide engendré par la révolution d'une surface quelconque autour d'un axe est égal au produit de l'aire de cette surface par la longueur du cercle décrit par le centre de gravité de cette surface »

Si R est le rayon du tas initial et h sa hauteur:

$$V'' = 2 \times \pi \times (R/2) \times A \text{ et } A = R \times (h/2) \times 1/2$$

$$V'' = (\pi \times R^2 \times h)/4, \text{ or } V = (\pi \times R^2 \times h)/3 ; V'' = 3V/4$$

Ce qui confirme le résultat précédent. (1)



Nature de la ligne de crête

Cette ligne de crête est constituée de tous les points A' (ou B'). On a démontré que tous les points A' et B' sont à la même « altitude », $h/2$. Donc la ligne est plane et parallèle au disque de base (horizontal).

D'autre part $IA' = IB'$; tous les points qui constituent cette ligne sont équidistants de I : la ligne de crête est un cercle de centre I et de rayon $R/2$.

II-2- Deuxième situation : Le trou n'est plus au centre

Expérience, observation.

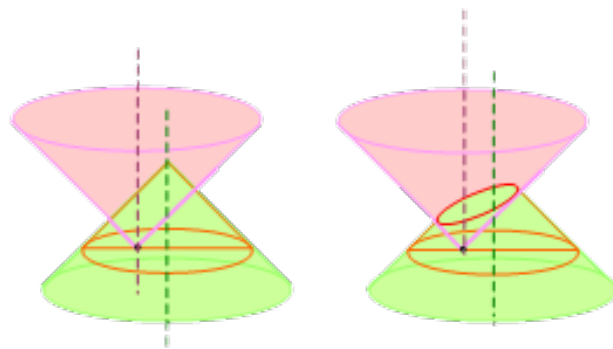
Nous avons utilisé le même mode opératoire que pour le cas précédent.

Lorsque l'écoulement s'arrête, nous pouvons constater que la couronne de sable est toujours percée d'un cratère mais la ligne de crête a changé : au lieu d'obtenir un cercle parallèle à la base, nous obtenons un *ovale incliné*. Nos professeurs et notre chercheur nous ont dit qu'il s'agirait d'une *ellipse*...



Quand le sable a retrouvé sa position d'équilibre, nous avons deux cônes : l'un est plein (en vert), l'autre est un cône vide (en rose). C'est deux fois le même cône : même angle de base et leurs axes sont parallèles puisque par gravité, l'entassement et l'écoulement se font verticalement.

Nous avons reproduit cette expérience avec des orifices situés de plus en plus loin du centre du disque de base : plus l'orifice est loin du centre, plus l'*ellipse* s'allonge.



Questions :

- Comment caractériser cette ligne de crête ?
- Qu'est-ce qu'une ellipse ?
- La ligne observée est-elle vraiment une ellipse ? En particulier est-elle plane ?

Analyse mathématique de cette ligne de crête

Notre première impression était un ovale, un cercle aplati. On nous parle d'ellipse mais aussi d'ellipse du jardinier. Nous avons donc un peu oublié le sable pour chercher dans toutes ces directions. En remarquant qu'il s'agit de courbes planes et que nous ne sommes pas sûrs que cette ligne de crête soit plane...

II-3- Enquête sur les ellipses

Il s'agit de caractériser, avec nos connaissances de collégiens, cette ligne de crête.

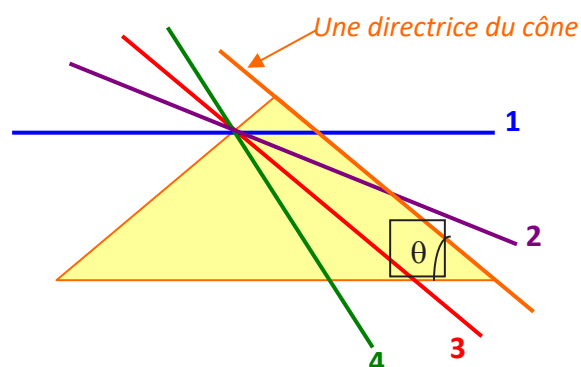
Nos professeurs nous disent :

- Elle est plane mais c'est difficile pour nous de le démontrer. Nous admettrons que c'est une ligne plane.
- C'est une conique, c'est-à-dire l'intersection d'un cône et d'un plan.
- Il y a plusieurs sortes de coniques et celle-ci est une ellipse.

Conique : Intersection d'un cône et d'un plan

Nous observons que si θ est l'angle de base du cône, le plan (ici en coupe) peut occuper plusieurs positions.

- 1- S'il est parallèle à la base, l'intersection est alors un cercle. C'est ce que nous avons observé au moment de l'écoulement du sable par un trou situé au centre du disque de base. Nous avons démontré alors que la ligne de crête était plane et circulaire. Un cercle fait donc partie de la famille des coniques.
- 2- L'angle que fait le plan avec le plan de base est inférieur à θ on obtiendrait une courbe appelée ellipse,
- 3- L'angle que fait le plan avec le plan de base est égal à θ on obtiendrait une courbe appelée parabole,
- 4- L'angle que fait le plan avec le plan de base est supérieur à θ on obtiendrait une courbe appelée hyperbole.



Expérience : l'ellipse du jardinier

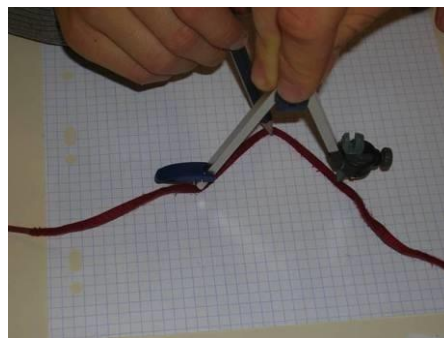
Nous avons tracé des ellipses que l'on appelle du jardinier car c'est la méthode qu'utilise le jardinier pour tracer ses parterres en formes d'ellipses.

La méthode :

Nous prenons un compas à deux pointes et une ficelle. Nous piquons la ficelle avec les deux pointes. La ficelle entre les deux pointes ne doit pas être tendue. Nous piquons les deux pointes sur une feuille de papier avec notre crayon nous tendons la ficelle. Et nous traçons en gardant la ficelle tendue: nous obtenons une ligne courbe qui s'appelle ellipse « du jardinier »

Nous mettons en évidence quelques points qui nous seront utiles.

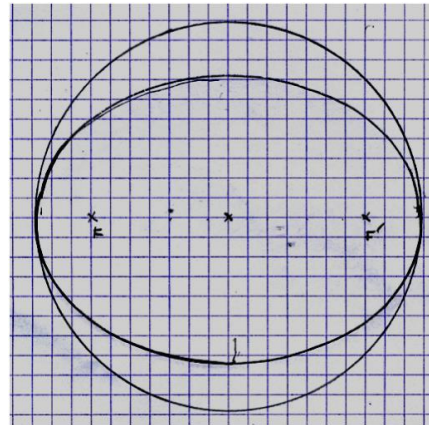
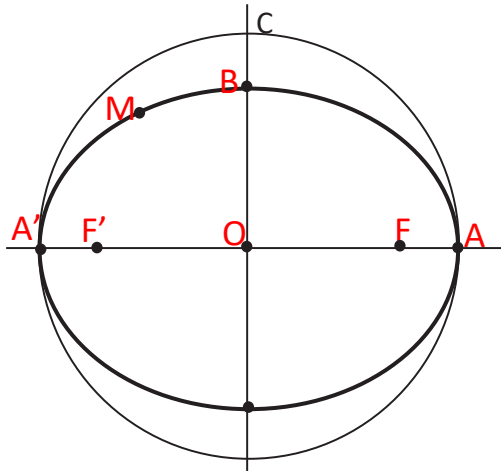
- F et F' sont les points où l'on a piqué les pointes du compas ; on les appellera les foyers.



- O est le milieu de $[FF']$.
- M est un point quelconque de la ligne obtenue.
- A et A' sont les deux points les plus éloignés de O .
- B est l'un des points intersections de l'ellipse et de la perpendiculaire à (AO) passant par O .

Nous avons tracé le cercle circonscrit à l'ellipse ; son diamètre est $[AA']$. P est son intersection avec (OB) .

Remarque : nous avons expérimenté d'autres dispositifs équivalents.



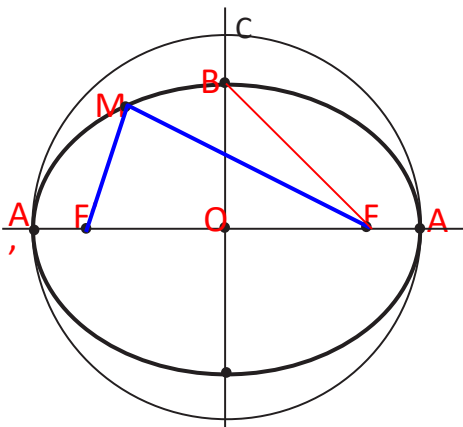
Des expériences successives, en modifiant deux paramètres, nous montrent que:

- Pour une ficelle de longueur constante, si nous écartons les foyers l'ellipse s'éloigne du cercle ; elle s'aplatit mais passe toujours par A et A' . À l'inverse si nous rapprochons les foyers alors l'ellipse se rapprochera du cercle jusqu'à se confondre avec lui lorsque les deux foyers sont confondus en O . On constate donc que le cercle du jardinier est un cas particulier de l'ellipse du jardinier.
- Si nous piquons toujours en F et F' fixes, mais que nous modifions la longueur de ficelle entre F et F' nous obtenons la même courbe mais à une autre échelle.

Analyse mathématique de la courbe obtenue

On décide de noter : $a = OA$ et $b = OB$

Alexandre, un élève de notre groupe, est parti sur une fausse piste. Il lui semblait que BC mesurait le quart de FF' . On a cherché à le prouver.



$FM + FM' = L$ (c'est la longueur de la ficelle)

Si M est en A , $FA + F'A = L$ or $FA = a - OF$ et $F'A = a + OF$. Donc $L = 2a$.

Si M est en B , $FB + F'B = L = 2a$, or $FB = F'B$ donc $FB = a$.

Dans le triangle FOB rectangle en O , on applique le théorème de Pythagore :

$$OB^2 + OF^2 = BF^2; OF^2 + b^2 = a^2; OF^2 = a^2 - b^2$$

$BC^2 = (a - b)^2$ et $FF'^2 = 2(a^2 - b^2)$ ce qui prouvait que la conjecture faite par Alexandre était fausse mais cela nous avait permis de trouver des résultats très intéressants pour la suite du travail.

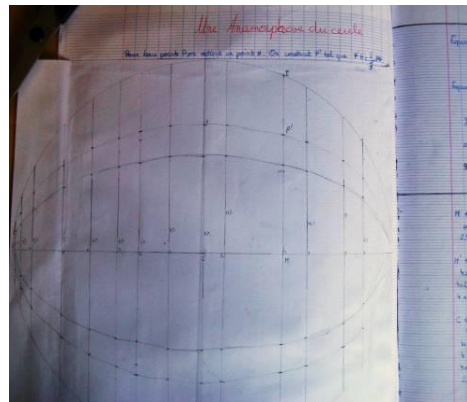
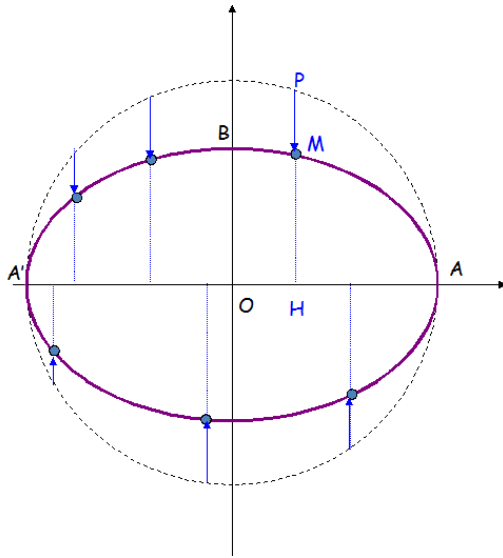
Retour à l'observation et construction d'une nouvelle courbe

En observant l'ellipse du jardinier et son cercle circonscrit nous pensons qu'une transformation géométrique pourrait permettre de transformer le cercle en ellipse : un « aplatissement ». Il ne s'agit pas d'une isométrie puisqu'elle ne conserve pas la forme. On propose la définition suivante :

Un cercle de diamètre $[AA']$, P est un point quelconque de ce cercle et H est le pied de la perpendiculaire à AA' passant par P . On donne un nombre $k \leq 1$.

On appellera *aplatissement de rapport k* , la transformation qui, à tout point P du cercle, on fait correspondre un point M tel que $HM = kHP$.

On construit alors point par point l'image du cercle de rayon OA .



En refaisant cette construction avec d'autres valeurs de k , nous obtenons toujours des lignes qui *ressemblent* beaucoup à l'ellipse du jardinier. Nous avons essayé avec $k = \frac{3}{4}, k = \frac{2}{3}, k = \frac{1}{2}, k = \frac{1}{3}, k = \frac{1}{4}$. Nous remarquons, comme nous l'avions prévu, que la courbe obtenue est d'autant plus aplatie que k est petit. Mais elle passe évidemment toujours par A et A' .

Comparaison des deux ellipses.

On est alors en présence de deux courbes qui se ressemblent et qui ressemblent à la ligne de crête qui nous intrigue. Il faut chercher si ce sont deux ou bien une seule courbe.

- L'ellipse du jardinier est caractérisée par ses foyers.
- Le cercle aplati est caractérisé par le nombre k .

En revenant aux notations de la courbe du jardinier il faudra que : $OB = kOC$; $k = \frac{b}{a}$ ou $b = ak$.

Or $OF^2 = a^2 - b^2$; $OF^2 = a^2 - a^2k^2$ ou encore $OF^2 = a^2(1 - k^2)$ et comme $k < 1$, il y a deux points de (AA') qui répondent à cette condition ; on les appelle F et F' .

Pour $k = 1/3$ et $AA' = 12$ cm,

- on construit point par point le cercle aplati pour $k = 1/3$,
- l'ellipse du jardinier avec $a = 6$ et $b = 6(1/3) = 2$ soit $OF = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$,
- on superpose les deux constructions. Elles coïncident exactement !

On a refait ces constructions, toujours avec $AA' = 12$ cm (ou $a = 6$ cm) :

Si $k = 3/4$, il faut $OF = 3$ cm. Si $k = 2/3$, $OF = 2\sqrt{3}$ cm.

Si $k = 1/2$, $OF = 3\sqrt{2}$ cm. Si $k = 1/4$, $OF = 3\sqrt{3}$ cm.

À chaque fois, on construit les deux courbes, on les superpose et on vérifie qu'elles coïncident.

Nous dirons qu'il s'agit de la même courbe. Mais, reste la ligne de crête de notre cône vidé. Comment prouver que c'est cette même ellipse ?

II-4- Autres expériences : plusieurs trous sont pratiqués dans le plateau

Nous nous sommes demandé ce que cela ferait si on perçait plusieurs orifices. Le résultat est très beau ! Nous avons juste observé : une ligne de crête se forme et elle est... assez complexe !

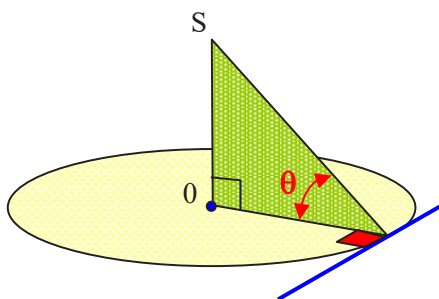


III- TAS à BASE IMPOSEE : POLYGONES

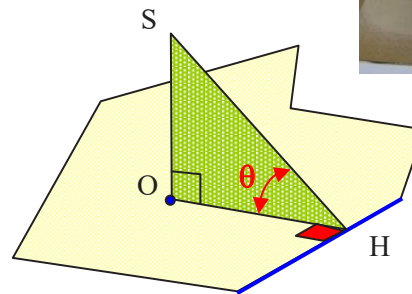
III-1- Carré, triangle, rectangle

Expériences, observations, réflexions, questions.

Le tas n'est plus « naturel » puisqu'il s'agit de verser le sable sur des pièces dont on a choisi la forme. On obtient le même résultat si on plonge la forme dans du sable et qu'on la sort en maintenant le socle bien horizontal. Le sable alors ne s'installe pas n'importe comment : il y a toujours la contrainte de l'angle de talus.



L'angle de talus θ dans le cas du cône



L'angle de talus θ dans le cas d'un polygone

Pour repérer cet angle θ on trace (on le tracera ainsi dans tout ce qui suit) un triangle rectangle SOH avec les conditions suivantes :

- S est le sommet du tas et O sa projection orthogonale sur la base (OS est donc la hauteur du tas),
- (OH) est perpendiculaire à la tangente en H , si la ligne est courbe,
- (OH) est perpendiculaire au côté si c'est un segment.
- De plus on rappelle que $OS = OH \cdot \tan \theta$.

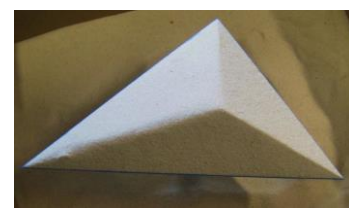
Après un grand nombre d'essais avec des socles différents, nous retenons les formes de base qui nous semblent importantes et, après tous ces essais, nous avons choisi de commencer par les formes les plus simples qui permettent de comprendre ce qui se passe dans ces tas.

➤ *Des formes simples : un carré, des triangles.*

Nous pouvons observer que ce solide a un sommet, c'est donc une pyramide. Inutile d'observer plusieurs carrés, ils sont tous pareils à une échelle près.

Par la suite, nous avons observé le tas engendré avec une forme de base triangulaire.

Plusieurs essais sur des triangles rectangles, isocèles, équilatéraux et quelconques, nous montrent que tous les tas qui ont une base triangulaire forment eux aussi des pyramides.



> *Le troisième cas simple : le rectangle.*

Cette fois ci, ce n'est plus une pyramide... Il y a une ligne de crête dont on sait évaluer la mesure.



Nous constatons, après ces trois essais, que nous avons deux familles de tas :

- Les pyramides (un sommet principal qui est le point de concours des arêtes autres que la base)
- Les non pyramides (une arête – que nous appelons arête faîtière car ça ressemble à un toit de maison – qui rejoint les points de concours des arêtes)

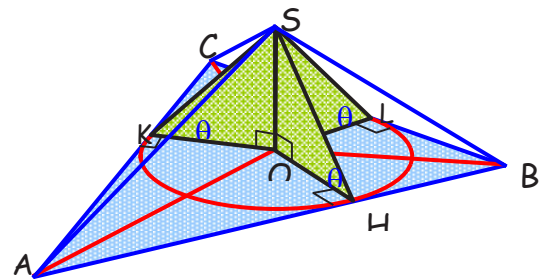
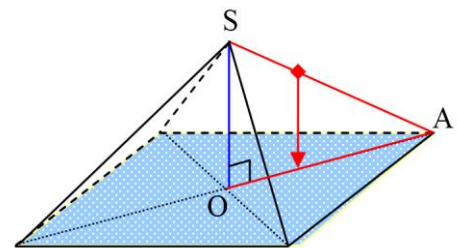
Question : Pourquoi avons-nous des pyramides pour un socle carré alors que pour un socle rectangulaire nous n'en avons pas ?

Analyse mathématique

Conjecture : Lors de nos premières observations, en particulier en regardant la pyramide faite avec une base carrée, nous avons émis l'hypothèse que les arêtes se projettent sur la base selon les bissectrices des angles.

Pour démontrer cette conjecture dans un cas plus général, plaçons-nous dans un triangle ABC quelconque.

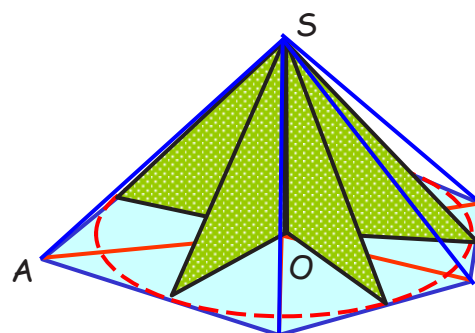
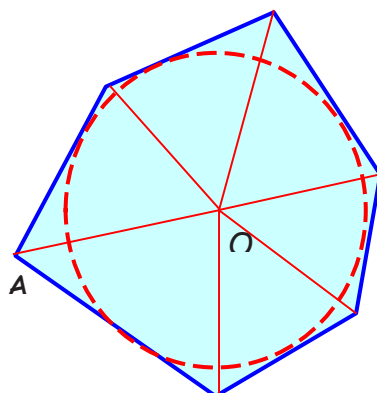
Les trois triangles SOL , SOK et SOH sont perpendiculaires aux côtés de la base. Ils ont donc l'angle de talus en H , K et L . Ces triangles ont un angle droit en O et un côté commun $[SO]$. Ils sont donc identiques. Donc $OH = OK$. Ce qui veut dire que O est sur la bissectrice de C . De même avec les distances OL et OK , ce qui démontre que O est le point de concours des bissectrices de la base, il est donc le centre du cercle inscrit à la base. $[AS]$ se projette en $[AO]$. Donc notre conjecture est vérifiée.



Généralisation. Nous savons que le centre du cercle inscrit dans un polygone est, quand il existe, le point de concours des bissectrices des angles du polygone. Nous pouvons ainsi affirmer que :

Lorsque le polygone de base admet un cercle inscrit (les bissectrices sont concourantes) le polyèdre de sable est une pyramide alors que, dans le cas contraire, ce n'est jamais une pyramide !

Pour être certains d'obtenir un tas de sable pyramidal, il suffit de tracer un cercle puis un polygone dont les côtés sont tangents au cercle. On découpe ce polygone, on verse le sable, on obtient la pyramide.



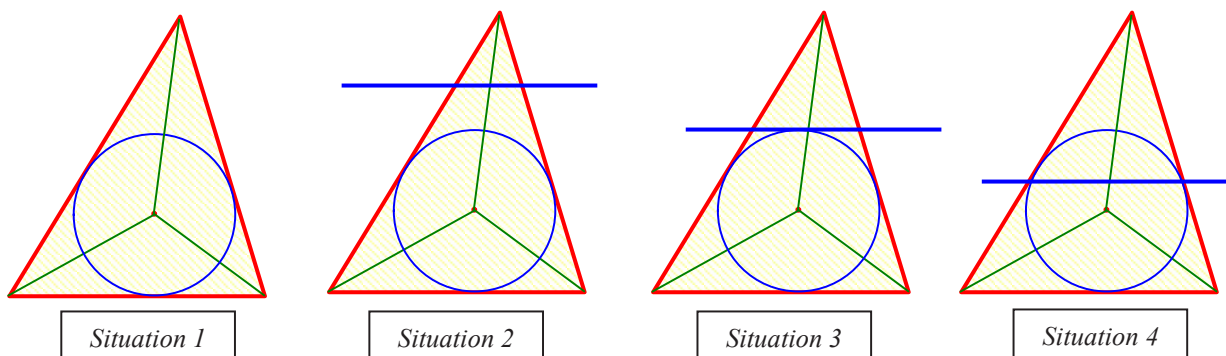
III-2- Trapèze

Avec ce qui a été démontré précédemment nous pouvons, à partir de n'importe quelle base polygonale convexe, prévoir sous forme de quel solide le sable va s'installer : il nous suffit de tracer les bissectrices des angles du polygone.

Intéressons-nous au cas du trapèze.

Préparation

Le trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles. Ici nous le ferons évoluer de la façon suivante : on part d'un triangle et on coupe parallèlement à un côté. Prenons d'abord 4 triangles superposables complets ; nous traçons les 4 cercles inscrits. Nous gardons le premier triangle en entier, puis nous allons couper les trois autres triangles toujours de la même façon – parallèlement à un des cotés – mais à des endroits différents :



Ce qu'on peut attendre :

- Situation 1 : cette situation est déjà rencontrée et développée. Tout triangle a un cercle inscrit, le tas sera une pyramide (un tétraèdre) dont le sommet se projette orthogonalement au point de concours des bissectrices du socle.
- Situation 2 : on a coupé avant le cercle inscrit on peut prévoir une arête faîtière.
- Situation 3 : on a coupé selon une tangente au cercle donc le trapèze a un cercle inscrit, on obtiendra une pyramide.
- Situation 4 : on a coupé après le cercle inscrit donc on doit obtenir une arête faîtière.

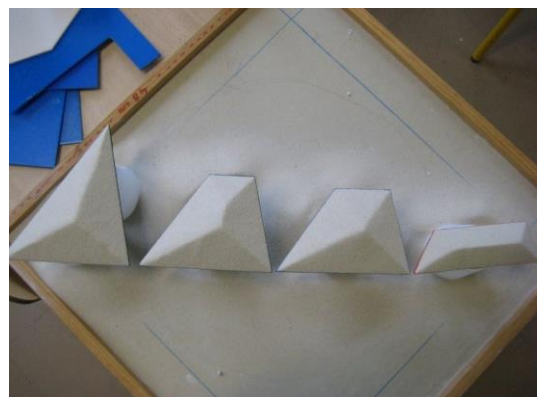
Expérimentation

Les situations 1 et 3 sont sans surprise.

Mais pour les 2 et 4, il faut revenir au travail mathématique puisqu'il s'est produit quelque chose que nous n'avions pas prévu : l'orientation de l'arête faîtière.

Dans la situation 2, l'arête faîtière part du plus haut sommet et descend ; elle n'est pas parallèle à la base.

Dans la situation 4, l'arête faîtière est parallèle à la base. Cela ressemble au cas déjà étudié du socle rectangulaire. Et nous ne sommes finalement pas très étonnés puisqu'un rectangle est un cas particulier de ce trapèze que nous avons choisi.



Retour à l'analyse mathématique :

> *Situation 2*

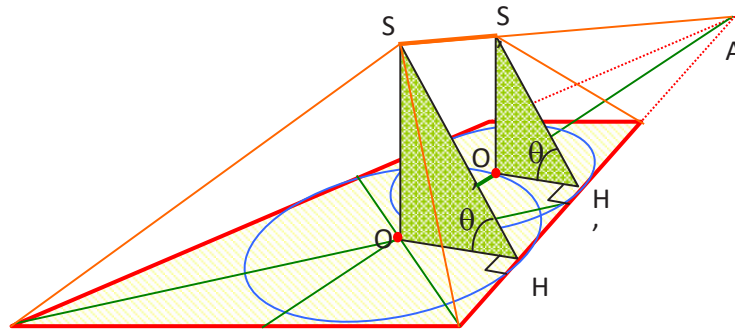
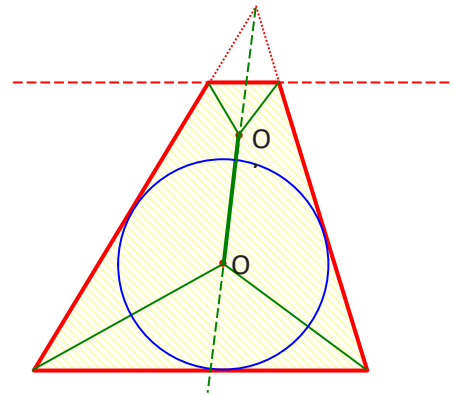
Nous avons tracé les quatre bissectrices des angles du socle. Comme prévu, elles ne sont pas concourantes. Les points O et O' sont les projetés des extrémités S et S' de l'arête faîtière.

L'analyse du dessin en 3D sur lequel on a mis en évidence deux triangles rectangles HSO et $H'S'O'$ qui ont un angle égal à l'angle de talus, nous trouvons :

$OS = OH \cdot \tan \theta$ et $O'S' = O'H' \cdot \tan \theta$ mais $OH < O'H'$ donc $OS < O'S'$ donc le segment $[SS']$ qui est l'arête faîtière *descend* comme nous l'avons constaté sur notre tas de sable.

De plus $OS - O'S' = (OH - O'H') \tan \theta$.

Si S' était en A , $O'H'$ serait égal à 0 donc la pente de (SS') est la même que celle de (SA) . Ce qui signifie que si nous prolongeons (SS') elle passe par le sommet A du triangle que nous avons coupé.



> *Situation 4*

Nous avons tracé encore les quatre bissectrices des angles du trapèze pour obtenir les points O et O' , projetés sur le socle des sommets S et S' .

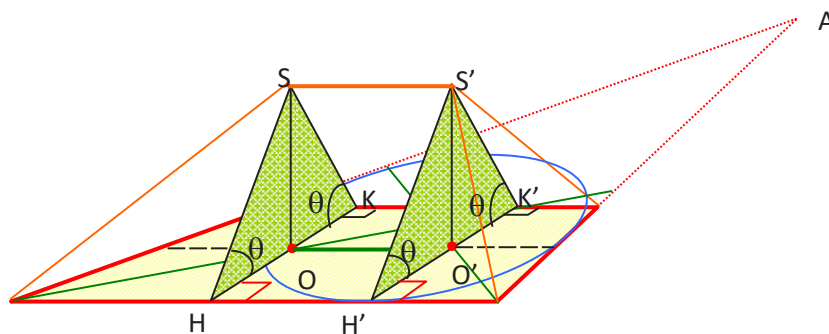
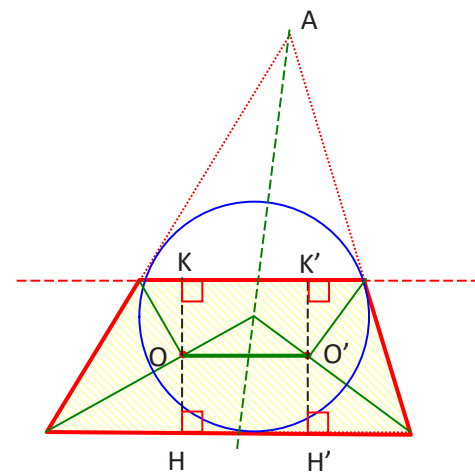
L'analyse du dessin en 3D sur lequel on a mis en évidence deux triangles isocèles HSO et $H'S'O'$ qui ont deux fois l'angle de talus à leur base, nous trouvons :

$OS = OH \tan \theta$ et $O'S' = O'H' \tan \theta$ mais $OH = O'H'$ donc $OS = O'S'$

Donc $(SS') // (HH') // (KK')$.

L'arête faîtière est parallèle au socle de base comme nous l'avons constaté sur notre tas de sable.

Et aussi : $OO' = SS'$.



III-3- Les polygones non convexes.

Expérimentation, réflexions, questions

Pour commencer l'étude des polygones non convexes, nous avons essayé de nombreuses formes « étranges » mais qui avaient toutes au moins un angle *rentrant*. Puis nous avons décidé d'étudier simplement un hexagone en forme de "L". En remarquant que les interrogations viendraient surtout de ce qui se passe au sommet M de l'angle rentrant.

Nous avons toujours découpé des L avec $a = 12$ cm et $b \leq 12$ cm. Nous avons expérimenté successivement avec $b = 12, b = 8, b = 6, b = 4, b = 3$ et $b = 1$.

Première expérience : $a = b$

L'observation de dessus : le socle a un axe de symétrie et on note que le tas de sable présente un plan de symétrie. La ligne de crête est faite de deux segments et une courbe que nous ne savons nommer.



L'observation à l'horizontale est plus surprenante : il y a une bosse nettement visible là où la ligne de crête est courbe !



Autres essais : $a > b$

Nous faisons alors l'expérience avec les autres valeurs de b . Parfois il y a une bosse, parfois il n'y en a pas !

Les questions qui se posent alors sont :

- quelle est la nature de cette courbe qui se forme au niveau de l'angle rentrant ? Et quelle est la nature de sa projection sur le socle ? On pense à des quarts de cercles. Puis, en observant qu'en M se produit un écoulement, on pense aussi à l'ellipse...
- La bosse peut-elle se justifier géométriquement ?

Recherche mathématique sur cette situation

Notons d'abord que l'angle OMS est un angle de talus, il mesure θ .

Pour simplifier les calculs on choisit a comme unité de longueur.

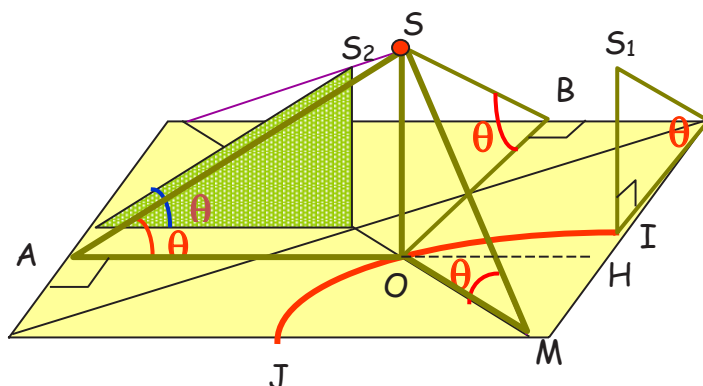
Soit : $a = b = 1$.

$$MI = MJ = \frac{1}{2} \quad IS_1 = \frac{1}{2} \tan \theta$$

qu'il faut comparer à OS .

Or $OS = OM \cdot \tan \theta$.

Pour comparer IS_1 à OS , il faut comparer OM à $\frac{1}{2}$.



Calcul de OM .

Les trois triangles OMS , OBS et OAS sont identiques.

Posons $OA = OM = OB = y$.

Dans le triangle OMH rectangle en H et isocèle :

$$y = (1 - y) \sqrt{2}.$$

$$\text{Soit } y = 2 - \sqrt{2} > \frac{1}{2}.$$

Conclusion $OM > \frac{1}{2}$ donc $OS > IS_1$.

Ce qui prouve trois choses :

- 1) il y a bien une bosse en S qui se projette en O sur le socle,
- 2) $2 - \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc O est plus près de M que le centre du carré,
- 3) $y = 2 - \sqrt{2} > \frac{1}{2}$ donc la courbe qui va de I à J en passant par O n'est pas un quart de cercle.

A ce moment du travail nous savons seulement ce qu'elle n'est pas. Nous allons avoir l'occasion de découvrir sa nature quand nous aurons plus de moyens à notre disposition (voir IV- 3).

Tentative de généralisation

À ce moment du travail, nous pouvons chercher à prévoir ce qui va se passer pour les autres valeurs de b . En effet, on vient de trouver que tout dépend de la valeur de OM c'est-à-dire y . Pour $b < 1$ le point O est toujours sur la bissectrice du carré.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OMH , il faudra donc résoudre l'équation :

$$y^2 = (1 - y)^2 + (b - y)^2 \quad (1)$$

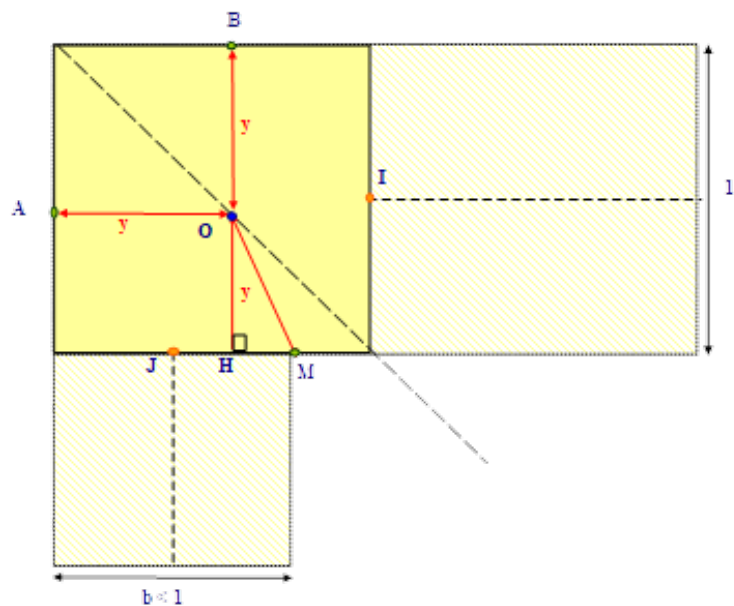
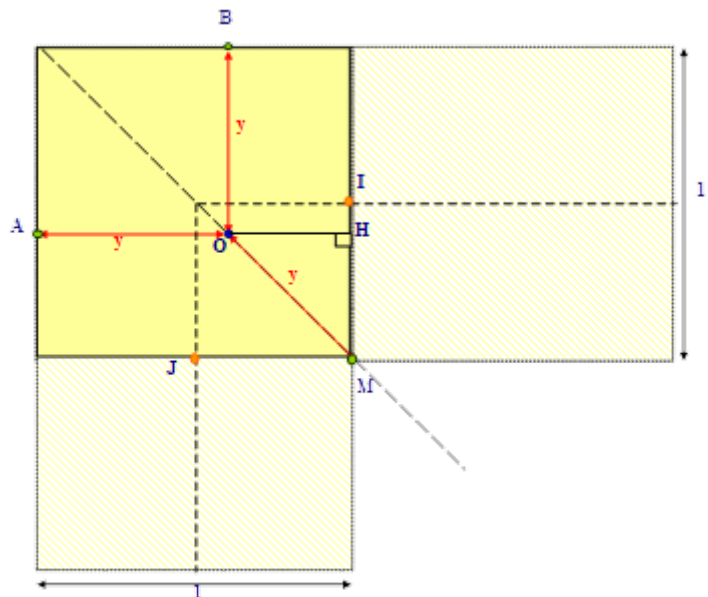
On a appris à résoudre les équations du second degré et nous avons fait ces résolutions pour les valeurs de b annoncées. A chaque fois, l'une des deux solutions est trop grande (supérieure à 1) donc refusée. L'autre valeur semble acceptable.

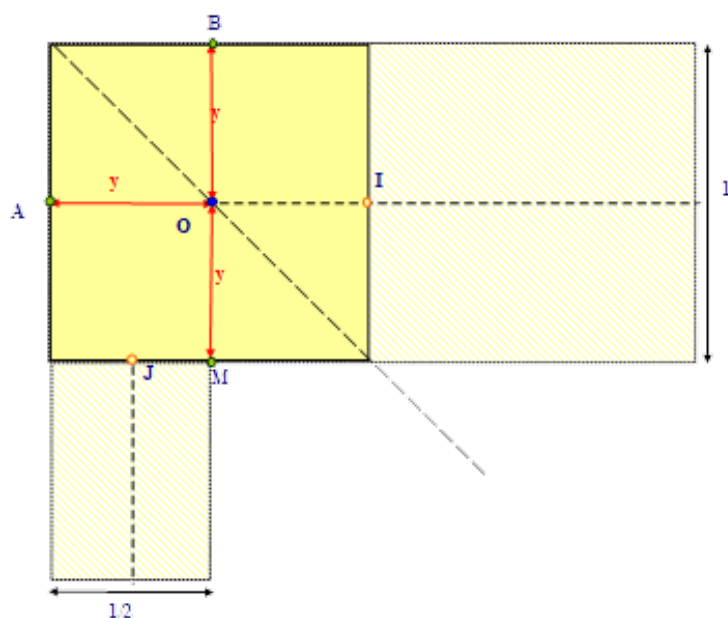
Si $b = 3/4$, l'équation devient $16y^2 - 56y + 25 = 0$.

La solution est $y = \frac{7-\sqrt{6}}{4} > \frac{1}{2}$ donc il doit y avoir une bosse.

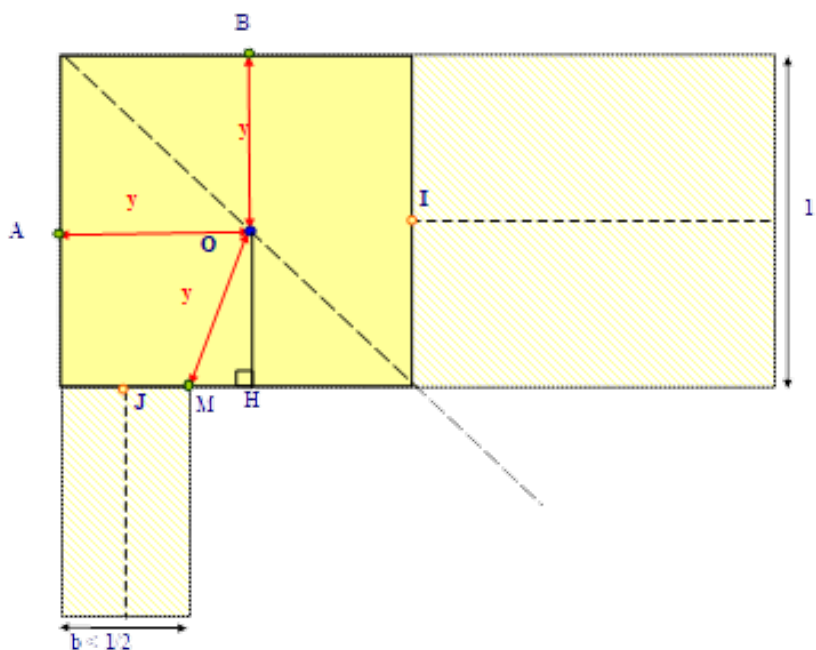
Si $b = 1/2$, l'équation devient $4y^2 - 12y + 5 = 0$.

La solution est $y = \frac{1}{2}$, il ne doit pas y avoir de bosse ! On remarque qu'on pouvait prévoir ce résultat en faisant le dessin du socle puisque M est sur (OB) !





Avec $b = 1/3$, l'équation devient $9y^2 - 24y + 10 = 0$ et a pour solution $y = \frac{4-\sqrt{6}}{3}$. Ce nombre est plus grand que $1/2$ donc il doit y avoir une bosse. Pourtant, en dessinant le socle, on note que le point M est « passé de l'autre côté de H ». Nous reprenons nos calculs.



Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle OHM donne alors :

$$y^2 = (1 - y)^2 + (y - b)^2 \quad (2)$$

Ce qui est la même équation que (1). Nous pensons alors que notre valeur de y est correcte.

Nous avons voulu confirmer par une méthode géométrique pour construire O et nous avons trouvé que ce point *ainsi caractérisé* était constructible.

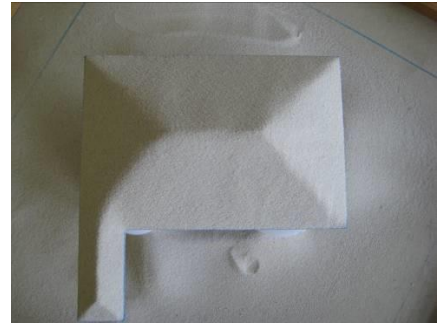
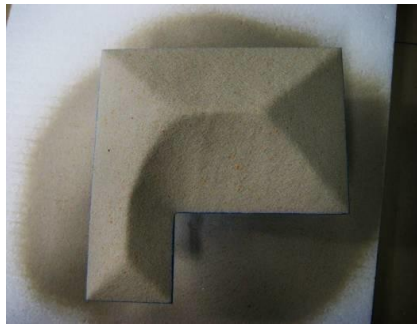
Retour à l'expérimentation.

Avec $b = 3/4$ nous avons prévu une bosse ; il y a une bosse. (photo 1)

Avec $b = 1/2$ il ne peut pas y en avoir ; il n'y a pas de bosse (photo 2)

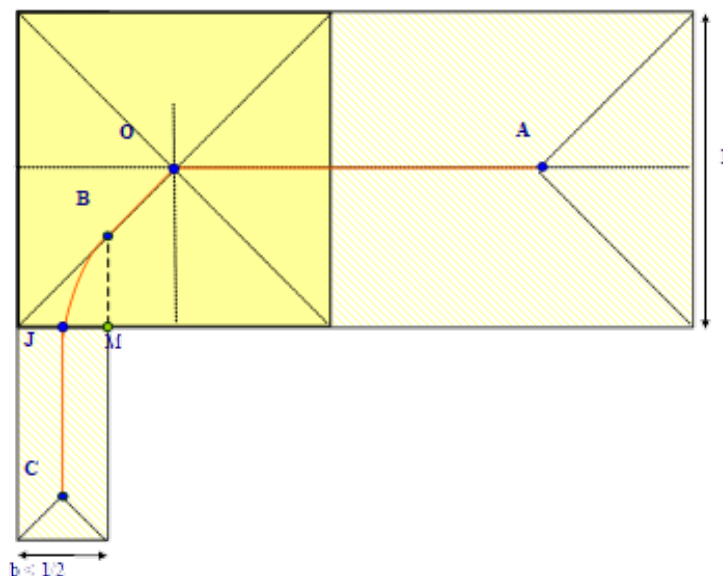
Avec $b = 1/3$ nous avons trouvé qu'il doit y avoir une bosse et... il n'y en a pas !! (photo 3)

Que se passe-t-il ? Où est l'erreur de notre raisonnement ?



Cette fois encore, c'est l'observation du tas qui nous fait comprendre notre erreur : nous avons mal positionné l'angle de talus !

La projection de la ligne de crête sur le socle est mixtiligne : deux segments $[AO]$ et $[OB]$, une courbe de B à J et un segment $[JC]$. Plus tard nous avons pu trouver la nature de la ligne de B à J (voir IV-3).



Position de B , projeté du point où la ligne de crête change de forme. B est sur la bissectrice d'un angle du carré donc $BK = BM = b$. $BN = b\sqrt{2}$

et $ON = \frac{\sqrt{2}}{2} (2)$ donc $OB = \left(\frac{1}{2} - b\right)\sqrt{2}$.

On peut aussi connaître l'altitude h où se fait la transition : en M , on a l'angle de talus : $h = b \tan \theta$.

Par exemple, si $b = 1/4$ on trouve $OB = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\sqrt{2}$, ou $OB = \frac{\sqrt{2}}{4}$ donc B est au milieu de ON (avec le théorème de la droite des milieux, on aurait dû prévoir !) ; l'altitude en B est la moitié de l'altitude en O et le double de l'altitude en J .

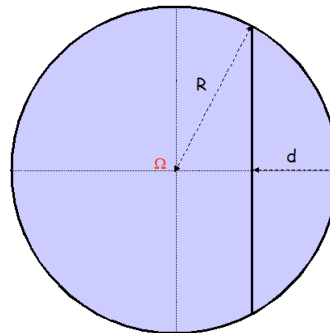
On a réussi à accorder la géométrie et l'expérience !

IV- TAS à BASE IMPOSÉE : FRACTION de DISQUE

IV-1- Etude de cette nouvelle situation

Expérimentation

Prenons un disque de centre O et de rayon R , coupons-le selon une corde. On note $R - d$ la distance entre O et la corde. Comme dans les expériences précédentes nous maintenons ce socle horizontal et nous versons le sable. Observons. Nous obtenons d'un côté une pente semblable à celle du cône. De l'autre côté nous voyons une ligne de crête courbe ; nos professeurs l'ont appelée parabole. Mais nous nous sommes dit que ça ressemblait beaucoup à une portion de cercle ou à une partie de la ligne de crête obtenue lors de l'écoulement de sable (cas du trou décentré). Nous avons besoin de les différencier et Dominique Bénard nous a suggéré de découvrir les équations de courbes.

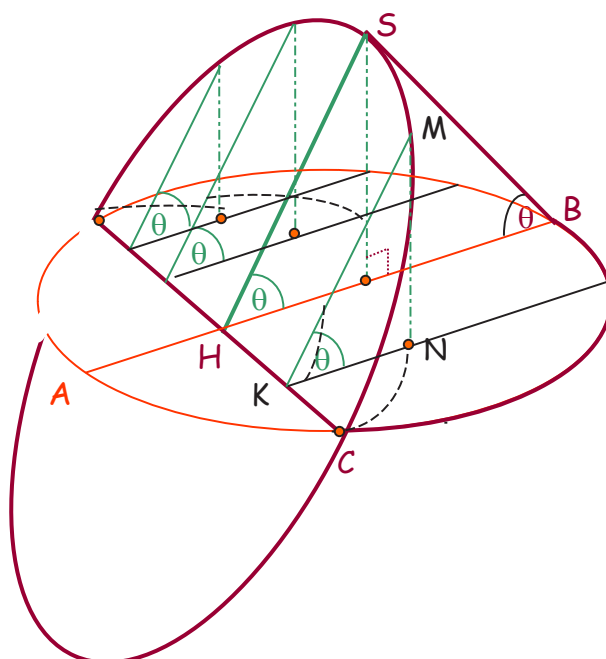


Dans cette expérience le seul paramètre modifiable est la valeur de d , entre 0 et $2R$. La ligne de crête semble conserver la même forme et la surface limitée par cette ligne et le bord du socle semble plane.

Première tentative d'analyse géométrique du tas obtenu avec un disque coupé

Comme pour les tas précédents, l'angle de talus va nous éclairer.

M étant un point quelconque sur la ligne de crête. K est le pied de la perpendiculaire à (HC) passant par M et N est le projeté orthogonal de M sur le socle. Tous les triangles MNK sont rectangles et ont l'angle de talus. Ils sont tous semblables (à une échelle près) et toutes les droites (KM) sont parallèles.



Ce qui démontre que la ligne de crête est plane et le plan qui la contient contient aussi la corde de coupe. Cette ligne de crête est bien l'intersection d'un cône et d'un plan : c'est une conique.

Mais quel type de conique ? Un cercle ? Une ellipse ? Ou autre chose que nos professeurs appellent parabole (voir II-3).

Pour répondre à nos questions, Dominique Bénard nous a suggéré de travailler sur l'équation de cette courbe. Il nous faut d'abord apprendre ce qu'on appelle équation d'une courbe.

IV-2- Equation de courbe

Définition. Une équation de courbe c'est tout simplement une condition pour qu'un point appartienne à cette courbe.

Il faut que la courbe soit tracée dans un repère.

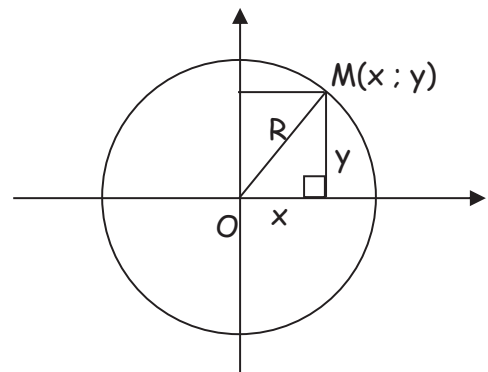
Dans un repère un point M est caractérisé par deux nombres qu'on appelle ses coordonnées et que l'on note $(x ; y)$. L'équation de la courbe est la relation que doivent vérifier les deux nombres x et y pour que M soit un point de la courbe. Si la relation n'est pas vérifiée, M ne sera pas sur la courbe.

Exemple 1 : équation d'un cercle

On choisit un cercle de centre O origine du repère

Il est simple de prouver que $M(x ; y)$ sera sur le cercle de centre O et de rayon R à condition que $OM = R$ ou encore $OM^2 = R^2$ mais $OM^2 = x^2 + y^2$ donc l'équation de ce cercle est :

$$x^2 + y^2 = R^2$$



Exemple 2 : équation d'une ellipse

L'autre courbe que nous avons rencontrée est l'ellipse du jardinier ou cercle aplati (voir II-3).

Nous savons comment passer du cercle à l'ellipse et nous avons l'équation du cercle ; nous pouvons donc trouver l'équation de l'ellipse où $OB = b$; $OA = a$.

Si $M(x; y')$ est sur le cercle (de rayon a) et si $P(x; y)$ est sur l'ellipse c'est que $y = ky'$ ou encore $y' = y/k$ mais $k = b/a$ donc $y' = ay/b$.

La condition pour que M soit sur le cercle est que :

$$x^2 + y'^2 = a^2$$

donc la condition pour que P soit sur l'ellipse est que :

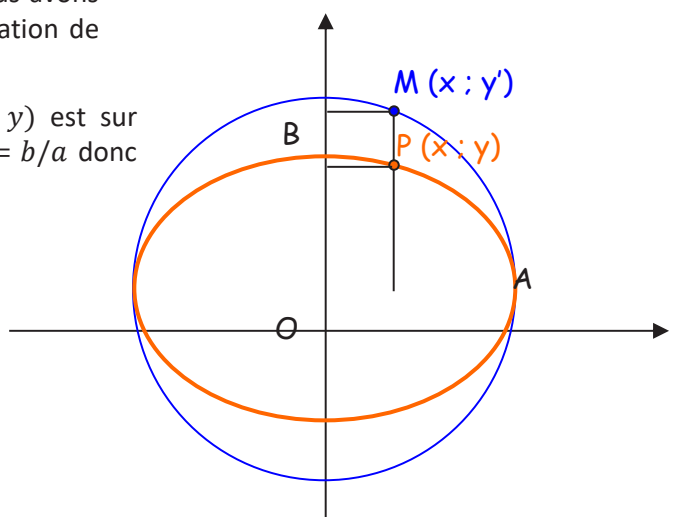
$$x^2 + \frac{a^2 y^2}{b^2} = a^2$$

et, en divisant par a^2 ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

C'est l'équation de cette ellipse.

Et, quand on trouvera cette équation, on pourra reconnaître une ellipse.



Recherche d'une équation pour notre ligne de crête

On cherche à trouver l'équation de la ligne de crête observée sur le tas de sable dont le socle est une fraction de disque. Nous avons remarqué que cette ligne ressemble à une partie de cercle ou à une partie d'ellipse. Si on connaissait son équation on pourrait les comparer.

NB : Nous avons beaucoup cherché avec l'aide de nos professeurs ; il faut travailler dans quatre plans différents et nous avons beaucoup d'équations. Finalement nous avons « trié » pour simplifier au maximum ce qui est la méthode d'Apollonius revue par Galilée (d'après notre chercheur).

Choix du repère

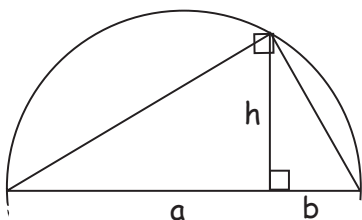
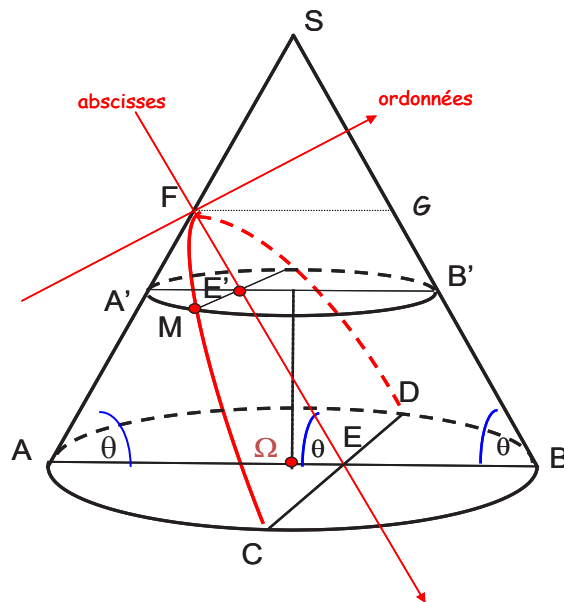
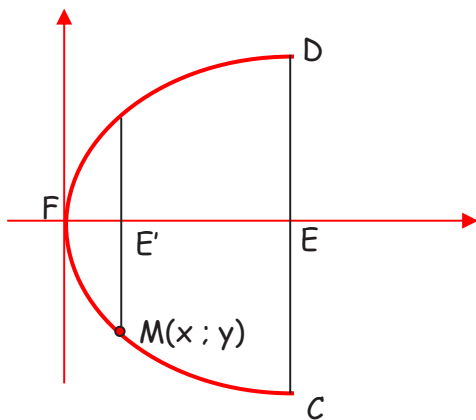
- l'origine est en F , sommet du tas,
- l'axe des abscisses est (FE) ,
- l'axe des ordonnées est la perpendiculaire en F à (FE) dans le plan qui contient D, F et C .

Dans ce repère $M(x; y)$ est un point quelconque de la courbe.

On trace le cercle passant par M et parallèle au socle de base.

On voit sur le schéma les autres points ; l'angle de talus a été agrandi pour mieux voir.

On remarque que $(ME'') \perp (A'B')$ et $(CE) \perp (AB)$.



Nous cherchons une condition pour que M soit sur la ligne de crête. Nous avons besoin d'une propriété, démontrée par Euclide (quadrature du rectangle - voir annexe) qui dit que, dans un triangle rectangle :

$$h^2 = ab$$

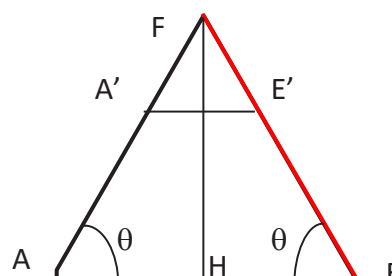
On l'applique dans le cercle de diamètre $[A'B']$:

$$ME'^2 = A'E' \times E'B'$$

Et dans le cercle de diamètre $[AB]$:

$$CE^2 = EA \times EB$$

Mais $E'B'BE$ est un parallélogramme donc $E'B' = EB$



Donc $\frac{ME'^2}{CE^2} = \frac{A'E' \times E'B'}{EA \times EB} = \frac{A'E'}{AE} \cdot (1)$

Dans le triangle isocèle FAE on applique le théorème de Thalès : $(A'E') // (AE)$ donc $\frac{A'E'}{AE} = \frac{FE'}{FE}$.

En reportant dans (1) : $\frac{ME'^2}{CE^2} = \frac{FE'}{FE}$, or $FE' = x$ et $FE = \frac{HE}{\cos \theta} = \frac{AE}{2 \cos \theta} = \frac{2R-d}{2 \cos \theta}$.

Finalement : $\frac{y^2}{d(2R-d)} = \frac{x(2 \cos \theta)}{2R-d}$ soit $\frac{y^2}{d} = x(2 \cos \theta)$ (3)

$y^2 = (2d \cos \theta)x$ ou $y^2 = kx$; ce qui est l'équation de notre courbe.

Bilan

On a rencontré 3 coniques avec 3 sortes d'équations différentes :

- Le cercle : $x^2 + y^2 = R^2$
- L'ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Notre courbe : $y^2 = kx$.

Notre courbe n'est donc ni une ellipse ni un cercle mais c'est une troisième conique : une parabole.

IV-3- Applications : retour sur des questions restées sans réponses.

Dans le paragraphe III-3 nous nous demandions quelle était la nature de l'arc entre I et J dans la situation 1 où les deux parties ont la même largeur. On a seulement prouvé que cet arc n'est pas un quart de cercle. En recherchant son équation on tente de trouver sa nature.

La condition pour que $P(x; y)$ soit sur la courbe entre O et J est que $PM = PH$.
Ou encore $MP^2 = PH^2$.

$$MP^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$$

$$PH^2 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2$$

La condition devient :

$$y^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2$$

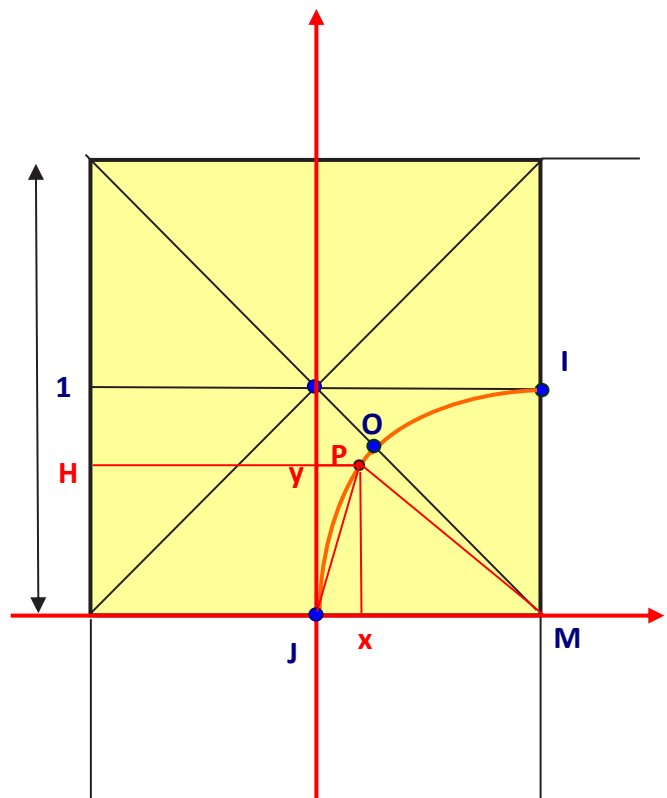
L'équation de la courbe entre O et J est donc

$$y^2 = 2x ; \text{ on reconnaît l'équation d'une parabole.}$$

Entre I et O les conditions ne sont pas les mêmes mais la droite (OM) est un axe de symétrie la courbe sera la même.

Conclusion : entre I et J la projection de l'arête faîtière est faite de deux arcs de paraboles.

Remarque : On peut penser que la ligne de crête est aussi deux morceaux de paraboles mais on ne sait pas. Il faudrait encore chercher !



Dans le paragraphe III-3 encore on n'a pas trouvé la nature de l'arc entre I et J dans la situation 4 où b est plus petit que $1/2$. On va chercher l'équation de l'arc entre B et J (projeté de la ligne de crête).

On fait le choix du repère, et on cherche une condition pour qu'un point $P(x; y)$ soit sur cette courbe.

Au dessus des segments $[PH]$ et $[PM]$ il y a l'angle de talus donc $PH = PM$

$$PH = \frac{b}{2} - x$$

$$PM^2 = y^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2$$

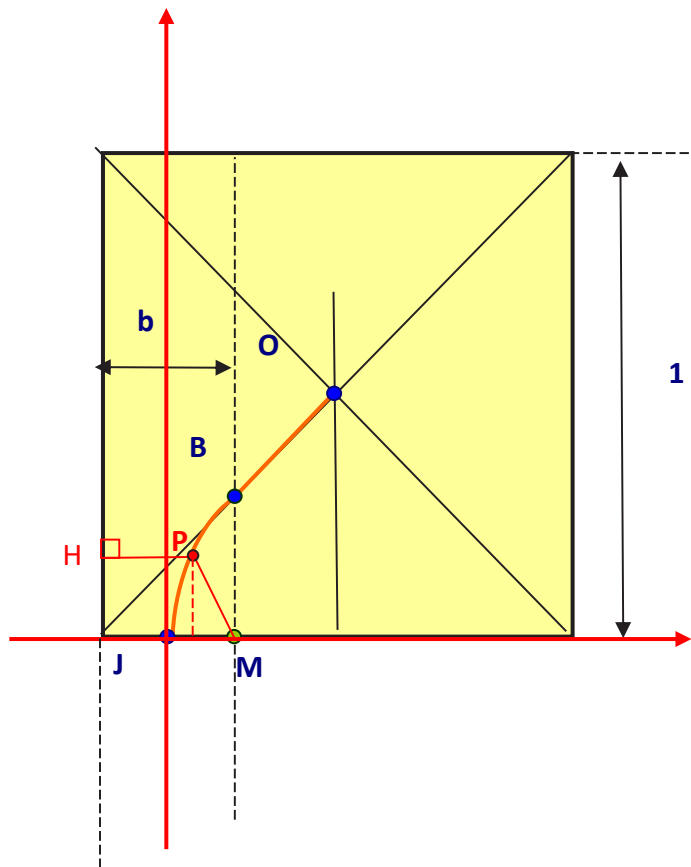
En résumé, P est sur la courbe si :

$$y^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2$$

ou $y^2 = 2bx$; on reconnaît l'équation d'une parabole.

Conclusion : entre B et J , le projeté de la ligne de crête est un arc de parabole.

Remarque : On peut penser que la ligne de crête est aussi un morceau de parabole mais on ne sait pas. Il faudrait encore chercher !



V- CONCLUSION

Ce travail nous a occupés pendant deux années scolaires et il n'est pas fini. Il ne sera jamais fini. Nous avons aussi appris cela en jouant les « mathématiciens chercheurs » ! Les maths ont une histoire. Cette histoire a commencé il y a très longtemps : on a « croisé » des Grecs anciens, Apollonius, Thalès et Pythagore, Euclide. Plus près de nous on a évoqué Galilée. Et puis on a rencontré un chercheur *vivant* qui nous a parlé de la recherche aujourd'hui : les mathématiques avancent encore.

On a bricolé nos tas de sable, c'était plutôt agréable. Et puis on s'est mis à faire des math sans trop de douleur mais en y passant beaucoup de temps, emportés par la curiosité. La confrontation entre théorie et expérience n'est pas si courante en mathématiques, c'est une des richesses de ce sujet.



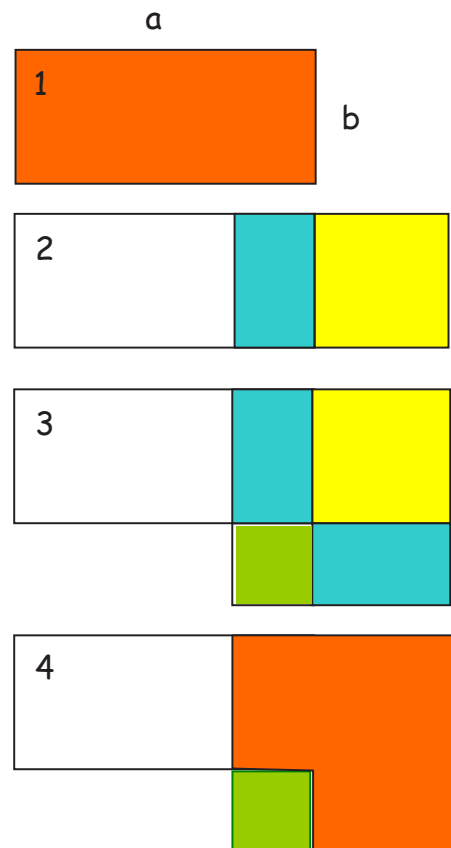
Annexe

Quadrature du rectangle selon Euclide

L'objectif est de construire un carré qui a la même aire qu'un rectangle donné. Sans faire aucune mesure.

Première partie : Construire un « gnomon » de même aire que le rectangle orange

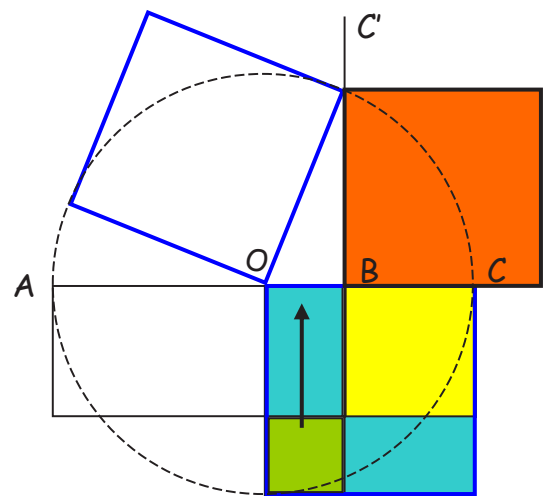
- 1) On juxtapose au rectangle un carré (jaune) de côté b . On obtient un rectangle dont les côtés sont b et $a + b$.
- 2) On le partage en deux rectangles égaux donc l'aire orange est faite de deux aires bleues et une aire jaune.
- 3) On trace le carré sous le demi-rectangle. Il est constitué de quatre pièces : le carré jaune, deux rectangles bleus (on démontre que ces deux rectangles sont de même aire) et un petit carré vert.
- 4) On appelle « gnomon » (*grec : ce qui fait connaître*) l'hexagone orange formé des trois pièces, bleues et jaune. Ce gnomon a donc la même aire que le rectangle orange.



Partie deux : On trouve dans le livre d'Euclide « Les Eléments » une démonstration du théorème de Pythagore. Il utilise ce théorème pour terminer la quadrature. Il reste en effet à trouver un carré de même aire que le gnomon.

On prolonge le petit côté du rectangle orange jusqu'à son intersection C' avec le cercle de centre O et de rayon $(a+b)/2$. On fait tourner le grand carré autour de O jusqu'à C' ; le triangle OBC' est rectangle en B . On construit le carré orange de côté $[BC']$ et on remarque que le petit carré vert a pour côté OB . D'après le théorème de Pythagore, (4) le carré de côté $[OC']$ moins le carré vert égale le carré orange : le carré orange a la même aire que le rectangle orange.

CQFD nous dit Euclide !

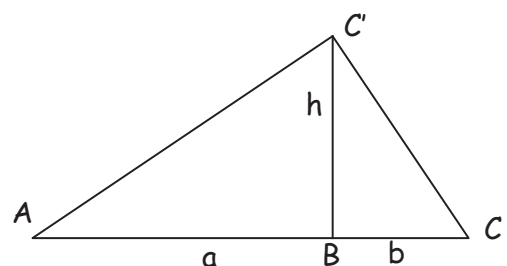


Application

L'aire du rectangle est $A = ab$ l'aire du carré est BC'^2 donc $BC'^2 = ab$.

Mais ACC' est rectangle en C' . Ce qui démontre que dans un triangle rectangle $h^2 = ab$.

C'est ce que nous avons utilisé dans IV-2 (équation de notre ligne de crête).



Autres définitions et théorèmes utilisés pour nos recherches

Polygone : figure plane qui a plusieurs (*poly*) angles (*gone* en grec). On remplace *poly* par un préfixe tel que *tri* (3), *tétra* (4), *penta* (5), *hexa* (6) etc. Ainsi un hexagone est un polygone à 6 angles donc à 6 côtés.

Polyèdre : solide (3D) qui a plusieurs faces.

Pyramide : polyèdre dont la base est un polygone et dont les faces latérales sont des triangles.

Tétraèdre : pyramide à quatre faces. Ses faces sont donc toutes triangulaires.

Théorèmes de la droite des milieux (cas particulier du théorème de Thalès):

- dans un triangle la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.
- dans un triangle, la droite parallèle à un côté qui passe par le milieu d'un autre côté passe aussi par le milieu du troisième côté.

Théorème de Thalès : « Si on mène une droite parallèle à un côté d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle » (*Euclide. Les Eléments. Sixième livre. Proposition II. Traduction F.Peyrard*)

Théorème de Pythagore : « Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés contenant l'angle droit » (*Euclide. Les Eléments. Livre premier. Proposition 47. Traduction B.Vitrac*).

Bissectrice d'un angle (ou l'axe de symétrie de l'angle) : C'est la droite formée de tous les points équidistants des deux côtés de l'angle.

Cercle inscrit dans un polygone : C'est le cercle (s'il existe) qui est tangent à chacun des côtés du polygone.

Théorème des bissectrices des angles d'un triangle : dans un triangle les bissectrices des trois angles sont concourantes et leur point d'intersection est centre du cercle inscrit dans le triangle.

NOTES D'ÉDITION

(1) A désigne l'aire du triangle représenté en vert sur la figure

(2) La diagonale d'un carré de côté x est de longueur $x\sqrt{2}$.

(3) On rappelle que $ME' = y$ (par le choix du repère). De plus, $AE = 2R - d$ (cf. dessin du disque en début de paragraphe IV.1). Enfin, par le théorème de Pythagore, on a la relation : $CE^2 = \Omega C^2 - \Omega E^2 = R^2 - (R - d)^2 = d((2R - d))$.

(4) On a en effet $BC^2 = ((a+b)/2)^2 - ((a-b)/2)^2 = ab$.

LOI DE ANTOINE 8

Si A et B et n sont des nombres différents de 0, $\frac{A}{B} = \frac{N \times A}{N \times B}$

LOI DE RÉMI 3

Dans les divisions, si on en fait une, et après une autre qui est le double, ça ne change pas le résultat.

$$A \div B = (2 \times A) \div (2 \times B)$$

Les carrelages

Année 2010

Par Antoinette Dounia Maëva Sarah Kelly, élèves de 4e

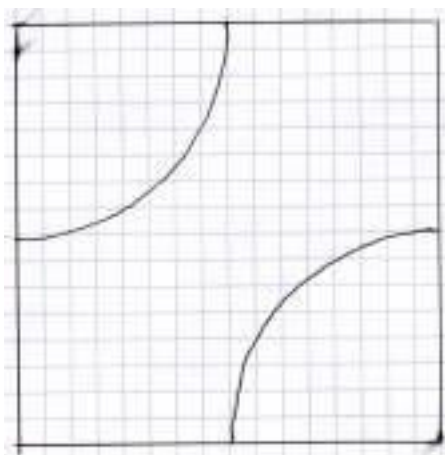
Encadrés par : Sylvain Cayzac et Yannick Garbez

Établissement : Collège Henri Sellier de Bondy

Chercheur : Vivien Ripoll (Université Paris 7 et ENS Ulm)

Introduction.

Notre sujet consiste à faire un pavage avec un modèle de carrelage unique : c'est un carreau carré avec à l'intérieur deux quarts de cercle ayant pour centre deux sommets opposés.



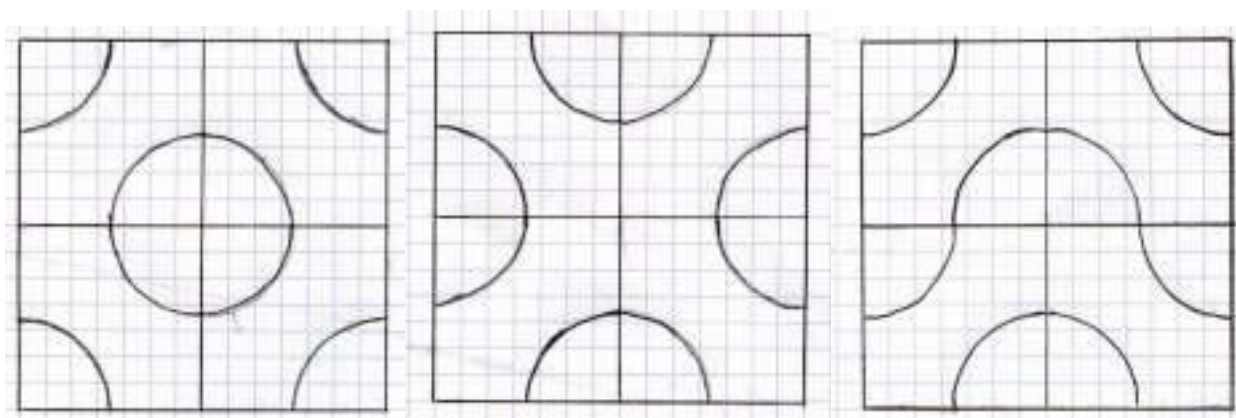
On se propose de compter le nombre de possibilités.

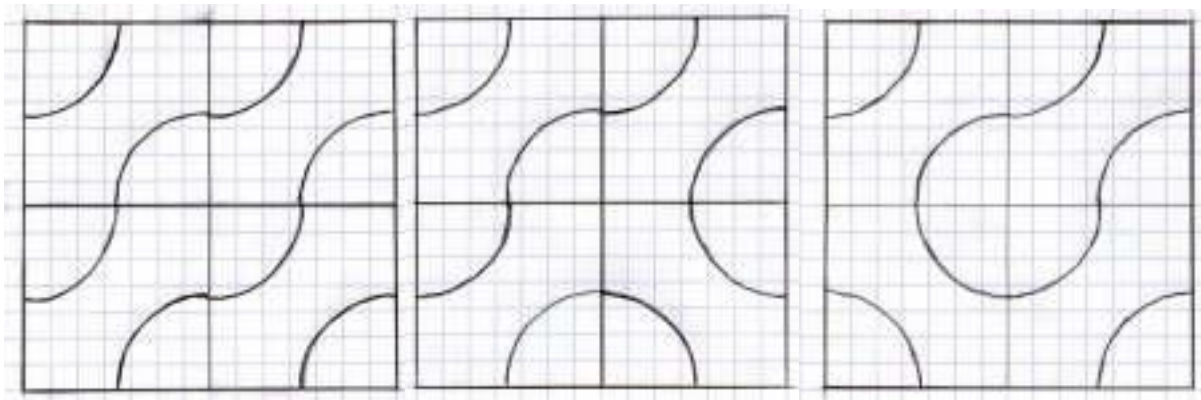
Pavage de taille 2×2

Nous avons cherché combien il y avait de façons différentes de poser les 4 carreaux :

Il y a **16 possibilités** ($16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$).

Nous avons ensuite cherché parmi les 16 possibilités, combien de dessins étaient différents à rotation ou symétrie près : il y en a 6.





Pavage de taille 2×3

Pour un pavage de taille 2×3 , nous avons commencé par chercher le nombre de possibilités différentes de poser les 6 carreaux, comme pour le 2×2 . Contrairement à ce que nous avons fait pour le pavage 2×2 , nous n'avons pas redessiné toutes les possibilités mais nous avons trouvé une méthode pour calculer directement leur nombre.

Nous avons trouvés **64 possibilités** de faire des dessins.

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

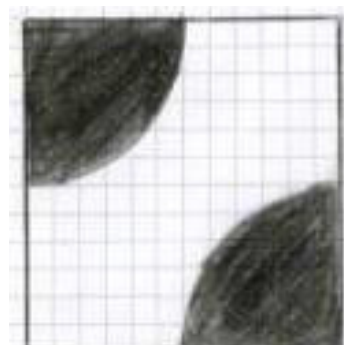
Pavage de taille $n \times p$

Nous avons imaginé un pavage de taille quelconque, c'est-à-dire avec n carreaux en longueur et p en largeur. Pour calculer le nombre de possibilités différentes pour un tel pavage, on fait $2^{n \times p}$.

- « 2 » correspond au nombre de possibilités de tourner un carreau.
- Et on fait $n \times p$ pour connaître le nombre de carreaux que peut contenir le pavage.

Les carrelages en couleur

Nous avons décidé ensuite de colorier les carrelages de deux façons différentes (noir ou blanc). Le problème que nous nous sommes posé a alors été de savoir si on pouvait toujours faire un pavage « joli ». C'est-à-dire, avoir du noir face à du noir et du blanc face à du blanc. Voici ci-dessous les deux carreaux de base en couleur (à gauche un « noir » et à droite un « blanc »).



Pavage de taille 2×2 :

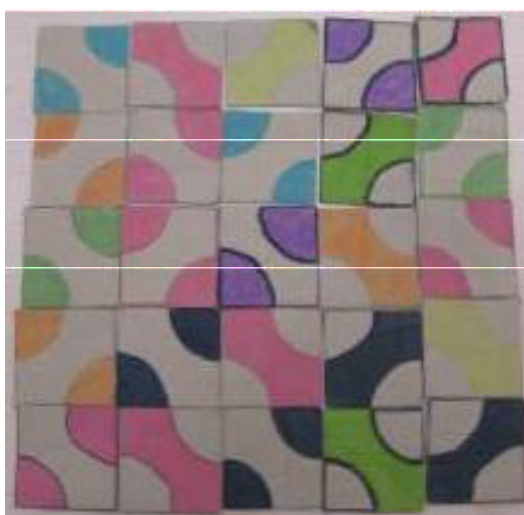
Pour choisir les 4 carreaux parmi les blancs et les noirs, il y a 5 possibilités différentes. On peut prendre 0 noir et 4 blancs ou bien 1 noir et 3 blancs ou bien 2 noirs et 2 blancs ou bien 3 noirs et 1 blanc ou enfin 4 noirs et 0 blanc.

Cas général :

Pour choisir un nombre N de carreaux parmi les blancs et les noirs il y a $N + 1$ possibilités.

Résultat

Indépendamment de la taille du pavage et du choix du nombre de carrelage blancs et noirs, il est toujours possible de faire un pavage « joli ». C'est-à-dire, toutes les parties coloriées face aux parties coloriées (à l'exception des bords du pavage !).



LOI DE JONATHAN 1

Il existe deux sortes d'infini :

L'infiniment grand : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...

L'infiniment petit : -1, -2, -3, -4, -5, -6,...

LOI DE DHIA 1

25 se divise seulement par 1, 5 et 25 :

$$25 \div 25 = 1$$

$$25 \div 5 = 5$$

$$25 \div 1 = 25$$

Les carrés magiques

Année 2010-2011

Honorine Counil, Mélanie Magnoux, Ingrid Martin, élèves de classes de 5e

Encadrées par Nathalie Robert, Dominique Direxel

Etablissement : Collège Fernand Garandeau (La Tremblade)

Chercheur : Gilles Bailly-Maître (Université de La Rochelle)

Le sujet : Comment construire un carré magique ?

Définition : Un carré magique est une grille carrée dont chacune des cases contient un nombre et qui est telle que toutes les lignes horizontales, verticales et diagonales ont la même somme.

1) Comment construire un carré magique de 9 cases

Nous avons déjà cherché à remplir un carré magique contenant les nombres de 1 à 9, dont la somme (1) était 15 (2).

Quel nombre doit-on mettre dans la case du milieu ?

Le 9 ne peut jamais être au centre car s'il est aligné avec le 8, la somme est 17 (3) ; il ne peut non plus être aligné avec le 7 et le 6 car le résultat serait au-dessus de 15.

Le 7 ne peut jamais être au centre car s'il est à côté du 9 la somme est au-dessus de 15 (4).

Le 3, placé au centre ne fonctionne pas car $9 + 3 = 12$ et $12 + 3 = 15$; chaque nombre ne doit être mis qu'une seule fois dans le carré.

Le 2 et le 1 ne peuvent pas convenir car ils seront forcément alignés avec des nombres inférieurs à 6 et donc la somme (5) ne peut faire 15.

Le 5 peut convenir quand il est sur la case du milieu (6).

Exemple :

6	7	2
1	5	9
8	3	4

En faisant tourner les nombres d'un quart de tour, on retrouve la même somme.

2) Peut-on trouver un carré magique avec les nombres de 11 à 19 ?

On part du carré précédent et on ajoute 10 à chaque nombre.

La somme est $45 = 15 + 3 \times 10$.

16	17	12
11	15	19
18	13	14

Quand on a trouvé un carré magique, on peut en définir d'autres en ajoutant un même nombre dans chaque case du carré.

Par ce procédé on a trouvé d'autres carrés magiques :

46	47	42
41	45	49
48	43	44

76	77	72
71	75	79
78	73	74

96	97	92
91	95	99
98	93	94

Quand on a trouvé un carré magique, on peut en définir d'autres en multipliant chaque case par un même nombre.

$6 \times 7 = 42$	$7 \times 7 = 49$	$2 \times 7 = 14$
$1 \times 7 = 7$	$5 \times 7 = 35$	$9 \times 7 = 63$
$8 \times 7 = 56$	$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$

La somme est $15 \times 7 = 105$ et vaut 3 fois le nombre central : $35 \times 3 = 105$

3) Pourquoi la somme est-elle 15 dans le carré initial ?

Pour calculer cette somme on additionne les 9 nombres et on divise par 3 car c'est un carré de 3 sur 3.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ et $45 \div 3 = 15$

La somme d'un carré magique de 3 sur 3 est donc toujours un multiple de 3, et cette somme est 3 fois le nombre du milieu (7).

Exemples :

- La somme à obtenir dans un carré contenant les nombres de 2 à 10 est 18, car le nombre central est 6 et $6 \times 3 = 18$.
- La somme à obtenir dans un carré contenant les nombres de 3 à 11 est 21, car le nombre central est 7 et $7 \times 3 = 21$.

Nous avons trouvé une formule pour obtenir un carré magique plus rapidement.

On commence par placer le nombre du centre puis les autres en suivant la règle ci-dessous.
La somme à obtenir est toujours $3 \times a$.

Exemple : $(a + 1) + (a + 2) + (a - 3) = 3 \times a$.

$a + 1$	$a + 2$	$a - 3$
$a - 4$	a	$a + 4$
$a + 3$	$a - 2$	$a - 1$

4) Peut-on faire un carré magique avec des nombres tous pairs ou tous impairs ?

Voici une formule pour les calculer plus facilement : on multiplie par 2 ce que l'on ajoute à a .

$a + 2$	$a + 4$	$a - 6$
$a - 8$	a	$a + 8$
$a + 6$	$a - 4$	$a - 2$

Avec les pairs :

12 $a + 2$	14 $a + 4$	4 $a - 6$
2 $a - 8$	10 a	18 $a + 8$
16 $a + 6$	6 $a - 4$	8 $a - 2$

Avec les impairs :

11 $a + 2$	13 $a + 4$	3 $a - 6$
1 $a - 8$	9 a	17 $a + 8$
15 $a + 6$	5 $a - 4$	7 $a - 2$

5) Peut-on trouver un carré magique avec des nombres négatifs ?

En voici de somme 30 : $-2 + 10 + 22 = 30$ et $13 - 2 + 19 = 30$.

13	16	1
-2	10	22
19	4	7

On peut donc former un carré magique à partir du carré initial avec la règle suivante :

$a + 1$	$a + 2$	$a - 3$
$a - 4$	a	$a + 4$
$a + 3$	$a - 2$	$a - 1$

$a + 3$	$a + 6$	$a - 9$
$a - 12$	a	$a + 12$
$a + 9$	$a - 6$	$a - 3$

On obtient pour finir une formule générale pour des carrés magiques de 3 sur 3 :

A partir de deux nombres donnés, a et x on peut donc construire un carré magique de 3 sur 3.

$a + x$	$a + 2x$	$a - 3x$
$a - 4x$	a	$a + 4x$
$a + 3x$	$a - 2x$	$a - x$

6) Peut-on trouver un carré magique de 4 sur 4 avec les 16 premiers nombres ?

Quelle doit être la somme à obtenir ?

Nous avons additionné tous les nombres, le résultat est 136.

Ensuite nous avons divisé 136 par 4, le résultat est 34.

Donc la somme des nombres de chaque ligne et chaque colonne et chaque diagonale est 34.

7	12	1	14
2	13	11	8
16	3	10	5
9	6	15	4

À partir de ce carré magique, on peut en construire d'autres.

Il suffit d'ajouter le même nombre à tous les nombres du carré.

Exemple : on a ajouté 12 à chaque nombre, donc la somme est $34 + 4 \times 12 = 82$

19	24	13	26
14	25	20	23
28	15	22	17
21	27	27	16

On peut faire un carré magique en mettant 16 et 13 ensemble sur une diagonale mais aussi 14 et 15 sans qu'ils soient alignés sur la même diagonale.

1	10	8	15
7	16	2	9
12	3	13	6
14	5	11	4

Nous avons trouvé une première formule pour les carrés de 4 sur 4, à partir du premier carré fabriqué.

a	$a + 5$	$a - 6$	$a + 7$
$a - 5$	$a + 6$	$a + 1$	$a + 4$
$a + 9$	$a - 4$	$a + 3$	$a - 2$
$a + 2$	$a - 1$	$a + 8$	$a - 3$

NOTES D'ÉDITION

- (1) La somme dans chaque ligne, colonne ou diagonale.
- (2) On verra au §3 que la somme magique est nécessairement 15.
- (3) Cette somme est donc supérieure à 15.
- (4) Ce serait la même chose pour le 6 ou le 8, d'après ce qui précède.
- (5) La somme avec un troisième nombre.
- (6) En fait seul 5 peut convenir : dans la suite, ce résultat est admis.
- (7) C'est une conjecture.

LOI DE ESTELLE 3

Il y a 19 nombres qui s'écrivent en utilisant un seul chiffre entre 0 et 99 : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

Il y a 81 nombres qui s'écrivent avec deux chiffres différents entre 0 et 99 : tous les autres!

LOI DE LAÏLA 1

Les multiplications peuvent se faire dans les deux sens.

Si A et B sont deux nombres,

$$A \times B = B \times A.$$

La géolocalisation

Année 2011-2012

Lucille Fargeau, Marine Jerretie, Gaëtan Doueneau, Hugo Menager, Antoine Trousseau

Encadrés par : Nicolas Sans

Etablissement : Lycée Benjamin Franklin - AURAY

Chercheur : Sébastien Gambs (INRIA et Université de Rennes 1)

Présentation du sujet

How to define and quantify the concepts of "anonymity" and "privacy"?

(1)

Information Technologies have invaded many aspects of people's daily lives, creating new possibilities but also raising privacy concerns to the point that some individuals feel that they no longer have suitable guarantees or control of their privacy. Indeed, protecting the privacy of individuals is one of the main challenges of the «Information Society» but is difficult to achieve as individuals constantly leave digital traces of their actions and whereabouts, often without even knowing it. If an unauthorized entity gathers these digital traces, he (or she) can use them for malicious purposes ranging from targeted spam to profiling, and even identity theft.

In general, simply removing the identifiers of individuals or replacing them by a pseudonym is usually not sufficient to protect their privacy. Therefore privacy researchers have developed more sophisticated techniques for protecting privacy, such as privacy-enhancing technologies (PETs) or sanitization methods which add uncertainty to the data and remove some sensible information. However, in order to be able to assess the effectiveness of such methods and to compare them, it is necessary to:

(A) have a precise and meaningful definition of the concept of "anonymity" and "privacy" adapted to the specific context considered and

(B) practical methods to quantify the level of privacy achieved by a particular service or architecture.

While it is very difficult (and maybe even impossible) to come with a "universal" definition of privacy, it is possible to derive precise definitions when considering a particular context. In this project, the students will explore how to address the two fundamental questions (A) and (B) in one of the following contexts:

1. anonymous communication networks.
2. social networking sites.
3. geolocated applications.
4. electronic voting.
5. public release of sanitized data (e.g. medical or census data).

À partir de notre problématique, nous avons réfléchi à plusieurs thèmes potentiels. Nous avons ainsi travaillé sur le vote électronique, la protection des données médicales, les réseaux de communication, les réseaux sociaux et la géolocalisation. C'est finalement ce dernier thème qui a retenu notre attention, en faisant ainsi notre sujet principal.

I. Qu'est-ce que la géolocalisation ?

La géolocalisation est un procédé permettant de situer un individu ou un objet sur une carte grâce à ses coordonnées géographiques (par exemple la localisation d'un salarié par son entreprise). Il existe plusieurs techniques de géolocalisation :

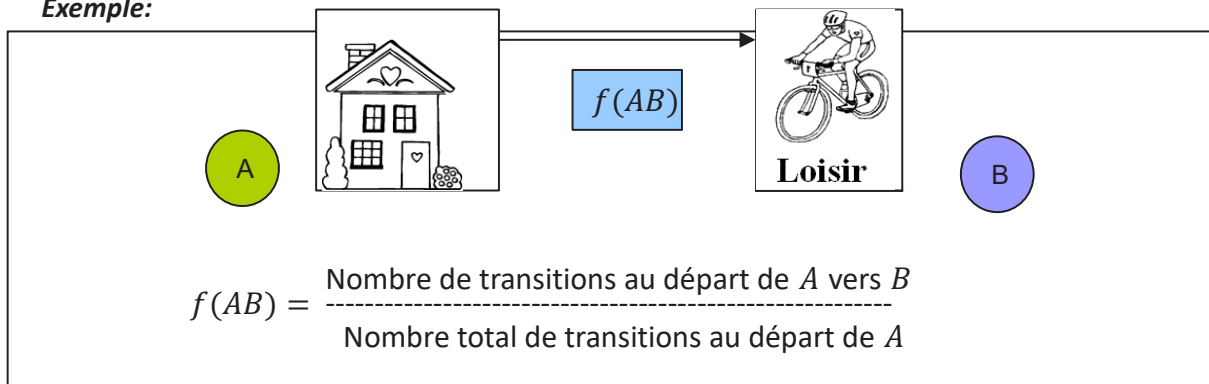
-À l'aide de satellites. Le GPS (Global Positioning System) installé dans un équipement mobile effectue une triangulation afin de mesurer la distance entre l'utilisateur et un certain nombre de satellites de coordonnées connues.

- Avec un téléphone portable. On utilise le réseau GSM (téléphonique) en utilisant les coordonnées des antennes relais.
- Par les ondes Wifi. L'individu connecté par un dispositif numérique (par exemple ordinateur, tablette, téléphone) peut être repéré par son l'adresse Mac et l'identifiant de cette borne wifi.
- Par l'adresse IP. Chaque ordinateur ou dispositif connecté à internet possède une adresse IP propre. Celles-ci sont répertoriées par l'IANA (Internet Assigned Numbers Authority) et donc repérables.

La chaîne de mobilité de Markov pour localiser : un danger pour la vie privée

La chaîne de mobilité de Markov est un modèle mathématique permettant à partir de la localisation actuelle ou passée d'un individu de prédire sa localisation future. Appliqué à la géolocalisation, c'est un véritable danger pour la vie privée. Ainsi, en observant les déplacements d'un individu, on peut établir des fréquences qui détermineront des probabilités de transitions entre les lieux qu'il visite fréquemment (2).

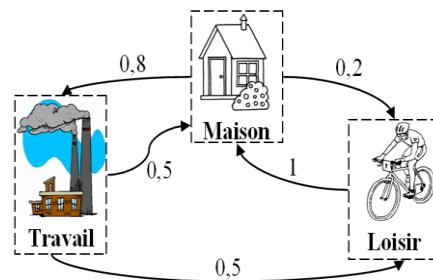
Exemple:



Afin de mesurer les atteintes à la vie privée possible, nous avons effectué deux expériences avec des relevés de trajets d'un élève.

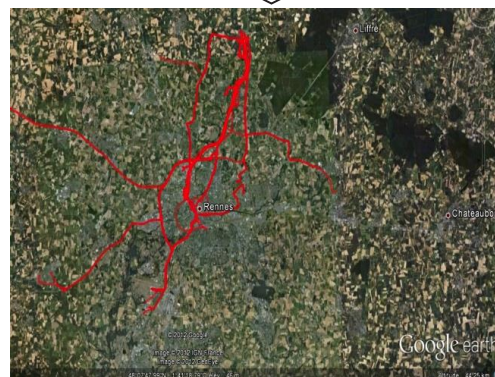
Première modélisation : Un individu avec trois lieux, soit 6 possibilités

Avec cette modélisation, on peut voir grâce aux probabilités de transition entre les différents lieux que le trajet Travail/Maison est le plus fréquent.



Deuxième modélisation avec un individu ayant une multitude de déplacements

Cette seconde expérience consistait à enregistrer les trajets par un logiciel gratuit sur smartphone disponible sous Android. Elle a permis d'augmenter le nombre de lieux (car l'élève était plus actif) et donc le nombre de possibilités transitionnelles.



Modélisation des trajets pendant une semaine

	A	B	C	D	E	F	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
A	0	0,531	0	0,178	0,059	0	0,029	0,029	0,029	0	0,029	0,029	0,029	0,029	0	0,029
B	0,6	0	0,3	0	0	0,05	0	0	0	0,05	0	0	0	0	0	0
C	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
J	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
P	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Q	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Grâce à cette modélisation, on peut voir que les lieux A et B sont à l'origine des transitions les plus courantes. On peut donc penser que ces deux endroits sont le lieu d'habitation et le lieu de travail de l'individu.

(3)

II. Le jeu des transitions

Afin de sensibiliser au fait que la prévision des déplacements d'une personne est une tâche aisée, nous avons eu l'idée de créer un jeu avec Algotbox (un logiciel d'aide à l'élaboration et à l'exécution d'algorithmes). Dans ce jeu, après observation des transitions entre les lieux, le joueur est invité de manière ludique à prévoir les déplacements d'un individu.

1/ Synopsis

« Vous êtes l'inspecteur Eve. Votre nouvelle mission : stopper Bob, dangereux criminel, qui prépare un complot terroriste aboutissant dans 3 semaines. Vous disposez pour cela de plusieurs informateurs qui vous indiquent le nombre de passages entre les différents lieux (A, B...) que fréquente Bob ainsi que de la magie des maths ! Chaque semaine, ils rassemblent suffisamment d'informations pour réussir à l'arrêter, au bout de cette semaine, vous pouvez choisir le lieu où il va probablement se trouver et y envoyer vos policiers. Si vous ne réussissez pas au bout de 3 semaines (= 3 essais), vous êtes renvoyé et la partie se termine. »

Ainsi, il existe dans le jeu quatre niveaux (2 lieux, 3 lieux, 4 lieux, 5 lieux) et pour chacun d'entre eux le joueur dispose de 3 essais. S'il réussit avant la fin des 3 tentatives, il passe au niveau suivant.

2/ Fonctionnement

Le principe général est simple : l'algorithme crée d'abord une chaîne avec des probabilités de transition prises de manière aléatoire (c'est-à-dire sans regarder les traces de mobilité). Il choisit un lieu de départ puis va d'un lieu à un autre en suivant les probabilités. Pour renseigner le joueur, le programme affiche le nombre de transitions différentes effectuées. Il choisit alors un lieu au hasard, qui sera le départ de Bob et l'affiche au joueur. Par simple observation du nombre de transitions entre les lieux, le joueur choisit alors vers le lieu qu'il juge être le suivant. L'algorithme va alors s'orienter du lieu qu'il a affiché vers un autre en respectant les probabilités. Si le lieu choisi par l'algorithme (par Bob) est le même que celui choisi par le joueur, alors on considère que le joueur pu coincer Bob (4).

Voir le code en langage AlgoBox en annexe 1

NIVEAU III

Cette semaine, Bob a fréquenté les lieux A, B, C et D dont voici la liste des transitions avec le nombre de transitions observées pour chacun d'entre elles :

$AB : 5$
 $AC : 38$
 $AD : 14$
 $BA : 1$
 $BC : 8$
 $BD : 3$
 $CA : 31$
 $CB : 6$
 $CD : 9$
 $DA : 25$
 $DB : 1$
 $DC : 0$

Bob est maintenant parti de A . Inspecteur, vous devez décider où envoyer vos effectifs. Par observation des transitions, le joueur va sûrement choisir le lieu C , qui est celui vers lequel Bob (et donc l'algorithme) ira le plus probablement.

3/ Quel intérêt ?

Quelque soit le niveau du joueur (collégien ou lycéen), il est en mesure de déterminer simplement le lieu où Bob ira probablement, même sans avoir connaissance de la théorie de probabilités.

Il peut donc comprendre :

- que certaines transitions se font plus fréquentes que d'autres (5).
- qu'il est assez facile prévoir les déplacements de quelqu'un et donc de les devancer.

De plus, même en misant sur le lieu le plus probable, il n'est pas toujours sûr de choisir le bon : ce modèle de transitions (donc la chaîne de Markov) manque parfois de précision, car elle garde une notion de l'aléatoire, que ne conserverait peut-être pas une chaîne horaire (en tenant compte du temps passé dans chaque lieu) (6).

III. Le poids transitionnel

Par l'observation simple des déplacements qu'effectue une personne, nous souhaitons créer un indicateur de l'importance relative des lieux. Cette importance est dite **poids transitionnel**, et ne dépend que des transitions effectuées entre les lieux et non du temps passé à chaque lieu, ce qui sera une limite de notre modèle.

Considérons dans cette partie une chaîne de trois lieux A, B et C . $p(AB)$ est la probabilité qu'en étant en A Bob se déplace ensuite vers B , etc. Cette chaîne donne, sous forme de matrice (7) :

$$\begin{pmatrix} 0 & p(AB) & p(AC) \\ p(BA) & 0 & p(BC) \\ p(CA) & p(CB) & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons bien sûr des 0 pour $p(AA)$, $p(BB)$... car nous ne considérons que les transitions entre des lieux différents (c'est-à-dire que les transitions d'un lieu vers lui-même sont impossibles).

1/ Pourquoi privilégier les probabilités de transitions ?

Une matrice de transitions indique des probabilités que la personne étudiée, étant à un lieu, parte vers un autre. De fait, on peut avoir $p(AB) = 0.5$ et $p(CA) = 0.5$; mais cela ne garantit pas qu'elle effectue autant de transitions de A vers B que de C vers A , bien au contraire. Nous nous sommes alors demandé quel était l'intérêt d'une matrice de probabilités de transitions, qui semblait contenir moins d'informations (notamment pour calculer le poids des lieux) qu'une matrice nous donnant le nombre exact de transitions effectuées sur une période donnée.

Une réponse simple : la matrice de probabilités de transitions a la somme des valeurs de ses lignes qui vaut 1 : elle est stochastique et possède donc des propriétés particulières (voir section 4) (8).

Nous avons alors cherché à démontrer que cette matrice contenait autant d'informations qu'une matrice donnant le nombre exact de transitions.

À partir de la matrice de probabilités exemple :

$$\begin{cases} p(AB) + p(AC) = 1 \\ p(BA) + p(BC) = 1 \\ p(CA) + p(CB) = 1 \end{cases}$$

On souhaite trouver une matrice de nombres de transitions correspondante. Les nombres de transitions sont donc proportionnels aux probabilités de transitions, au départ d'un même lieu : par ligne. Soit n_1 le facteur multipliant la première ligne, n_2 la seconde et n_3 la troisième, les matrices donnant le nombre de transitions sont donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & n_1 \times p(AB) & n_1 \times p(AC) \\ n_2 \times p(BA) & 0 & n_2 \times p(BC) \\ n_3 \times p(CA) & n_3 \times p(CB) & 0 \end{pmatrix}$$

Si les facteurs n_1, n_2 et n_3 sont indépendants les uns des autres, alors cette seconde matrice contient plus d'informations que celle des probabilités. Démontrons le contraire.

$$\begin{cases} n_1 \times (p(AB) + p(AC)) = n_1 \\ n_2 \times (p(BA) + p(BC)) = n_2 \\ n_3 \times (p(CA) + p(CB)) = n_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 \times p(AB) + n_1 \times p(AC) = n_1 \\ n_2 \times p(BA) + n_2 \times p(BC) = n_2 \\ n_3 \times p(CA) + n_3 \times p(CB) = n_3 \end{cases}$$

Mais il faut prendre en compte le fait qu'il y ait autant de transitions (ou presque) au départ de chaque point d'intérêt qu'à l'arrivée sur ce point :

$$\begin{cases} n_1 \times p(AB) + n_1 \times p(AC) = n_2 \times p(BA) + n_3 \times p(CA) \\ n_2 \times p(BA) + n_2 \times p(BC) = n_1 \times p(AB) + n_3 \times p(CB) \\ n_3 \times p(CA) + n_3 \times p(CB) = n_1 \times p(AC) + n_2 \times p(BC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 = n_2 \times p(BA) + n_3 \times p(CA) \\ n_2 = n_1 \times p(AB) + n_3 \times p(CB) \\ n_3 = n_1 \times p(AC) + n_2 \times p(BC) \end{cases}$$

En connaissant les $p(AB), p(AC), p(BA)...$ notre travail revient à résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues chacune. Nous pouvons donc exprimer n_2 en fonction de n_1 et n_3 en fonction de n_1 (et des $p(AB)...$ bien sûr) :

$$n_2 = \frac{n_1 \times (p(AB) + p(AC) \times p(CB))}{1 - p(BC) \times p(CB)}$$

$$n_3 = n_1 \times p(AC) + \frac{n_1 \times p(BC) \times (p(AB) + p(AC) \times p(CB))}{1 - p(BC) \times p(CB)}$$

Donc les 3 facteurs ne sont pas indépendants les uns des autres. Il existe une infinité de matrices donnant le nombre de transitions correspondantes à une matrice de probabilités, mais dès lors que l'on fixe n_1 , alors n_2 et n_3 sont aussi fixés : cette matrice n'apporte rien de plus que celle des probabilités (que nous dénommerons maintenant simplement matrice de transitions).

2/ Méthode algorithmique

La chaîne de mobilité de Markov peut-être considérée comme une loi de probabilité des déplacements. Notre idée a alors été de créer un algorithme qui respecterait cette loi de probabilité pour passer d'un lieu à un autre. En expérimentant un très grand nombre de fois, il suit la loi des grands nombres et nous donne la fréquence d'apparition de chaque lieu : son **poids transitionnel**.

Résumé :

Lecture les probabilités de transition

Choix d'un lieu de départ au hasard

Pour i allant de 1 à 100 000 :

- Passage d'un lieu vers un autre en respectant les probabilités de transition

- Comptage du nombre de passages à chaque lieu avec 3 variables

Fin pour

Affichage des fréquences d'apparition de chaque lieu

Voir le code en langage AlgoBox en annexe 2

Cette technique semble précise mais l'algorithme est long à répéter la boucle 100 000 fois. De plus cette méthode n'est pas purement calculatoire car elle passe par de l'**échantillonnage**.

Cet algorithme est beaucoup plus long à programmer quand on augmente le nombre de lieux : cette technique ne peut plus être utilisée pour nous.

3/ Système d'équations et vecteur stable

a) Système

Pour évaluer l'importance de chaque lieu (a , b et c respectivement pour A , B et C) nous avons pensé à faire la somme des probabilités qui se dirigent vers ce lieu. Ainsi : $a = p(BA) + p(CA)$. Mais cette technique semble fort étrange car B et C n'ont peut-être pas la même importance, on ne peut pas mettre en simple somme $p(BA)$ et $p(CA)$. Il faudrait les pondérer avec b et c , ce qui équivaut à multiplier la probabilité de transition par le poids du lieu de départ.

Nous avons donc déduit ce système qui pouvait nous donner en solutions a , b et c :

$$\begin{cases} a = p(BA)b + p(CA)c \\ b = p(AB)a + p(CB)c \\ c = p(AC)a + p(BC)b \end{cases} \quad \text{Pour avoir des solutions uniques, on fixe } a + b + c = 1.$$

Après quelques calculs, notre système peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} a = \frac{p(AB)p(BA) - 1}{p(AB)(p(BA) - p(CA)) - p(CB)(p(BA) + 1) - p(CA) - 1} \\ b = \frac{1 - c(p(CA) + 1)}{p(BA) + 1} \\ a = \frac{c - p(BC)b}{p(AC)} \end{cases}$$

Nous l'avons seulement résolu dans le cas d'une chaîne de 3 lieux, car au-delà la situation devient beaucoup plus complexe. Ainsi, nous ne pourrions pas résoudre le système pour n lieux avec nos connaissances actuelles. Il faudrait utiliser une autre technique pour cela.

b) Vecteur stable

Soit A une matrice carrée stochastique (rappelons le, une matrice est dite stochastique lorsque la somme des valeurs d'une ligne est égale à 1, elle est dite carrée lorsqu'elle a autant de lignes que de colonnes) de rang n (elle aura n lignes et n colonnes).

Soit h un vecteur dans un espace à n dimensions, h est dit *stable* de A si et seulement si : $hA = h$.

Considérons notre matrice de rang 3, h a donc 3 coordonnées. On note $h = (a \quad b \quad c)$.

D'où :

$$hA = (p(BA)b + p(CA)c \quad p(AB)a + p(CB)b \quad p(AC)a + p(BC)b)$$

Mais comme $hA = h$, on peut trouver le système :

$$\begin{cases} a = p(BA)b + p(CA)c \\ b = p(AB)a + p(CB)c \\ c = p(AC)a + p(BC)b \end{cases}$$

Ce qui revient à notre calcul précédent que nous avons trouvé intuitivement. Les **poids transitionnels** sont donc les coordonnées du vecteur stable de la matrice de transitions !

4/ Puissances d'une matrice carrée stochastique

Une matrice carrée A peut-être mise à la puissance n , en effet : $A^n = (((A \times A) \times A) \times \dots) \times A$ et on peut multiplier une matrice carrée par une matrice carrée de mêmes dimensions. Ces matrices sont les seules matrices dont on peut calculer les puissances.

Le produit matriciel étant un calcul complexe, le calcul des puissances d'une matrice l'est encore plus. C'est pourquoi, après quelques tentatives à la main, nous avons décidé de créer un algorithme permettant de mettre rapidement une matrice carrée d'ordre 3 à la puissance n .

Les matrices de transition étant stochastiques, nous nous sommes intéressés aux puissances de ces matrices carrées stochastiques. Nous avons d'abord pu démontrer qu'une de ces matrices mise à la puissance n demeurerait stochastique (9).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Par de nombreuses observations mais sans pouvoir le démontrer, nous avons} \\ \text{remarqué que n'importe quelle matrice carrée stochastique (ici la chaîne exemple)} \\ \text{suivait le théorème suivant :} \\ a, b \text{ et } c \text{ sont les coordonnées du vecteur stable, les } \mathbf{poids\ transitionnels} ! \end{array}$$

Cette technique a l'avantage de pouvoir être employée pour des chaînes comprenant un grand nombre de lieux, car notre calculatrice peut assez rapidement nous mettre une matrice carrée d'ordre 15 à la puissance 100...

5/ Conclusion par un exemple :

Prenons un exemple pour rapprocher les trois méthodes :

Matrice de transitions entre 3 lieux

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1/ Algorithme

$$a \approx 0,42 ; b \approx 0,21 ; c \approx 0,37$$

2/ Coordonnées du vecteur stable :

$$\begin{cases} a = \frac{5}{12} \approx 0,42 \\ b = \frac{5}{24} \approx 0,21 \\ c = \frac{3}{8} \approx 0,37 \end{cases}$$

3/ Matrice à la puissance 500 :

$$\begin{pmatrix} 0,42 & 0,21 & 0,37 \\ 0,42 & 0,21 & 0,37 \\ 0,42 & 0,21 & 0,37 \end{pmatrix}$$

Ces trois méthodes sont donc sensiblement les mêmes, mais la précision est plus grande avec la résolution du système car on obtient des valeurs exactes. Nous avons créé une animation Geogebra dans laquelle on entre les valeurs des probabilités de transition entre 3 lieux (10).

Ensuite, à partir du système d'équations nous obtenons le poids transitionnel de chaque lieu.

6/ Et dans la réalité ?

Nous avons pu réaliser une chaîne de Markov réelle basée sur les déplacements d'un membre de notre groupe qui contient plus de 10 lieux différents. Nous avons également calculé, sous forme de fréquence, le temps passé à chaque lieu, que nous avons appelé le **poids horaire**.

Nous avons évalué le **poids transitionnel**. Il s'est avéré classer les lieux dans un ordre proche de celui du **poids horaire** (les valeurs ne sont cependant pas exactement les mêmes). Le **poids transitionnel** est donc un indicateur fiable pour quantifier l'importance de chaque lieu pour une personne, et même éventuellement en déduire ce qu'ils représentent pour lui (domicile, travail...).

NB : À partir des observations des déplacements d'une personne, nous avons déduit des probabilités de transition et calculé le **poids transitionnel**. Nos techniques partent des **probabilités de transition** pour le calculer. Mais si l'on se base sur une simple observation des déplacements, nous pouvons regarder le nombre de fois où l'individu passe à un lieu, comme l'algorithme, et calculer trivialement le **poids transitionnel**...

IV. Le cercle de présence

Au cours de nos recherches, nous avons aussi investigué le concept de **géocodage**. Cette technique consiste à attribuer à chacun des lieux de vie d'une personne des coordonnées dans un certain repère.

Par exemple, considérons 4 lieux de vie nommés : $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ et $D(x_D, y_D)$. Par observation des transitions effectuées, nous évaluons les **poids transitionnels** de chaque lieu : respectivement a, b, c et d . En connaissant les coordonnées des 4 points ainsi qu'un « poids » pour chacun d'entre eux, nous avons eu l'idée de calculer les coordonnées du barycentre G de ce système de points pondérés. Nous avons donc calculé la moyenne (pondérée par les poids de chaque lieu) des abscisses des points pour obtenir l'abscisse de G avec la formule suivante :

$$x_G = \frac{x_A a + x_B b + x_C c + x_D d}{a + b + c + d}$$

De même pour les ordonnées.

Nous avons donc obtenu en quelque sorte le centre des lieux de vie visités par une personne. Par la suite, nous calculons la moyenne (pondérée par le poids de A , de B , ...) des distances GA , GB , ... Elle devient le rayon d'un cercle de centre G . Ce cercle constitue un espace de présence moyen le plus probable. Il englobe les lieux les plus importants.

Ce « cercle de présence » peut avoir une utilité en statistiques par exemple, car il est plus représentatif des activités de l'individu que ne l'est le domicile seul. Mais il peut également être un danger car pour quelqu'un de mal intentionné, il peut en déduire que l'individu ne sort presque jamais de son cercle.

Nous avons réalisé une animation avec Géogébra pour obtenir ce cercle des lieux, en faisant varier ces lieux ainsi que leurs poids :

Voir la capture d'écran en annexe photo 1 (11)

V. La marge d'erreur algorithmique

Pour une chaîne de 3 lieux, nous avons mis en place 3 techniques pour évaluer les poids transitionnels. La technique du vecteur stable nous fournissait (voir les formules) une valeur exacte. L'algorithme s'en rapprochait après un très grand nombre d'essais, représentant en soi la matrice de transitions élevée à une très grande puissance. Notre recherche s'est alors poursuivie afin d'évaluer la marge d'erreur du poids transitionnel algorithmique en fonction du nombre de transitions employé par l'algorithme pour évaluer ce poids transitionnel. Le poids transitionnel résultant bien sûr des transitions, sa marge d'erreur correspond également à la moyenne

de la marge de ces transitions (nous aurions pu l'évaluer plus formellement mais cela aurait été beaucoup plus complexe). Notre ancien algorithme (100 000 transitions) semblait relativement fiable face aux valeurs exactes.

1/ Comment calculer la marge d'erreur ?

Le principe d'obtention de la marge d'erreur pour un lieu est plutôt simple et peut être réalisée avec la formule suivante : il s'agit du ratio de la différence entre la valeur théorique et la valeur obtenue expérimentalement sur la valeur théorique elle-même. On considère la valeur absolue de ce ratio car on n'a pas besoin de savoir lequel est le plus grand (marge positive ou négative), mais juste leur rapport (marge positive).

$$\text{Marge d'erreur} = \text{abs} \left(\frac{\text{Valeur expérimentale} - \text{Valeur théorique}}{\text{Valeur théorique}} \right) \quad (12)$$

Pour mesurer l'erreur globale, il faut faire la moyenne des marges d'erreurs des poids des trois lieux de notre chaîne.

2/ Algorithmique

Le principe général est simple : l'algorithme crée d'abord une chaîne de 3 lieux (transitions prises au hasard) et évalue les valeurs du poids transitionnel de chaque lieu avec les formules. Puis il fait suivre n transitions respectant cette loi de probabilité en évaluant à la fin les valeurs expérimentales des poids transitionnels.

Résumé :

Lire r

Lire n

Pour i allant de 1 à r :

- Création d'une chaîne aléatoire
- Calcul par les formules des poids
- Calcul des poids avec un algorithme au bout de n transitions
- Calcul de la marge d'erreur

Fin pour

L'algorithme calcule la marge d'erreur entre les poids transitionnels algorithmiques et les valeurs théoriques du système pour chaque lieu (A , B et C). On a donc 3 pourcentages dont il fait une moyenne qui est la valeur produite en sortie par l'algorithme. Cet algorithme a été rendu ergonomique : on peut créer autant de chaînes que nécessaire (il les évaluera séparément) et faire subir à chacune autant de tests que l'on veut.

Voir le code en langage AlgoBox en annexe 3

Exemple : On a demandé 3 chaînes et pour chacune on évalue les marges d'erreur moyennes sur 20, 40, 100 et 500 transitions.

Résultats :

Chaîne n°1

20 transitions : 23.129502% de différence

40 transitions : 10.848396% de différence

100 transitions : 1.8791675% de différence

500 transitions : 1.686865% de différence

Chaîne n°2

20 transitions : 18.978489% de différence
 40 transitions : 11.086811% de différence
 100 transitions : 9.5488923% de différence
 500 transitions : 3.1311144% de différence

Chaîne n°3

20 transitions : 15.371826% de différence
 40 transitions : 20.896946% de différence
 100 transitions : 8.6918286% de différence
 500 transitions : 1.000761% de différence

On note une diminution de la marge d'erreur quand le nombre de transitions devient de plus en plus grand, mais seulement en moyenne : ce n'est parfois pas le cas (chaîne 3, entre 20 et 40 transitions). Mais surtout, comme nos valeurs diffèrent d'une chaîne à une autre, la question se pose de savoir si on peut obtenir des moyennes sur un très grand nombre de chaînes.

3/ L'art de l'approximation

Après ce premier algorithme, nous avons décidé d'en créer un plus précis. Cet algorithme ne fait qu'un seul type de test (on choisit le nombre de transitions) et le réalise sur un grand nombre (à entrer) de chaînes créées au hasard. Au lieu de les afficher séparément, il en fait une moyenne des marges d'erreur obtenues sur les différentes chaînes.

Résumé :

```

Lire  $r$ 
Lire  $n$ 
 $M$  prend la valeur 0
Pour  $i$  allant de 1 à  $r$  :
    - Création d'une chaîne aléatoire
    - Calcul par les formules des poids
    - Calcul des poids avec un algorithme au bout de  $n$  transitions
    - Calcul de la marge d'erreur
    -  $M$  prend la valeur  $M + \text{marge d'erreur}$ 
Fin pour

Marge d'erreur moyenne :  $M/r$ 
  
```

Voir le code en langage AlgoBox en annexe 4

Plus l'on crée de chaînes (en conservant le même nombre de transitions), plus le pourcentage d'erreur semble tendre vers une valeur qui se révèle caractéristique de ce nombre de transitions. Nous avons alors eu l'idée de faire calculer ces fiabilités caractéristiques et de les associer au nombre de transitions effectuées (10, 20...) dans un tableau. Notre but était d'établir des correspondances entre le nombre de transitions et la marge d'erreur moyenne.

Nombre n de transitions	Valeur de la marge d'erreur
10	24.8
20	16.8
30	13.3
40	11.2
50	10.1
60	9.3
70	8.6
80	7.9
90	7.5
100	7.1
110	6.8
120	6.4
130	6.2
140	6
150	5.8
160	5.6
170	5.4
180	5.2

Et ainsi de suite... Il est logique (même trivial) que (13) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{marge d'erreur} = 0.$$

Mais ces valeurs ont une faible précision car elles sont issues d'un échantillonnage. À l'aide du tableur de Géogébra nous avons tâtonné afin d'obtenir une fonction résumant la relation entre nombre de transitions et marge d'erreur moyenne. Nous en avons déduit un lien avec la fonction inverse (14).

Voir la capture d'écran en annexe photo 2

Ainsi, nous avons pu obtenir cette expression qui satisfait toutes nos expérimentations (avec $f(n)$ la marge d'erreur en % au bout de n transitions), a étant une valeur à déterminer (vers 75).

$$f(n) = \frac{a}{\sqrt{n}} \quad (15)$$

Ceci pour une chaîne de 3 lieux. Nous ne pouvons rien démontrer mais il semble qu'il y ait bien une loi cachée là-dessous. La même question se pose maintenant pour une chaîne de 4 lieux.

4/ Et dans la réalité ?

Une personne ne se déplace pas comme le fait l'ordinateur (celui-ci est trop peu humain dans sa logique). Cependant ces travaux nous permettent d'avoir tout de même un aperçu de la mobilité possible d'un individu.

Dans le cadre d'une autre expérimentation que nous avons réalisée, un élève a équipé son téléphone d'une application permettant de le géolocaliser. Nous avons enregistré chaque semaine les déplacements qu'il réalisait, et pu en déduire les probabilités de transition entre les lieux qu'il fréquentait.

Ainsi, nous avons calculé les poids transitionnels dans la semaine [1], puis dans les semaines [1 et 2] regroupées, puis [1, 2 et 3] regroupées, etc. Nous avons déterminé un pourcentage moyen de variation des poids transitionnels entre les périodes [semaine 1] et [semaines 1 et 2], puis entre les périodes [semaines 1 et 2] et [semaines 1, 2 et 3], etc.

Il s'est avéré que le pourcentage de variation moyen des poids devenait inférieur à 1% au bout de 6 semaines (soit entre les périodes [semaines 1, 2, 3, 4 et 5] et [semaines 1, 2, 3, 4, 5 et 6]) : ils se stabilisaient autour de valeurs précises que nous allions pouvoir exploiter pour déterminer ce à quoi chaque lieu correspondait.

Les poids transitionnels sont fiables assez rapidement. On peut donc facilement les trouver, sans avoir d'observation trop longue : la menace pour notre vie privée en est d'autant plus grande.

5/ Répartition des valeurs de marge d'erreur

A/ Répartition simple

Revenons au premier algorithme. Il nous donnait des valeurs de marge d'erreur différentes pour un même nombre de transitions. Si pour le second algorithme la moyenne semblait caractéristique, elle ne nous donnait aucunement la répartition des marges obtenues. Ainsi la question se pose de déterminer si la probabilité d'obtenir une marge d'erreur de 1% est la même que d'obtenir une marge de 50% pour un nombre de transitions fixées.

Nous avons donc créé un algorithme permettant de réaliser un certain nombre de chaînes, et pour chacune d'entre elles, de calculer une marge d'erreur à un nombre n de transitions, qui est fixé. Comme les valeurs de marge d'erreur sont un phénomène continu, nous avons décidé de les regrouper en classes de 1. Ainsi, l'algorithme compte le nombre de fois où la marge obtenue était entre 0% et 1%, entre 1% et 2%, etc.

L'algorithme a simplement calculé des fréquences d'apparition de chaque classe pour tracer un graphique.

Voir la capture d'écran en annexe photo 3 (16)

Ainsi, en abscisse de chaque point nous avons la valeur de départ de la classe et en ordonnée la fréquence d'apparition des valeurs de la classe par rapport à toutes les valeurs. Le point n'apparaît que si son ordonnée est non-nulle.

Il se forme une courbe en cloche (avec un grand nombre de chaînes) qui semble avoir pour maximum la valeur moyenne que nous avons calculée en 3/, caractéristique de ce nombre n de transitions (ici 10, la moyenne vaut environ 25%).

B/ Répartition de plusieurs transitions

Cependant, nous souhaitions aller encore plus loin. Ainsi, nous avons modifié notre algorithme pour comparer plusieurs n (jusqu'à 3). Les 3 valeurs sont passées en entrée de manière successive. Dans le cas où nous voulions moins de valeurs, nous pouvions indiquer 0 et il ne ferait pas le calcul.

Sur un même graphe, nous avons fait figurer les 3 listes de points en utilisant des couleurs différentes.

Voir le code en langage AlgoBox en annexe 5

Exemple :

Nombre de transitions au 2nd test : 2
Nombre de transitions au 2nd test : 20
Nombre de transitions au 3ème test : 70
Nombre de chaînes testées : 4000

Observations :

Voir la capture d'écran en annexe photo 4

Les fréquences maximales de chaque courbe correspondent environ aux moyennes : les sommets sont alignés sur la courbe figurant dans la section 3.

Plus l'on augmente le nombre de chaînes testées (elle ne varie pas sur le graphique ici), plus la courbe en cloche se précise donc plus la marge d'erreur devient précise. Ceci est logique et nous pourrions même faire des marges d'erreurs de marges d'erreur... Plus le nombre de transitions augmente (et c'est ce qui varie ici), plus le sommet de la courbe se décale vers 0, autrement dit plus la marge d'erreur moyenne tend vers 0. Par exemple, pour $n = 70$, le maximum est à environ 6% et pour $n = 2$, il est d'environ 65%. Cependant, plus ce nombre de transitions augmente, plus les valeurs sont resserrées autour de la moyenne (voir le graphique) : la marge d'erreur devient alors de plus en plus précise !

6/ Chaîne par chaîne

Tout notre travail se focalisait sur le point suivant : on testait un très grand nombre de chaînes, une fois chacune (voir résumés précédents des algorithmes). Et si on testait une seule et unique chaîne, plusieurs fois sur un même nombre de transitions.

A/ Répartition des valeurs

Résumé :

Lire r
Création d'une chaîne aléatoire
Calcul par les formules des poids
Pour i allant de 1 à r :

- Calcul des poids avec un algorithme au bout de n transitions
- Calcul de la marge d'erreur

Fin pour

Avec le test de chaînes différentes, nous avons une répartition en cloche. Mais qu'en est-il si l'on ne considère qu'une seule chaîne : y a-t-il des valeurs remarquables ou encore une cloche, autrement dit la cloche est-elle due au fait que les chaînes soient différentes les unes des autres ? (17)

Dans ce but, nous retravaillons l'algorithme de telle sorte que, pour une même chaîne testée, il nous renvoie graphiquement les fréquences d'apparition des marges d'erreurs.

Résumé :

Lire r
Lire $n1$
Lire $n2$
Lire $n3$
Création d'une chaîne aléatoire
Calcul par les formules des poids
Pour i allant de 1 à r :

- Calcul des poids avec un algorithme au bout de $n1$ transitions
- Calcul de la marge d'erreur

Fin pour

Affichage des fréquences pour $n1$ (rouge)

Pour i allant de 1 à r :

- Calcul des poids avec un algorithme au bout de $n2$ transitions
- Calcul de la marge d'erreur

Fin pour

Affichage des fréquences pour $n2$ (vert)

Pour i allant de 1 à r :

- Calcul des poids avec un algorithme au bout de $n3$ transitions
- Calcul de la marge d'erreur

Fin pour

Affichage des fréquences pour $n3$ (bleu)

Exemple 1 :

L'on commence par fixer : $n1 = n2 = n3 = 3$. Ainsi, l'on observe les fréquences d'apparition (nous aurons les mêmes points rouges, bleus et verts) pour les trois essais. Les valeurs se répartissent sur 4 marges d'erreurs précises : ici, environ 12%, 62%, 68% et 83%. Pour cette chaîne, à 10 transitions, l'on n'obtient pas d'autres valeurs, ainsi elles semblent caractéristiques de cette chaîne à 10 transitions.

Exemple 2:

Avec une autre chaîne tirée au hasard, nous obtenons de manière logique d'autres marges précises, ici au nombre de 5 : 52%, 55%, 65%, 88% et 97%. Ces valeurs sont caractéristiques de la chaîne.

Exemple 3:

Faisons maintenant varier $n1, n2$ et $n3$. Ici, sur une autre chaîne, $n1 = 3, n2 = 8$ et $n3 = 12$ transitions par répétition.

OBSERVATIONS :

- les valeurs précises sont caractéristiques d'une chaîne à un nombre de transitions donné : elles varient quand on change les entiers n ;
- plus n est grand, plus la marge d'erreur semble diminuer, même sur une même chaîne ;
- plus n est grand, plus le nombre de valeurs caractéristiques semble augmenter et ressembler à une courbe en cloche.

Exemple 4 :

Afin de vérifier cette dernière hypothèse, prenons un $n1 = n2 = 3$ et $n3 = 50$.

Voir la capture d'écran en annexe photo 5

On note en effet un nombre de points beaucoup plus importants sur $n3$. Ces points semblent s'aligner en une courbe en cloche.

B/ D'une manière moyenne

Notre algorithme nous affichera maintenant, en plus du graphe, la moyenne d'une chaîne pour un certain nombre de transitions.

Avec $n1 = n2 = n3$, nous obtenons une valeur moyenne qui est la même, caractéristique de la chaîne à un certain $n1$ nombre de transitions.

Avec $n1 < n2 < n3$, la moyenne diminue, ce qui est logique.

Mais dès lors que l'on prend une autre chaîne, les valeurs de moyennes sont modifiées, même en gardant le même nombre de transitions.

7/ Conclusion

Nos études cachent encore des lois de probabilités complexes que nous n'avons pas abordées, mais elles semblent d'un grand intérêt.

Cependant, pour expliquer la répartition en cloche de la section 5A) à 10 transitions sur de nombreuses chaînes, il faudrait :

- déterminer le lien entre les valeurs précises et leurs fréquences d'apparition (que l'on obtient pour une chaîne précise) en fonction des probabilités de transitions de cette chaîne (encore à creuser algorithmiquement ?).

- prendre en compte les choix aléatoires que réalise l'ordinateur sur les probabilités de transition.

VI. Comment crypter une chaîne de Markov ?

Les chaînes de mobilité de Markov possèdent une particularité : la somme des probabilités au départ d'un lieu vaut 1. Nous nous sommes alors posé la question : pouvait-on crypter de manière simple, une chaîne de mobilité de Markov afin de réaliser un transfert sécurisé de ces données personnelles.

Dans ce but, nous avons cherché à modifier la chaîne en rajoutant une **unique** information de type nombre : la **clef de cryptage k** , commune à l'expéditeur et au destinataire. Par divers procédés nous avons tenté de trouver des manières originales de crypter une chaîne, en employant notamment la propriété de somme des probabilités.

Pour l'exemple, nous considérons une chaîne de 3 lieux avec une matrice de transitions de ce type :

$$\begin{pmatrix} 0 & p(AB) & p(AC) \\ p(BA) & 0 & p(BC) \\ p(CA) & p(CB) & 0 \end{pmatrix}$$

1/ Produit de la matrice de transitions par un réel

Le plus simple semblait, bien sûr, de multiplier l'ensemble de la matrice de transitions par un réel k pour obtenir la matrice cryptée. D'après les règles de calcul :

$$\begin{pmatrix} 0 & p(AB) & p(AC) \\ p(BA) & 0 & p(BC) \\ p(CA) & p(CB) & 0 \end{pmatrix} \times k = \begin{pmatrix} 0 & k \times p(AB) & k \times p(AC) \\ k \times p(BA) & 0 & k \times p(BC) \\ k \times p(CA) & k \times p(CB) & 0 \end{pmatrix}$$

Mais cela pose un gros problème : k est très facile à trouver pour quelqu'un interceptant le message. En effet, la somme de la première ligne vaut :

$$k \times p(AB) + k \times p(AC) = k$$

En général, on pourra donc facilement casser le code dès que les lignes sont multipliées par des valeurs, du fait de l'aspect stochastique de la matrice.

2/ Ajout d'une valeur à chaque probabilité

Si l'on ajoute à chaque probabilité une valeur k , la somme de la première ligne vaut :

$$p(AB) + p(AC) + 2k = 1 + 2k$$

L'aspect stochastique de la matrice pose encore le même problème : on peut retrouver très facilement la valeur de k .

3/ Multiplication des transitions à l'arrivée

Multiplier les transitions au départ d'un lieu n'était pas très efficace, du fait de la stochasticité de la matrice. Mais celle-ci n'est pas bistochastique (18) : la somme des probabilités arrivant sur un lieu de vaut pas 1 : nous n'aurons pas de problème avec ce qui va suivre.

Nous allons donc multiplier les valeurs d'une même colonne par un nombre, les valeurs d'une autre par un autre... Mais il ne nous faut qu'une seule clef de cryptage. Nous multiplierons donc la première colonne par k , la seconde par $k + 1$, la troisième par $k + 2$ et ainsi de suite.

Ainsi, à partir de la matrice de départ nous avons :

$$\begin{pmatrix} 0 & (k+1) \times p(AB) & (k+2) \times p(AC) \\ k \times p(BA) & 0 & (k+2) \times p(BC) \\ k \times p(CA) & (k+1) \times p(CB) & 0 \end{pmatrix}$$

C'est assez dérangent pour notre espion. Quand bien même il saurait ce que la seconde ligne aurait été multipliée par $1 + \text{le facteur multiplicateur de la première}$, il ne serait tout de même pas bien avancé car il lui manquerait toujours k .

Le destinataire connaissant k n'aura qu'à raisonner à l'envers pour retrouver la matrice de départ.

Cependant, il pourrait toujours trouver le rapport entre $p(BA)$ et $p(CA)$: car ces deux grandeurs sont multipliées par la même valeur k . Puis il pourrait progresser en sachant $p(AB) + p(AC) = 1$, en employant un système d'équations (cela devient par contre plus difficile quand le nombre de lieux augmente).

Pour cela, il nous fallait quelque chose de plus radical, de plus dérangent encore pour l'espion.

4/ Une chaîne de Markov donne une autre chaîne de Markov

Dans tous les cas, la matrice obtenue n'était plus stochastique : elle ne pouvait plus correspondre à une chaîne de Markov. Et si, dans notre cryptage, la chaîne cryptée n'était autre... qu'une chaîne de Markov elle-même, différente de l'originale. Et l'espion ne saurait plus si les chaînes sont véritables ou faussées (remarque : dans ce cas-là on fait de la stéganographie qui consiste à cacher la présence d'un message plutôt que de la cryptographie...).

Pour cela, nous avons établi le protocole suivant :

- on choisit une valeur de k (un réel strictement supérieur à 0)
- la première probabilité de chaque ligne est multipliée par k puis divisée par $k + 1$ (avec $k > 0$, elle reste bien entre 0 et 1)
- la seconde probabilité (sur une chaîne de trois lieux) prend la valeur $1 - \text{la première}$.

Ainsi, l'on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{p(AB) \times k}{k+1} & 1 - \frac{p(AB) \times k}{k+1} \\ \frac{p(BA) \times k}{k+1} & 0 & 1 - \frac{p(BA) \times k}{k+1} \\ \frac{p(CA) \times k}{k+1} & 1 - \frac{p(CA) \times k}{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Cette chaîne de Markov est une chaîne de Markov valide. Ce protocole étant complexe, un algorithme peut permettre de crypter la chaîne et un autre de la décrypter aisément (en inversant le calcul), ce que nous avons réalisé.

Voir le code en langage AlgoBox en annexe 6

Ce type de cryptage peut-être couplé avec un autre, par exemple celui de la multiplication des données de l'arrivée à un lieu.

L'espion peut récolter des données personnelles, mais celles-ci seront toutes erronées (transitions, donc poids transitionnels et rôle de chaque lieu, cercle des déplacements). La vie privée est donc respectée.

VII ? Conclusion

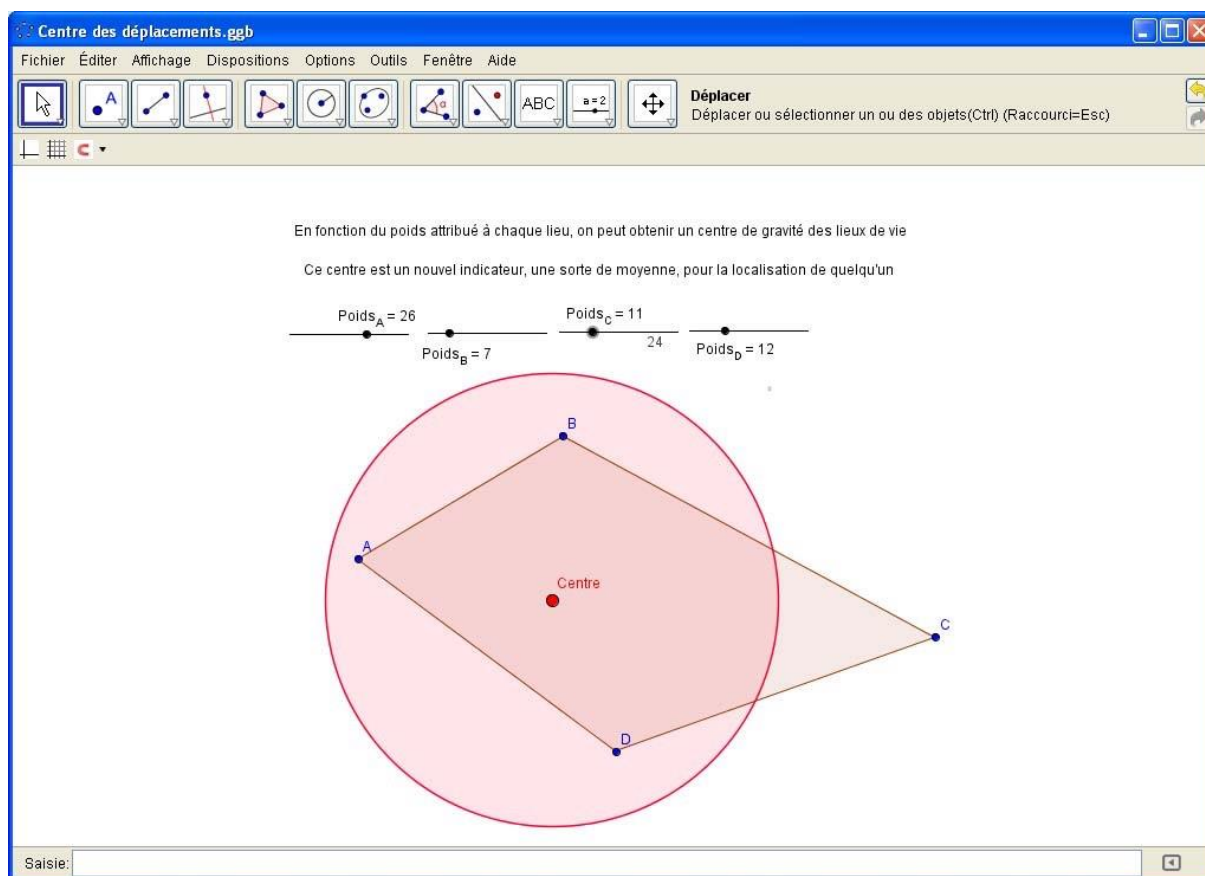
Au cours de nos recherches, nous avons découvert qu'il est très facile de retrouver l'importance relative des différents lieux visités par un individu et d'en déduire ce qu'ils constituent pour l'individu suivi. Nous en avons donc conclu que l'on doit absolument protéger son anonymat afin d'éviter des atteintes à la vie privée tel que le marketing ciblé, le vol mais également l'usurpation d'identité qui a des conséquences bien plus désastreuses. Notre anonymat peut être atteint par le biais d'objets du quotidien tels qu'une carte navigo, un GPS, un téléphone portable... tous ces objets à l'apparence anodine permettent de tout savoir sur l'adresse, les déplacements, les horaires d'un individu, ils ont donc le pouvoir de détruire l'anonymat.

Plusieurs questions sont encore ouvertes :

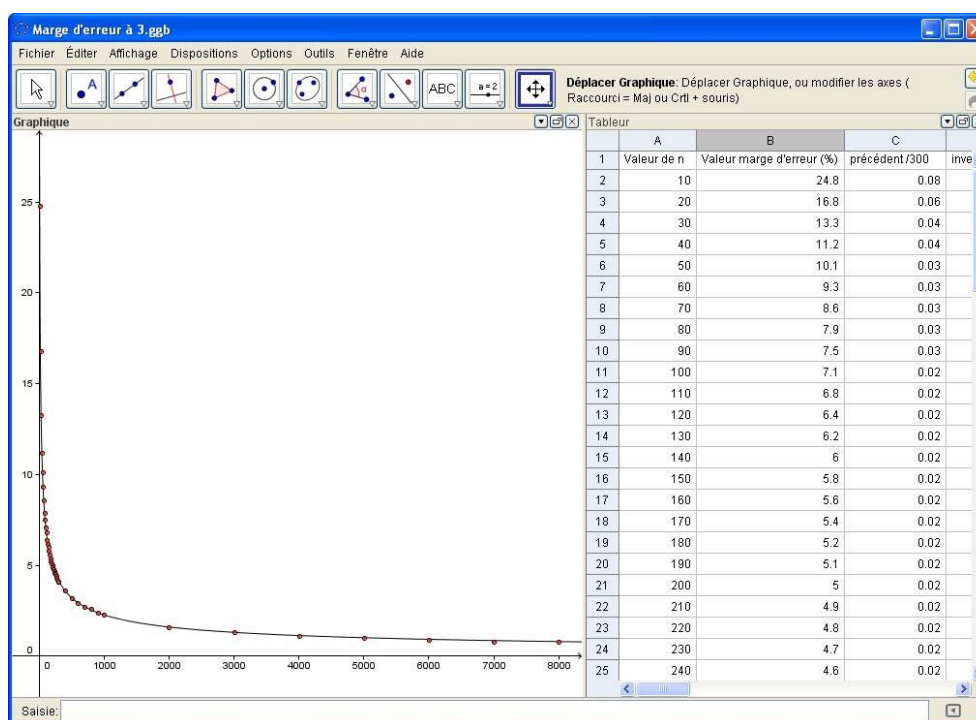
- la chaîne de Markov est dans un espace markovien, c'est-à-dire que la probabilité d'une transition ne dépend pas de la transition précédente. Il s'agit d'une limite de précision par rapport à la réalité. Peut-on créer une chaîne non-markovienne ? (remarque : il est possible d'étendre le modèle de la chaîne de Markov en gardant en mémoire les 2 ou plus derniers lieux visités).
- une chaîne de Markov complète possède des probabilités AA , BB ... (l'individu reste à A , à B ...) Comment les évaluer ?
- peut-on démontrer la limite des matrices stochastiques ?

Annexes photos

1/ Géogébra : le cercle de présence



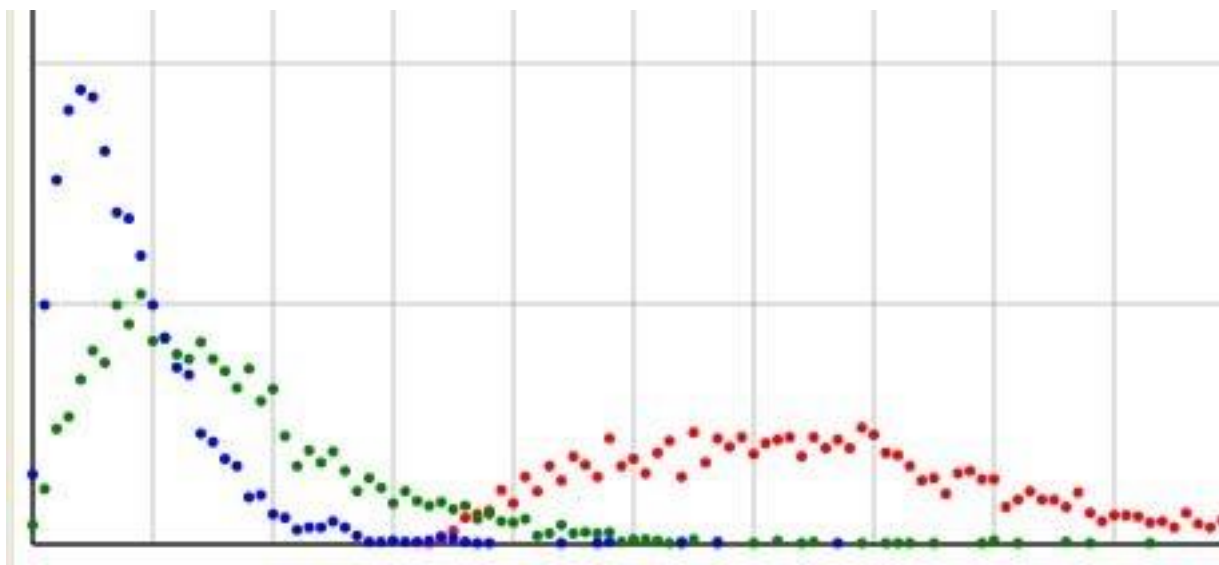
2/ Géogébra : la marge d'erreur moyenne est fonction du nombre de transitions



3 / Albox : répartition des erreurs effectuées à 10 transitions



4/ Albox : répartition des erreurs effectuées à 2, 20 et 70 transitions



5/ Albox : répartition des erreurs effectuées à 3, 3 et 50 transitions (1 chaîne)



Les annexes de code en langage Algobox ne sont pas reproduites ici. Vous les trouverez dans le document en ligne sur le site MATH.en.JEANS, à l'adresse :
[http : //www.mathenjeans.fr/content/article-la-géolocalisation-lycée-benjamin-franklin-auray](http://www.mathenjeans.fr/content/article-la-géolocalisation-lycée-benjamin-franklin-auray).

NOTES D'ÉDITION

- (1) Le sujet original posé par le chercheur a été donné en langue anglaise, et considère une thématique vaste. Le lecteur peu familier avec cette langue peut sauter ce paragraphe, le thème retenu par les élèves étant précisé et explicité ci-après.
- (2) Les élèves emploient ici et pour la suite de l'article un vocabulaire expert, en parlant de "transition" cela correspond à un "déplacement" entre deux lieux, dans le contexte de la géolocalisation. De plus, la connaissance des fréquences de déplacement entre divers lieux, observées expérimentalement, permet de définir des probabilités de déplacement entre ces lieux, appelées pour la suite "probabilités de transition".
- (3) Le tableau ci-dessus indique les fréquences des déplacements effectués par l'élève sur une semaine. 16 lieux différents ont été identifiés, ils sont numérotés de A à Q.
- (4) Pour chaque niveau de jeu, l'ordinateur crée des probabilités de transitions (déplacements) de façon aléatoire entre les lieux fréquentés par Bob (de 2 à 5 suivant le niveau). Puis, il simule un ensemble fini de déplacements de Bob, cohérent avec ces probabilités, et qu'il indique au joueur. Ce dernier doit alors prévoir les déplacements à venir de Bob à partir d'un lieu de départ, afin de le capturer.
- (5) C'est-à-dire, que certains déplacements sont plus fréquents que d'autres.
- (6) Il est difficile de comprendre ici ce que les élèves veulent exprimer. En effet, même si l'on s'intéresse au temps passé dans chaque lieu, l'aléatoire restera présent.
- (7) Une matrice est une forme de représentation d'un tableau à double entrée.
- (8) Une matrice stochastique est en effet une matrice à n lignes et n colonnes, dont chaque élément est un nombre compris entre 0 et 1 et dont la somme des éléments de chaque ligne vaut 1.
- (9) La démonstration n'a pas été fournie par les élèves. Le résultat annoncé est toutefois exact.
- (10) Les élèves n'ont pas fourni d'information supplémentaire concernant cette animation Geogebra.
- (11) Attention : l'exemple qui est donné n'est pas compatible avec les définitions précédentes. En effet, les poids devraient être des nombres compris entre 0 et 1 de somme totale égale à 1, ce qui n'est pas le cas de l'exemple de la photo.
- (12) «abs» désigne la fonction valeur absolue d'un nombre réel.
- (13) Le résultat est conjecturé par les élèves, mais n'est pas démontré.
- (14) Et avec la fonction racine carrée.
- (15) La formule est obtenue de façon expérimentale, et n'est pas exacte.
- (16) On regrettera que sur ce graphique (ainsi que sur les deux suivants) les échelles en abscisse et en ordonnée ne soient pas indiquées, de même que les légendes pour les différentes couleurs de points.
- (17) Les élèves parlent de "courbe en forme de cloche", la célèbre courbe de Gauss très présente dans le domaine des probabilités. Pour en savoir plus, on pourra consulter : [http : //images.math.CNRS.fr/La-courbe-verte-en-cloche.html](http://images.math.CNRS.fr/La-courbe-verte-en-cloche.html).
- (18) Une matrice est dite bistochastique si la somme des éléments de chaque ligne ET de chaque colonne vaut 1.

LOI DE ALBINE 3

Tous les nombres qui commencent par 8 et qui finissent par 3 multipliés par 5 commencent par 4 et finissent par 5.

ex : $89113 \times 5 = 445565$

Drôles de touches

Année 2011-2012

Fabien Potier, Clément Bellanger, Léa Barron, Marion Casuso, Jordan Cesaro, Anthony Lopez et Anthony Marchal, élèves de terminale, première et seconde.

Encadrés par : Hélène Billon et Vincent Cantus

Établissement : Lycée Saint Exupéry - FAMECK

Chercheuse : Julie Scholler

I Présentation du sujet

A/ La calculatrice

Par erreur, notre calculatrice tombe et se détraque : elle affiche 0, et seules 4 touches fonctionnent encore. Les quatre touches sont les suivantes :

- Les touches 0, 4, 6 gardent leur fonction d'origine : le chiffre s'affiche à la droite du nombre affiché à l'écran.
- La touche 2 ne fonctionne plus de la même manière : quand elle est utilisée, si le nombre affiché est pair, elle le divise par 2 sinon elle ne fait rien.

Exemples :

À l'écran j'ai 14 et j'appuie sur la touche 0 : l'affichage devient 140.

À l'écran j'ai 12 et j'appuie sur la touche 2 : l'affichage devient 6.

À l'écran j'ai 13, j'appuie sur la touche 2 : 13

À l'écran, j'ai 9, j'appuie sur la touche 4 : 94

À l'écran, j'ai 7, j'appuie sur la touche 6 : 76

Lien vers la simulation de la calculatrice : zoo-nature.forum-actif.net/h8-la-calculatrice-cassee

Nous nous demandons s'il est encore possible d'afficher n'importe quel nombre sur la calculatrice.

B/ Introduction aux listes

DÉFINITION :

Tout nombre entier n possède deux types de listes qui lui sont propres :

- **Les listes de touches** : ce sont les listes des touches sur lesquelles nous tapons pour afficher le nombre n .
- **Les listes d'affichages** : ce sont les listes des affichages intermédiaires que nous voyons sur la calculatrice avant d'arriver au nombre n .

Exemple :

Choisissons 16 et décomposons le suivant ses listes :

- Une liste de touches de 16 est : (4, 2, 2, 6), la liste d'affichages correspondante est (4, 2, 1, 16).
- une autre liste de touches est (6, 4, 2, 2), la liste d'affichages qui correspond est (6, 64, 32, 16).

Remarques :

- Une liste (de touches ou d'affichages) est propre à un nombre, mais un nombre possède plusieurs listes de chaque type.
- Une liste d'affichage correspond à une liste de touche précise.

II Algorithmme

A/ Présentation de l'algorithme

Un algorithme est une suite d'opérations à effectuer dans un ordre précis, comme une recette de cuisine. Tous les programmes informatiques proviennent d'un algorithme.

Notre algorithme nous donne la liste de touches et la liste d'affichages d'un nombre donné. Il fonctionne grâce aux réciproques des commandes de base de la calculatrice. Pour cela, nous avons étudié les fonctions de chaque touche de la calculatrice, elles sont les suivantes :

- Touche 0 : elle insère un 0 à la fin du nombre affiché, donc elle le multiplie par 10. Sa formule est $10x$.
- Touche 2 : elle divise par 2 le nombre affiché s'il est pair. Sa formule est $x/2$.
- Touche 4 : elle insère un 4 à la fin du nombre affiché, donc elle le multiplie par 10 et lui ajoute 4. Sa formule est $10x + 4$.
- Touche 6 : elle insère un 6 à la fin du nombre affiché, donc elle le multiplie par 10 et lui ajoute 6. Sa formule est $10x + 6$.

Ensuite, il faut trouver les formules réciproques de celles des fonctions de base :

- Touche 0 : la réciproque de $10x$ est $x/10$ ou $0,1x$
- Touche 2 : la réciproque de $x/2$ est $2x$
- Touche 4 : la réciproque de $10x + 4$ est $(x - 4)/10$ ou $0,1x - 0,4$
- Touche 6 : la réciproque de $10x + 6$ est $(x - 6)/10$ ou $0,1x - 0,6$

Pour créer un procédé algorithmique, nous avons décidé pour raison de simplicité que lorsque le nombre se termine par 0, 4 ou 6, nous pouvons « faire tomber » ce chiffre (c'est-à-dire utiliser la formule réciproque associée à sa touche, et donc le faire disparaître) et que lorsqu'aucun de ces chiffres n'est présent à la fin du nombre, nous le multiplions par 2 (réciproque de l'appui sur la touche 2). Donc on peut en déduire que le 2 est la touche qui revient le plus souvent.

L'algorithme est donc :

Saisie :

Affecter à x un nombre entier positif.

Traitement :

Tant que x est différent de 0 :

Si x se termine par 0 :

Noter 0.

Faire tomber le 0.

Sinon si x se termine par 4 :

Noter 4.

Faire tomber le 4.

Sinon si x se termine par 6 :

Noter 6.

Faire tomber le 6.

Sinon :

Noter 2.

Multiplier x par 2.

Finsi

Finsi

Finsi

Noter à nouveau tous les chiffres dans l'ordre inverse.

Sortie :

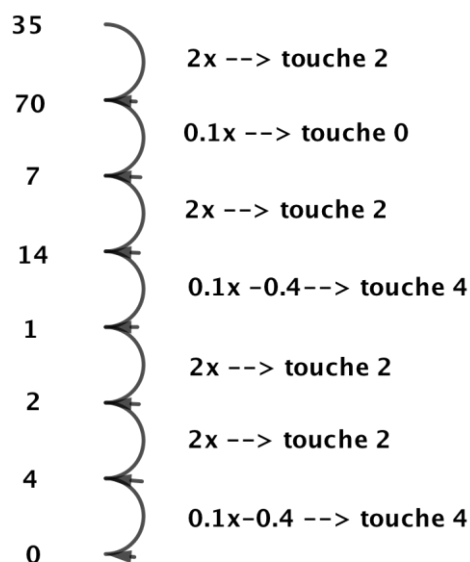
Les chiffres obtenus représentent une liste de touches de x .

Sur Python :

```
# -*-coding:Latin-1 -*-
from math import *
from os import *
liste_H=[]
print("saisir un nombre")
nombrestr=input()
nombre=int(nombrestr)
while nombre!=0:
    if nombre/10==int(nombre/10):
        liste_H.insert(0,0)
        nombre=nombre/10
    elif (nombre-4)/10==int((nombre-4)/10):
        liste_H.insert(0,4)
        nombre=(nombre-4)/10
    elif (nombre-6)/10==int((nombre-6)/10):
        liste_H.insert(0,6)
        nombre=(nombre-6)/10
    else:
        liste_H.insert(0,2)
        nombre=nombre*2
print (liste_H)
system("pause")
```

Exemple :

Nous allons trouver la liste de touches de 35 donnée par notre algorithme :



En lisant la suite de touches à partir du bas, on obtient la liste suivante : (4, 2, 2, 4, 2, 0, 2) donc on a bien obtenu une liste de touches de 35.

B/ Démonstration

La démonstration se fait par disjonction des cas. La démonstration par disjonction des cas consiste à séparer la totalité des nombres en plusieurs cas différents.

Nous séparons les nombres n en fonction de leur chiffre des unités. Nous commençons par compter le nombre de multiplications par 2 que nécessite chaque nombre pour se terminer par 0, 4 ou 6.

Exemple : prenons le cas d'un nombre n se terminant par 1.

Il ne se termine donc pas par 0, 4 ou 6, donc on le multiplie par 2 : on obtient alors un nombre se terminant par 2. Celui-ci ne se termine donc pas par 0, 4 ou 6 donc on le multiplie à nouveau par 2 : il se termine donc par 4, donc on peut « faire tomber » le 4.

Les nombres se terminant par 1 doivent donc être multipliés deux fois par 2 pour pouvoir enlever une unité. La formule à appliquer sur un nombre se terminant par 1 pour le faire baisser d'un rang est donc

$$0,1 \times ((x \times 2) \times 2) - 0,4$$

donc $0,4x = 0,4$.

On répète ensuite cette opération pour les 9 autres cas restants. On résume ensuite les résultats dans un tableau :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\times 2$		2	4	6		0	2	4	6	8
$\times 2$		4					4			6

Donc au bout de deux étapes au maximum, le nombre se terminera par 0, 4 ou 6. Ensuite, on cherche les formules à appliquer pour diminuer d'un rang, qu'on résume sous forme d'un tableau :

Chiffre	0	1	2	3	4
Formule	$n/10$ $0,1n$	$(4n - 4)/10$ $0,4n - 0,4$	$(2n - 4)/10$ $0,2n - 0,4$	$(2n - 6)/10$ $0,2n - 0,6$	$(n - 4)/10$ $0,1n - 0,4$
Chiffre	5	6	7	8	9
Formule	$2n/10$ $0,2n$	$(n - 6)/10$ $0,1n - 0,6$	$(2n - 4)/10$ $0,2n - 0,5$	$(2n - 6)/10$ $0,2n - 0,6$	$(4n - 6)/10$ $0,4n - 0,6$

On observe ensuite les formules ainsi découvertes : on remarque tout d'abord que ce sont des différences, donc elles sont inférieures à leur premier terme. Ensuite, ce terme lui-même est un produit entre le nombre n et un coefficient qui est toujours inférieur à 1 : donc ce terme est toujours inférieur à n et on peut en déduire que le résultat de la formule est toujours inférieur à n .

Finalement, si l'on utilise plusieurs fois ces formules de manière consécutive, avec un nombre entier naturel qui diminue strictement à chaque fois, on finit inmanquablement par retomber sur 0. Ainsi l'algorithme se finit car on peut toujours trouver une liste finie de touches pour un nombre.

III A PARTIR D'UN AUTRE AFFICHAGE INITIAL

Après s'être interrogé sur les différentes listes à partir de 0, nous nous demandons s'il est possible de démarrer à partir d'un autre affichage initial.

Nous remarquons tout d'abord qu'une liste de touches avec l'affichage initial 0 commence obligatoirement par 4 ou 6 car lorsque nous avons 0, appuyer sur 2 ou sur 0 nous redonne le même nombre. Si, à partir d'un nombre donné, on arrive à afficher un 4 ou un 6, notre algorithme devient applicable.

DEFINITION :

Pour tout nombre n entier positif, on peut lui associer deux types de listes qui lui sont propres :

- Les listes de retour à 4 : c'est la liste des touches à taper pour réussir à afficher 4 à partir de n .
- Les listes de retour à 6 : c'est la liste des touches à taper pour réussir à afficher 6 à partir de n .

Exemple : l'exemple que nous avons le plus travaillé est celui dans lequel l'affichage initial est 13 :

- Une liste de retour à 4 de 13 est : (0, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 2, 2, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) mais aussi (6, 2, 2, 2, 6, 2, 2, 2, 2, 4, 2, 6, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 6, 2, 2, 2, 2, 4, 2, 2, 2, 2).
- Une liste de retour à 6 de 13 est : (6, 2, 2, 2, 6, 2, 2, 2, 2, 4, 2, 6, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 6, 2, 2, 2, 2).

Remarque :

Comme pour les listes de touches et d’affichages, une liste de retour est propre à un nombre précis, mais un nombre possède plusieurs listes de retour de chaque type.

Après quelques séances de recherches nous avons trouvé la liste de touches :
(0, 4, 2, 2, 2, 6, 2, 2, 6, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) pour l’affichage initial 13. Nous avons alors cherché à savoir si on pouvait, à partir de n’importe quel nombre initial, revenir jusqu’à 4 (sachant que nous connaissons une liste de retour à 4 pour 6 : (1, 2, 2), l’étude de ce seul cas suffit) (1).

CONJECTURE : pour tout affichage initial n , il existe une liste de retour à 4.

Cela ne reste qu’une conjecture car nous n’avons pas trouvé de méthode générale pour trouver une telle liste. Cependant nous en avons trouvé une pour tous les entiers de 1 à 100.

IV D’AUTRES QUESTIONS QUE NOUS NOUS SOMMES POSÉES

Au cours de nos recherches, nous avons aussi abordé les problématiques suivantes.

A/ Les bypass : le bypass du 6

Pour approfondir le sujet, la question s’est posée de savoir s’il était possible de faire fonctionner l’algorithme sans utiliser certaines touches de la calculatrice.

Tout d’abord, la question a été posée de savoir s’il était possible de retrouver des listes sans utiliser une seule fois la touche 6.

C’est possible car lorsqu’un nombre se termine par 6, après deux multiplications par 2, on en obtient un se finissant par 4. Pour les premiers tests, l’algorithme a été repris en enlevant juste la partie dans laquelle on fait tomber le 6 :

Saisie :

Affecter à x un nombre entier positif.

Traitement :

Tant que x est différent de 0
 Si x se termine par 0
 Noter 0.
 Faire tomber le 0.
 Sinon si x se termine par 4
 Noter 4.
 Faire tomber le 4.
 Sinon
 Noter 2.
 Multiplier x par 2.
Finsi
Finsi

Noter tous les chiffres dans l’ordre inverse.

Sortie :

Les chiffres obtenus représentent une liste de touches de x .
On obtient ainsi un autre type de listes de touches, qui seront donc plus longues, mais tout aussi fonctionnelles.

Démonstration :

Il faut ensuite prouver que l’algorithme se termine, et ceci pour tous les nombres entiers positifs. Pour le faire, on utilise une démonstration similaire à celle du premier algorithme.
Tout d’abord, nous refaisons un tableau résumant les étapes de calcul en fonction du chiffre des unités :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
× 2		2	4	6		0	2	4	6	8
× 2		4		2			4		2	6
× 2				4					4	2
× 2										4

Ensuite, on recherche à nouveau les formules associées pour chaque chiffre des unités.

Chiffre	0	1	2	3	4
Formule	$n/10$ $0,1n$	$(4n - 4)/10$ $0,4n - 0,4$	$(2n - 4)/10$ $0,2n - 0,4$	$(8n - 4)/10$ $0,8n - 0,4$	$(n - 4)/10$ $0,1n - 0,4$
Chiffre	5	6	7	8	9
Formule	$2n/10$ $0,2n$	$(4n - 4)/10$ $0,4n - 0,4$	$(2n - 4)/10$ $0,2n - 0,5$	$(8n - 4)/10$ $0,8n - 0,4$	$(16n - 4)/10$ $1,6n - 0,4$

On observe ensuite les formules ainsi découvertes, on remarque tout d'abord que ce sont des différences. Pour les chiffres de 1 à 8, ces différences sont inférieures à n (voir démonstration dans le II).

On peut en déduire que l'affichage obtenu est inférieur à n . Il faut donc tester si, pour 9, la différence est inférieure à n . Pour cela, on utilise les congruences.

Un nombre a est congru à un nombre b modulo c si on peut écrire $a = b + k \times c$ (avec k un nombre entier) on écrit : $a \equiv b \pmod{c}$.

Un nombre n qui se termine par 9 est congru à 9 ou à 19 modulo 20, en utilisant les propriétés sur les congruences, on peut écrire :

$$n \equiv 9 \pmod{20} \text{ ou } n \equiv 19 \pmod{20}$$

$$16n \equiv 144 \pmod{20} \text{ ou } 16n \equiv 304 \pmod{20}$$

$$16n \equiv 4 \pmod{20}$$

$$16n = 4 + 20k \text{ (avec } k \text{ entier)}$$

$$16n - 4 = 20k$$

$$(16n - 4)/10 = 2k$$

Ainsi, $(16n - 4)/10$ est pair et c'est le nombre affiché après application d'une étape de la boucle de l'algorithme, sur un nombre se terminant par 9. Or un nombre pair se termine par 0, 2, 4 ou 6 ou 8. On peut donc étudier le résultat de deux applications de cette boucle sur un nombre qui se termine initialement par 9 : on obtient à nouveau des fonctions affines de n . En étudiant les coefficients en n , ils sont tous inférieurs à 1 sauf pour un nombre se terminant par 8 consécutivement à la chute du 9.

Chiffres des affichages	9 puis 0	9 puis 2
Formule	$0,16n - 0,04$	$0,32n - 0,48$
Chiffres des affichages	9 puis 4	9 puis 6
Formule	$0,16n - 0,44$	$0,64n - 0,2$

Cas problématique où les chiffres des affichages sont 9 puis 8 : $1,28n - 0,72$

On démontre, à l'aide de congruences, que le nombre $(8n - 4)/10$ est pair si n est congru à 8 modulo 10, or un nombre pair se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8. On peut donc étudier le résultat de trois applications de la boucle de l'algorithme sur un nombre qui se termine initialement par 9, puis par 8, en refaisant un autre tableau. De nouveau, un seul cas pose problème : si l'affichage se termine une fois encore par 8, le coefficient en n est 1,024.

On recommence en étudiant l'effet de quatre applications consécutives avec le même type de raisonnements que dans le paragraphe précédent et toutes les fonctions obtenues ont cette fois un coefficient inférieur à 1 (au maximum, c'est 0,8192).

CQFD

B/ La limite du 6

Après avoir utilisé les listes d'autant de manières différentes, nous nous sommes demandé si la longueur des listes fournies par notre algorithme pouvait être majorée. Après diverses recherches et différents tests, cette conjecture des listes a pu être trouvée :

CONJECTURE :

On définit un entier positif n , on note k le nombre de chiffres de ce nombre. La longueur de liste de touches fournie par notre algorithme (c'est-à-dire le nombre de touches à utiliser) ne dépasse pas $6k$.

Exemple : On considère le nombre $x = 415$, les chiffres qui le composent sont : 4-1-5, il est ainsi composé de 3 chiffres. Après application de l'algorithme, on trouve la liste : (4, 2, 2, 6, 6, 2, 0, 2). Le nombre de touches utilisées est égal à 8 alors que $6 \times 3 = 18$. 8 étant bien plus petit que 18, le nombre d'éléments de sa liste de touches la plus courte est inférieure à la limite du 6.

Remarques :

- Cette propriété n'a pas pu être démontrée pour l'instant, mais elle a été vérifiée par informatique, tous les nombres jusqu'à 2×10^9 sont compatibles avec celle-ci.
- Le premier nombre à atteindre cette limite est 87499.
- Les nombres possédant une limite proche de 6 se caractérisent par une récurrence de nombres se terminant par 1 ou par 9 dans leur liste d'affichage.

NOTES D'ÉDITION

(1) La liste de retour à 4 pour 6 ne peut pas être (1, 2, 2) puisque la touche 1 ne fonctionne pas.

Une liste possible : (4, 2, 2, 2, 2)

LOI DE CHARLOTTE 2

$$3 \times 2 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2$$

$$6 \times 4 = 6 + 6 + 6 + 6 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$$

$$10 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$$

LOI DE JEAN-CLAUDE 1

Si $A + B = C$, alors :

$$C - A = B$$

$$C - B = A$$

Calculer à la règle non graduée et au compas

Année 2012-2013

*Ilina Rundstadler (5^e), Alice Marion, Emeline Thommes (4^e), Bixente Grandjean,
Eric Macel, Louise Wu (3^e)*

Encadrés par : Louissette Hiriart et Christelle Kunc

Établissement : Collège George Chepfer, Villers-lès-Nancy

Chercheuse : Anne De Roton (Université de Lorraine)

Présentation du sujet

Je suis bien embêtée...

Je dois dessiner une figure en vraie grandeur.

Toutes les dimensions dépendent de deux longueurs a et b non nulles.

Je dispose d'une feuille de papier sur laquelle quatre points O , I , A et B sont placés sur une droite telle que : $OI = 1$, $OA = a$ et $OB = b$. Mais j'ai oublié ma règle graduée !

J'ai juste une règle sans graduation et un compas et je dois tracer des segments de certaines longueurs.

Puis-je tracer un segment de longueur $a + b$, $a - b$, ab , a/b , a^2 , a^3 , a^n , $\sqrt{a}$, etc. ?

Bref, quels calculs puis-je faire avec ma règle et mon compas ?

Sommaire :

A – Calculer à la règle non graduée et au compas. Au tout début ...

B – Constructions et propriétés utilisées

1°) Les trois constructions à la règle non graduée et au compas de base utilisées.

2°) Les trois propriétés utilisées.

C – Les constructions :

1°) D'un segment de longueur $a + b$ ou $a - b$.

2°) D'un segment de longueur une fraction de a .

3°) D'un segment de longueur a/b .

4°) D'un segment de longueur ab .

5°) D'un segment de longueur une puissance de a .

6°) D'un segment de longueur $\sqrt{a}$.

D – Conclusion.

A - Calculer à la règle et au compas

La géométrie euclidienne

Euclide (né vers -325, mort vers -265 à Alexandrie) est un mathématicien de la Grèce antique. Il a fondé sa géométrie sur un système d'axiomes qui assure en particulier qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés et qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné.



La **géométrie euclidienne** est donc la géométrie des droites et des cercles, donc de **la règle non graduée et du compas**.

L'intuition d'Euclide était que tout nombre pouvait être construit, ou "obtenu", à l'aide de ces deux seuls instruments.

La règle et le compas en architecture

Les liens qui unissent les constructions à la règle et au compas avec l'architecture sont très étroits.

Au Moyen Âge, le maître architecte est celui qui possède le savoir de la géométrie, il discute sur un pied d'égalité avec les dirigeants religieux. Dans une société où peu savent lire, le plan, construit à la règle et au compas, est le seul moyen de communication simple entre l'architecte et les ouvriers.



Ils utilisent pour leur construction, un compas et une règle, mais aussi, quand la taille des mesures est trop importante, **le cordeau** qui remplace indifféremment la règle (trait tiré au cordeau) et le compas.

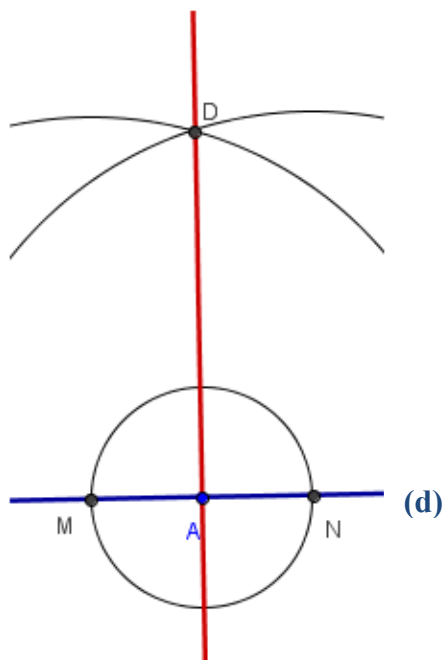
(Source Wikipédia)

Le cordeau remplace la règle non graduée et le compas.

B – Constructions et propriétés utilisées

1°) Les trois constructions de base utilisées :

a) Droite perpendiculaire à une droite (d) passant par un point A appartenant à la droite (d) .

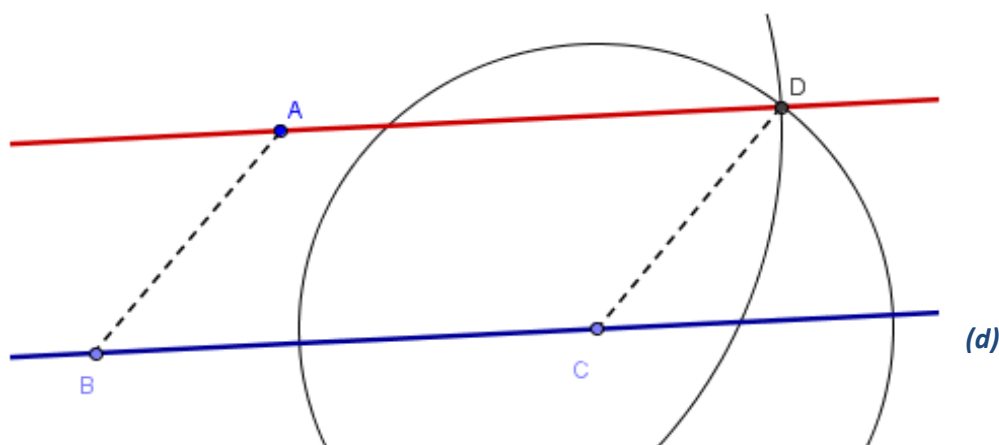


▪ Sur (d) , on trace deux points M et N symétriques par rapport au point A .
 A est donc le milieu du segment $[MN]$.

▪ On trace deux arcs cercles de même rayon et de centre M et N , ils sont sécants en D . Le point D est alors situé à égale distance des points M et N , il appartient à la médiatrice du segment $[MN]$.

La droite (AD) est alors la médiatrice du segment $[MN]$, elle est perpendiculaire à (d) passant par A .

b) Droite parallèle à une droite (d) passant par un point A n'appartenant pas à la droite (d) .



$$\begin{aligned} CD &= BA \\ \text{et} \\ AD &= BC \end{aligned}$$

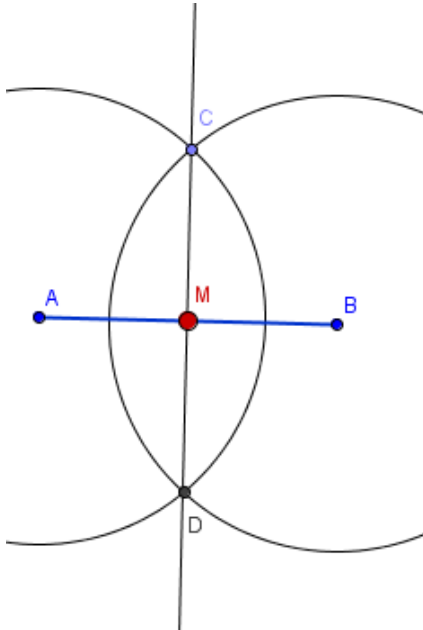
▪ On place deux points B et C sur la droite (d) .

▪ On trace le cercle de centre C et de rayon AB et le cercle de centre A et de rayon BC . On note D le point d'intersection de ces deux cercles qui se trouve dans le demi-plan délimité par la droite (d) qui contient A .

▪ Le quadrilatère $ABCD$ est alors non croisé et il a ses côtés opposés de même longueur, c'est donc un parallélogramme, et ses côtés opposés sont parallèles.

La droite (AD) est alors la droite parallèle à la droite (d) passant par A .

c) Milieu d'un segment.



- Au compas, on trace deux arcs de cercle de même rayon et de centres A et B , ils se coupent en C et D .
- C et D sont situés à égale distance de A et B , ils appartiennent à la médiatrice du segment $[AB]$.
- La droite (CD) est donc la médiatrice du segment $[AB]$, elle coupe le segment $[AB]$ en son milieu M .

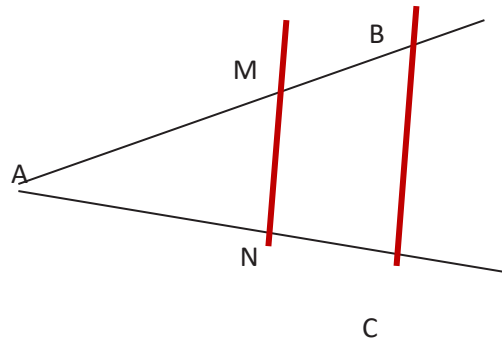
M est le milieu du segment $[AB]$.

2°) Les trois propriétés utilisées :

a) Le théorème de Thalès

Si $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$,

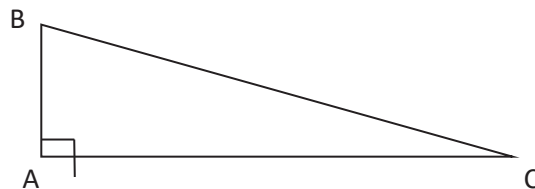
$$\text{alors } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$



b) Le théorème de Pythagore

Si ABC est un triangle rectangle en A ,

$$\text{alors } BC^2 = BA^2 + AC^2$$

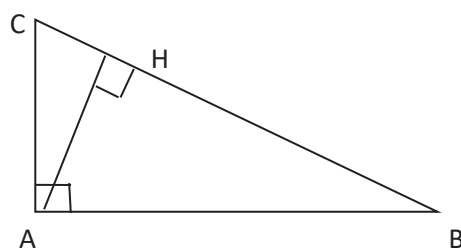


c) Hauteur dans un triangle rectangle

Si ABC est un triangle rectangle en A et H est le

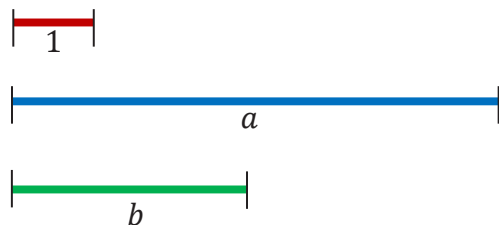
ped de la hauteur issue de A ,

$$\text{alors } AH^2 = BH \times HC \quad (1)$$



C – Les constructions

Au départ, on se donne une unité de longueur et deux segments de longueurs a et b .



1°) Segment de longueur $a + b$ ou $a - b$.

Soient a et b deux nombres positifs donnés, $a > b$

Sur une droite sont placés les points O, I, A et B tels que $OI = 1$, $OA = a$ et $OB = b$.

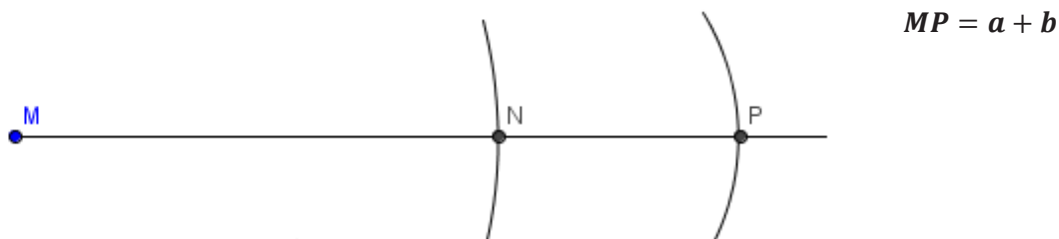


a) Segment de longueur $a + b$.

À la règle non graduée, on trace une demi-droite d'origine M .

Au compas, on trace un arc de cercle de centre M et de rayon OA , il coupe la demi-droite d'origine M en N , puis un arc de cercle de centre N et de rayon OB , il coupe la droite (MN) en 2 points dont l'un n'appartient pas au segment $[MN]$, on note P ce point.

On a alors $MP = MN + NP = OA + OB = a + b$.

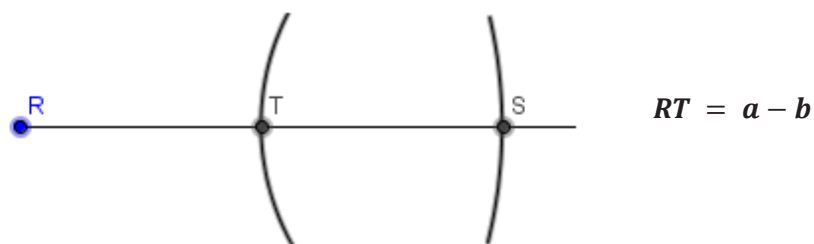


b) Segment de longueur $a - b$.

À la règle non graduée, on trace une demi-droite d'origine R .

Au compas, on trace un arc de cercle de centre R et de rayon OA , il coupe la demi-droite d'origine R en S , puis un arc de cercle de centre S et de rayon OB , il coupe le segment $[RS]$ en T .

On a alors $RT = RS - ST = OA - OB = a - b$.



2°) Segment de longueur une fraction de a .

▪ Segment de longueur $\frac{5}{7} \times a$

Données : $OI = 1$ et $OA = a$.

Au compas et à la règle non graduée, on trace un segment $[MN]$ de longueur a .

On trace une demi-droite $[MB)$ que l'on gradue régulièrement à l'aide du compas.

On trace à l'aide de la règle non graduée la droite (A_7N) .

A l'aide du compas, on construit le point Q tel que : A_5A_7NQ soit un parallélogramme.

(A_5Q) est alors parallèle à (A_7N) .

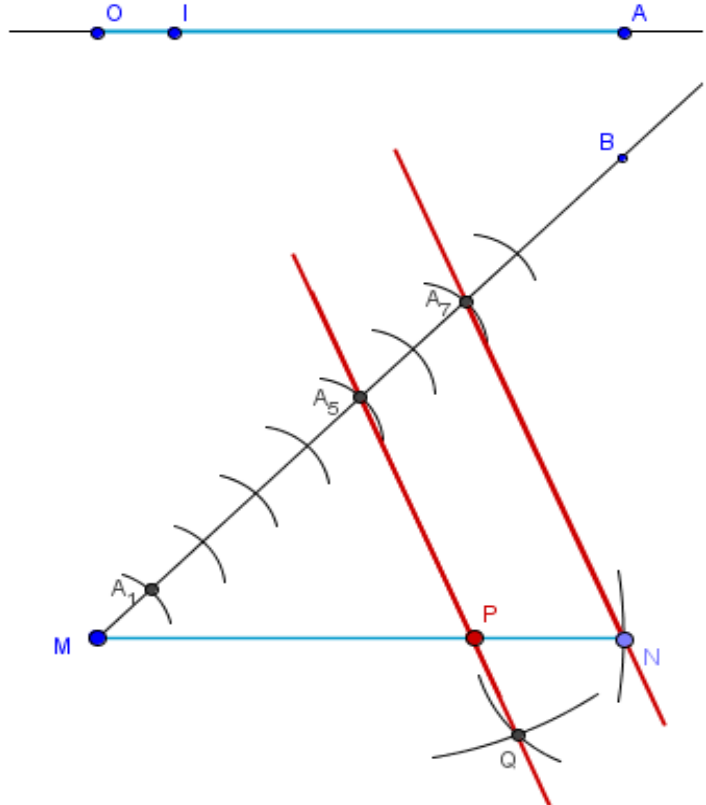
La parallèle à (A_7N) passant par A_5 coupe $[MN]$ en P .

Alors d'après le théorème de Thalès, on a :

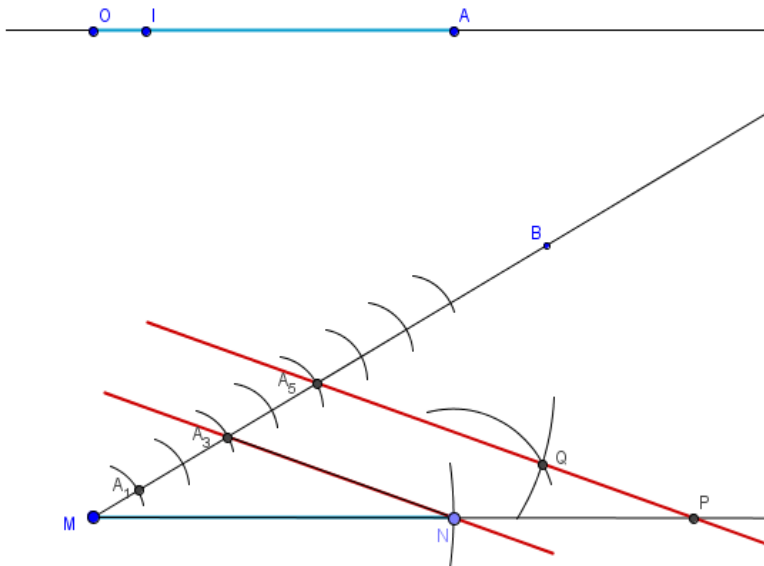
$$\frac{MA_5}{MA_7} = \frac{MP}{MN}, \text{ d'où } \frac{5}{7} = \frac{MP}{a},$$

$$\text{d'où } 7 \times MP = 5 \times a,$$

$$\text{Et on a alors : } MP = \frac{5}{7} \times a.$$



▪ Segment de longueur $\frac{5}{3} \times a$



Données : $OI = 1$ et $OA = a$.

Comme précédemment, on trace $[MN]$ de longueur a et on gradue régulièrement la demi-droite $[MB)$

On trace à l'aide de la règle non graduée la droite (A_3N) .

À l'aide du compas, on construit le point Q tel que : A_3A_5QN soit un parallélogramme.

(A_5Q) est alors parallèle à (A_3N) .

La parallèle à (A_3N) passant par A_5 coupe $[MN]$ en P .

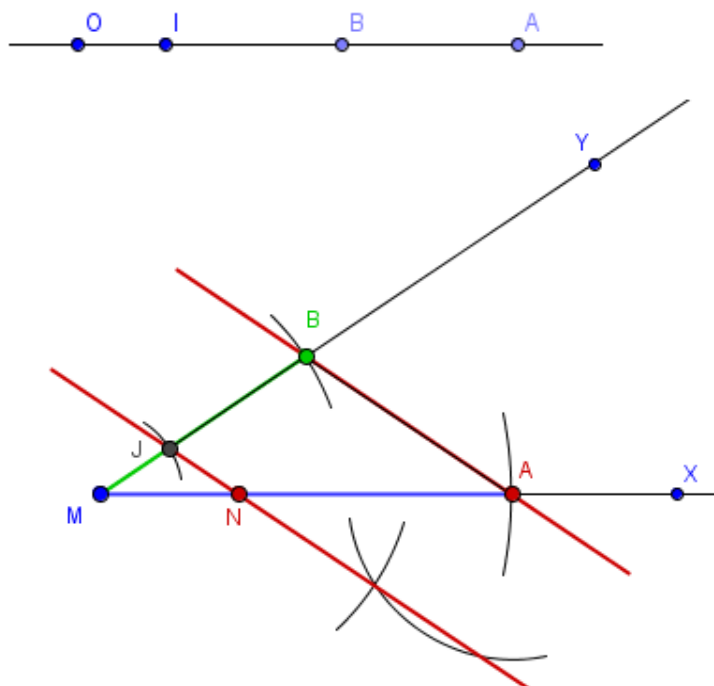
D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{MA_3}{MA_5} = \frac{MN}{MP}.$$

$$\text{D'où } \frac{3}{5} = \frac{a}{MP}, \text{ soit } 3 \times MP = 5 \times a \text{ et } MP = \frac{5}{3} \times a.$$

3°) Segment de longueur $\frac{a}{b}$.

Données : $OI = 1$, $OA = a$ et $OB = b$



À la règle non graduée, on trace deux demi-droites de même origine $[MX)$ et $[MY)$.

Au compas :
 - sur $[MX)$, on place le point A tel que $MA = a$.
 - sur $[MY)$, on place J tel que $MJ = 1$ et $MB = b$.

À la règle non graduée et au compas, on trace la droite parallèle à (AB) et passant par J , elle coupe le segment $[MA]$ en N . (cf. Construction de base)

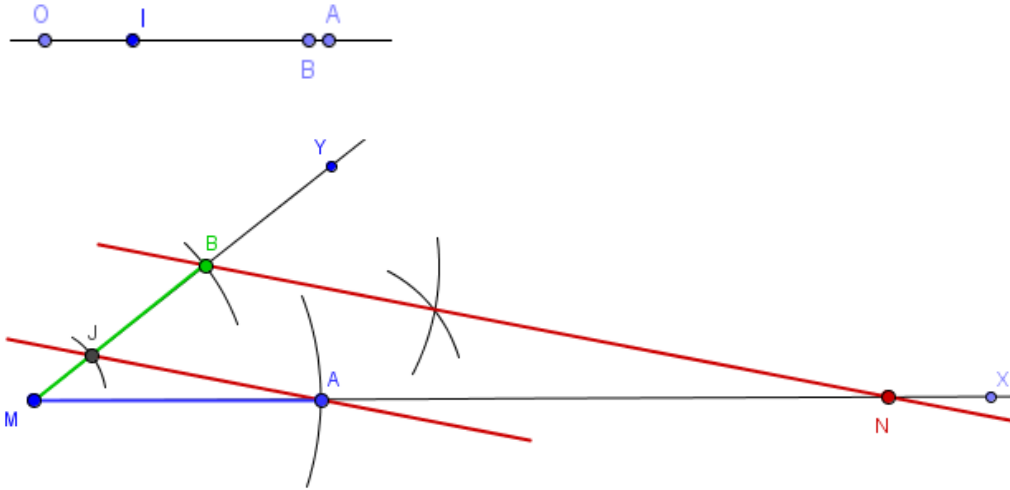
Dans le triangle MBA , $J \in [MB]$, $N \in [MA]$ et $(JN) \parallel (BA)$ (2), alors d'après le théorème de Thalès,

$$\text{on a : } \frac{MJ}{MB} = \frac{MN}{MA} \text{ soit : } \frac{1}{b} = \frac{MN}{a}$$

$$\text{D'où } b \times MN = 1 \times a, \text{ donc } \mathbf{MN = \frac{a}{b}}.$$

4°) Segment de longueur $a \times b$.

Données : $OI = 1$, $OA = a$ et $OB = b$



À la règle non graduée, on trace deux demi-droites de même origine $[MX)$ et $[MY)$.

Au compas :
- sur $[MX)$, on place le point A tel que $MA = a$.
- sur $[MY)$, on place J tel que $MJ = 1$ et $MB = b$.

À la règle non graduée et au compas, on trace la droite parallèle à (AJ) et passant par B , elle coupe la demi-droite $[MX)$ en N . (cf. Construction de base)

Dans le triangle MBN , $J \in [MB]$, $A \in [MN]$ et $(JA) \parallel (BN)$ (3), alors d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{MJ}{MB} = \frac{MA}{MN} \text{ soit } \frac{1}{b} = \frac{a}{MN} \text{ donc } MN = a \times b.$$

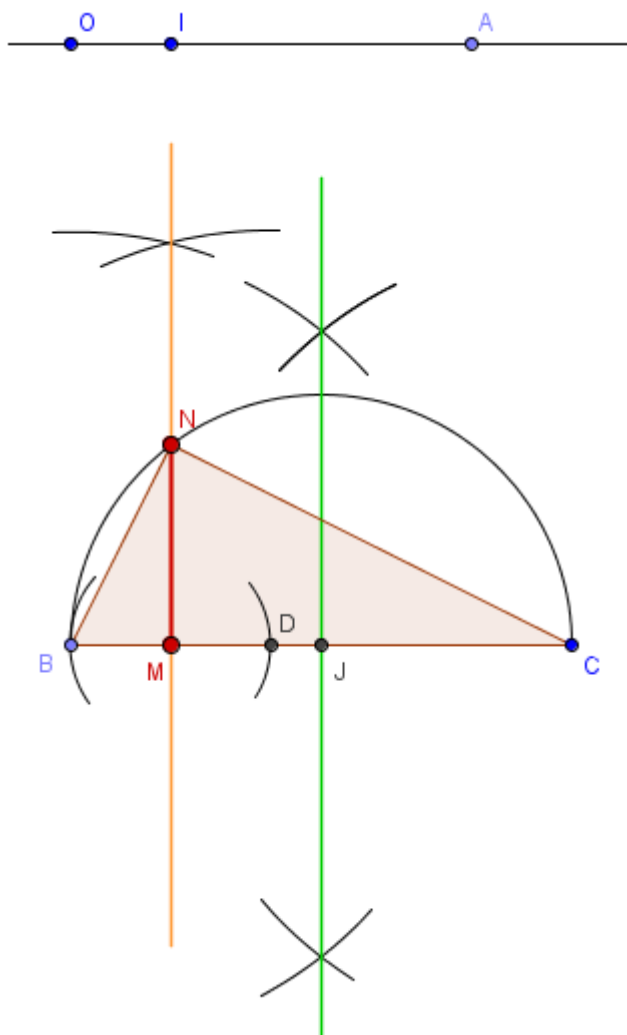


Dans le grand hall de l'école
Polytechnique, c'est nous....

Congrès d'Orsay (avril 2013)

5°) Segment de longueur $\sqrt{a}$.

Données : $OI = 1$ et $OA = a$.



On place 3 points alignés B , M et C tels que : $BM = 1$ et $MC = a$ à l'aide de la règle non graduée et du compas.

On trace le milieu J du segment $[BC]$ (cf. Constructions de base).

On trace le demi-cercle de centre J et de diamètre $[BC]$.

On trace la droite perpendiculaire à la droite (BC) et passant par M (cf. Constructions de base) ; elle coupe le demi-cercle de diamètre $[BC]$ en N .

N étant un point du cercle de diamètre $[BC]$, le triangle BNC est rectangle en N .

Le point M est le pied de la hauteur issue du sommet N de l'angle droit dans le triangle BNC rectangle en N , on a alors $MN^2 = BM \times MC$.

$$\text{D'où } MN^2 = 1 \times a = a$$

Or $MN > 0$ donc $MN = \sqrt{a}$.

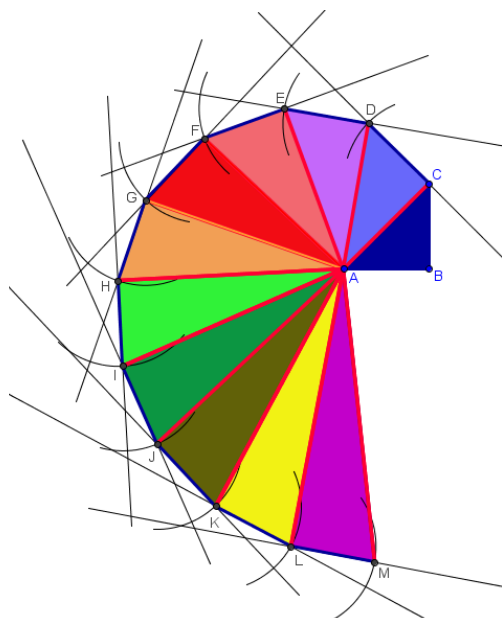
Au compas et à la règle non graduée, on trace une suite de triangles rectangles.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

- ABC rectangle en B avec $AB = BC = 1$ donc $AC = \sqrt{2}$,
- ACD rectangle en C avec $AC = \sqrt{2}$ et $CD = 1$ donc $AD = \sqrt{3}$,
- ADE rectangle en D avec $AD = \sqrt{3}$ et $DE = 1$ donc $AE = \sqrt{4} = 2$,
- $AF = \sqrt{5}$
- $AG = \sqrt{6}$
- $AM = \sqrt{12}$ etc.



« L'escargot » de Pythagore



D – Conclusion

Les constructions que nous avons effectuées à la règle non graduée et au compas peuvent se combiner entre elles.

Nous savons donc construire tous les nombres positifs qui s'écrivent uniquement à l'aide des cinq opérations : $+$, $-$, $\times$, $\div$ et $\sqrt{}$.

Par exemple, avec patience, on pourrait construire le nombre $= 5^2 + 3\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Remerciements

Nous remercions chaleureusement notre chercheuse Anne De Roton pour son sujet qui nous a passionnés et nous a tenus en haleine tout au long de l'année. Son aide, sa présence et ses encouragements ont été précieux.

NOTES D'ÉDITION

(1) Cette propriété n'est pas en général connue au collège. On peut la démontrer à partir du théorème de Pythagore appliquée aux triangles ABC, HAC et HAB.

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = (BH + HC)^2 = BH^2 + HC^2 + 2 BH \times HC$$

$$\text{Or } AC^2 = AH^2 + HC^2 \text{ et } AB^2 = AH^2 + HB^2. \text{ D'où } 2AH^2 = 2 BH \times HC.$$

(2) Ceci n'est vrai que lorsque a et b sont supérieurs à 1. Mais la construction est analogue dans les cas $a < 1$ ou $b < 1$.

(3) Même remarque que dans la note 2.

LOI DE ESTELLE 4

Il y a 271 nombres qui utilisent au moins un 3 entre 1 et 1000 :

300 ... 399 : #100

19 entre 1 et 100 :

30 ... 39 : #10

3, 13, 23, 43, 53, 63, 73, 83, 93 : # 9

100, 200, 400, 500, 600, 700, 800, 900 ... : $19 \times 8 = 152$

Total : $19 + 100 + 152 = 271$

De l'aire!

Année 2012-2013

Nathan Buche, Yann Chirpaz, Thomas Dijoux, Irfaane Ousseny, Florian Rebeca

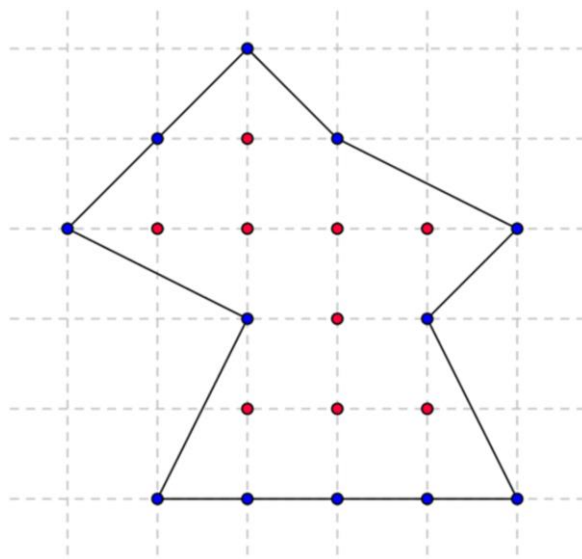
Encadrés par : Jérôme Anselmet et Sophie Fur-Desoutter

Établissements : Lycée Jean Hinglo (Le Port, La Réunion) et Lycée Bellepierre (Saint-Denis, La Réunion)

Chercheuse : Marion Legonidec, Université de La Réunion

Présentation du sujet : une formule magique !

On cherche à calculer l'aire d'un polygone dont les sommets sont des points à coordonnées entières.



Quel lien y a-t-il entre le nombre de points du polygone et son aire ?

On note :

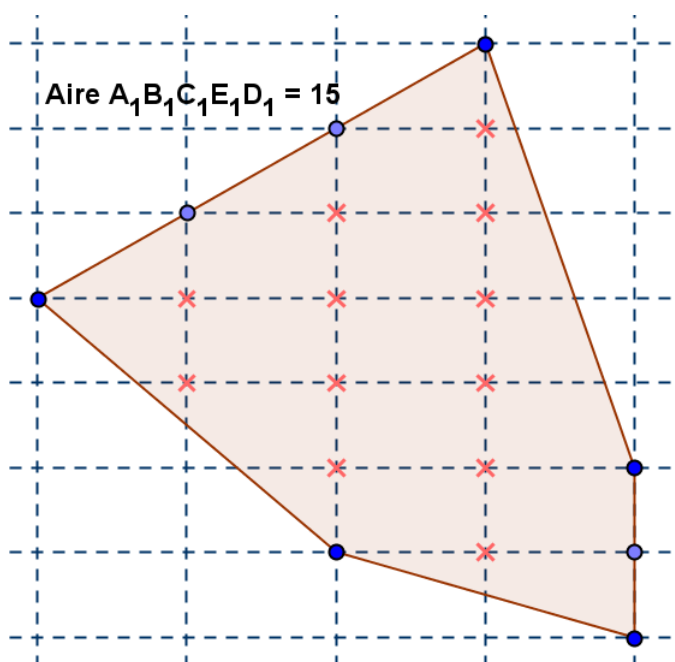
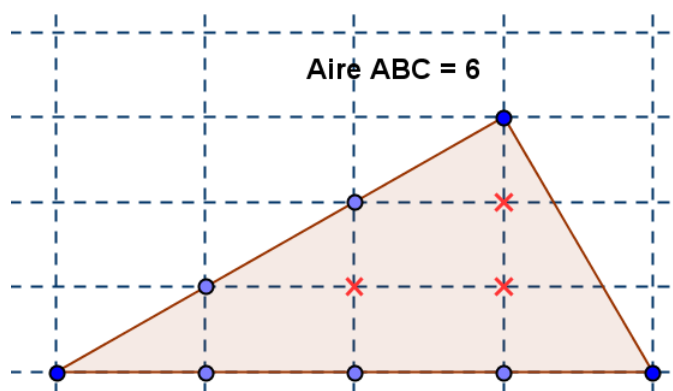
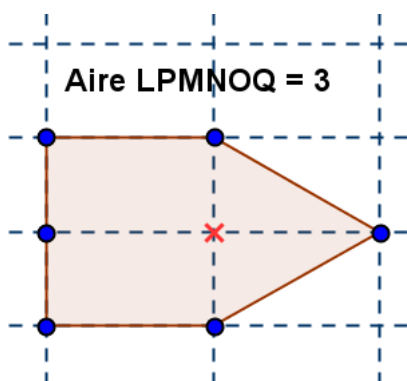
- n_c le nombre de points sur les côtés du polygone,
- n_i le nombre de points à l'intérieur du polygone,
- A l'aire du polygone.

Nous avons démontré que $A = \frac{n_c}{2} + n_i - 1$ (1)

I- Conjecture

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, nous avons tout d'abord conjecturé une formule.

Nous avons étudié plusieurs figures, en voici trois (2), nous avons résumé les résultats dans un tableau.



Aire	3	6	15
Point intérieur	1	3	12
Points sur les côtés	6	8	8

Conjecture : $A = \frac{n_c}{2} + n - 1$

III – Démonstration

Pour un rectangle (3)

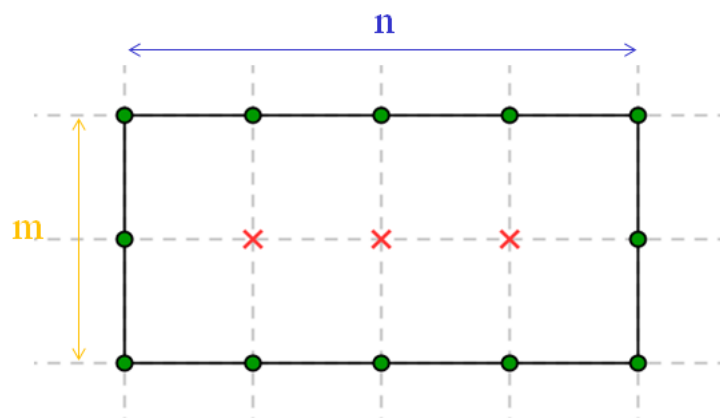
Considérons un rectangle de côtés m et n .

On note

- n_c le nombre de points sur les côtés du polygone,

- n_i le nombre de points à l'intérieur du polygone,

- A l'aire du polygone.



On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} n_c + n_i = \text{nombre total de points} = (n+1)(m+1) \\ n_c = n+1 + m + n + m - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_c + n_i = (n+1)(m+1) \\ n_c = 2n + 2m \end{cases}$$

A l'aide de la seconde ligne du système, nous avons donc :

$$m = \frac{n_c - 2n}{2}$$

En remplaçant dans la première ligne du système :

$$n_c + n_i = nm + n + m + 1$$

$$n_c + n_i = A + \frac{n_c - 2n}{2} + n + 1$$

$$n_c + n_i = A + \frac{n_c}{2} - n + n + 1$$

$$n_c + n_i = A + \frac{n_c}{2} + 1$$

Ainsi

$$A = n_c + n_i - \frac{n_c}{2} - 1$$

$$A = \frac{n_c}{2} + n_i - 1$$

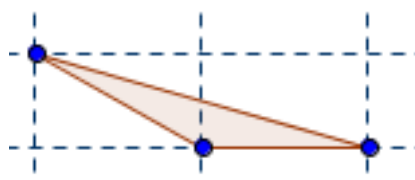
La formule est donc démontrée pour un rectangle.

• Généralisation

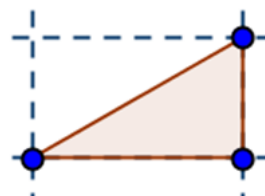
Nous avons ensuite cherché à décomposer un polygone quelconque. Pour cela, nous avons introduit la notion de triangle élémentaire.

• Décomposition en triangles élémentaires

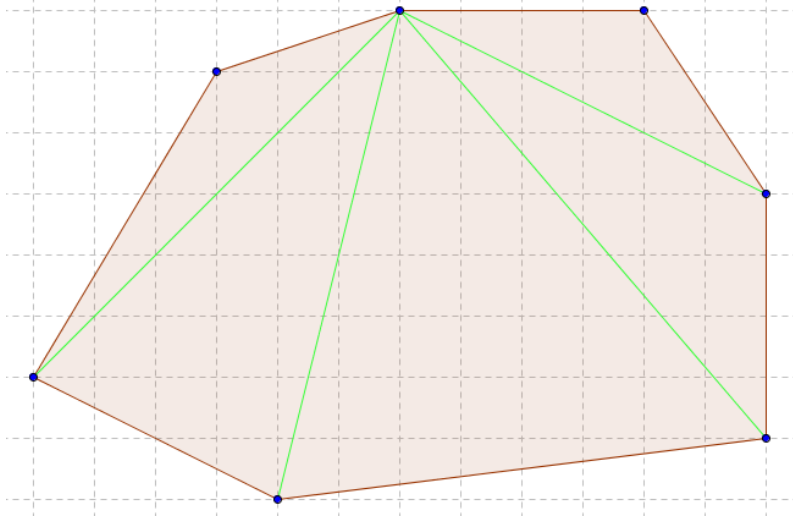
Définition : un triangle élémentaire est un triangle ne contenant aucun point intérieur et dont les seuls points côtés sont les sommets du triangle. Par exemple (4),



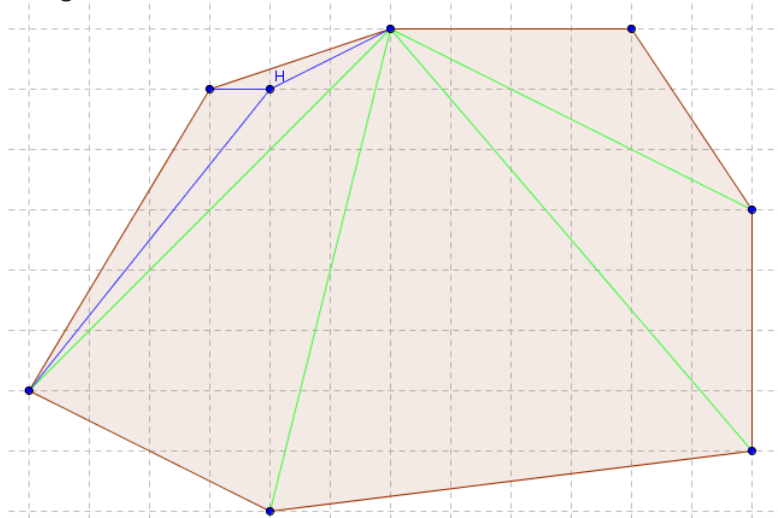
Décomposition d'une figure en triangles élémentaires



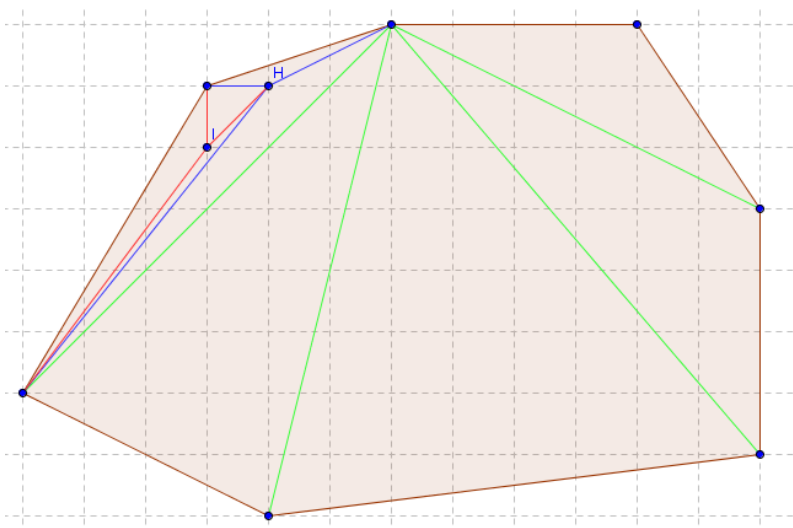
On choisit un sommet du polygone que l'on relie à tous les autres sommets, créant ainsi des triangles.



Dans un triangle, un point intérieur (ici H) est relié à tous les sommets du triangle, redécoupant le triangle précédent en plusieurs triangles.



Cette opération est recommencée (ici avec I) jusqu'à n'avoir que des triangles sans point intérieur.



Chaque figure est décomposable en triangles élémentaires, on ne travaillera donc qu'avec des triangles élémentaires.

- Démonstration par récurrence

On démontre par récurrence que pour toute figure composée de n triangles élémentaires, $n \in \mathbb{N}^*$, la formule est vraie.

Initialisation : pour $n = 1$.

Pour un triangle élémentaire, $A = \frac{1}{2}(5)$

Un triangle élémentaire ne contient pas de point intérieur, donc et a trois points côtés donc $n_i = 0$ et a trois points côtés donc $n_c = 3$.

Ainsi $\frac{n_c}{2} + n_i - 1 = \frac{3}{2} + 0 - 1 = \frac{1}{2}$

La formule est donc vérifiée pour un triangle élémentaire.

Hérédité : on suppose que la formule est vraie pour une figure composée de n triangles élémentaires. On démontre que la formule reste valable pour une figure comprenant $n + 1$ triangles élémentaires, soit un triangle élémentaire supplémentaire.

Pour cela, nous devons considérer deux cas (6).

Notation :

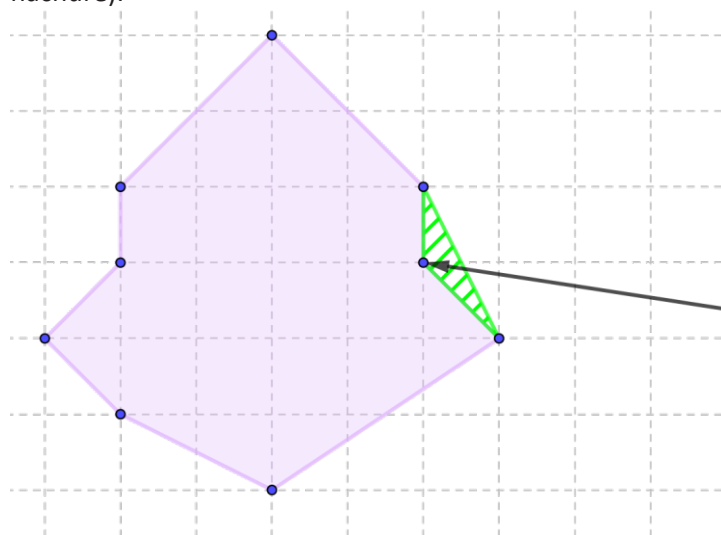
n_c : nombre de points côtés du polygone à n triangles élémentaires ;

n'_c : nombre de points côtés du polygone à $n + 1$ triangles élémentaire ;

n_i et n'_i : nombres respectifs de points intérieurs des polygones ;

A et A' : aires respectives des polygones.

1^{er} cas : on considère un polygone à $n + 1$ triangles élémentaires et on enlève un triangle élémentaire (triangle hachuré).



Ce point intérieur devient un point côté.

Dans ce cas, par rapport au polygone de base :

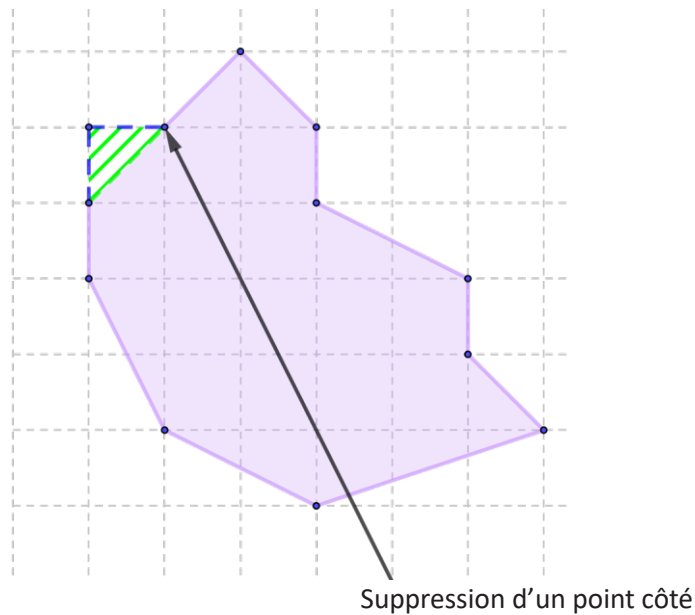
- On ajoute un point côté : $n_c = n'_c + 1$
- On enlève un point intérieur : $n_i = n'_i - 1$

De plus $A' = A + \frac{1}{2}$, car l'aire d'un triangle élémentaire est $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} A' &= A + \frac{1}{2} \\ &= \frac{n_c}{2} + n_i - 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{n'_c+1}{2} + n'_i - 1 - 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{n'_c}{2} + n'_i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \\ &= \frac{n'_c}{2} + n'_i - 1 \end{aligned}$$

La formule est donc retrouvée dans ce premier cas.

2nd cas : on considère un polygone à $n + 1$ triangles élémentaires et on enlève un triangle élémentaire (triangle hachuré) comme ci-dessous.



Dans ce cas, par rapport au polygone de base :

- On supprime un point côté : $n_c = n'_c - 1$
- Le nombre de points intérieurs est inchangé : $n'_i = n_i$

De même que dans le premier cas :

$$\begin{aligned} A' &= A + \frac{1}{2} \\ &= \frac{n_c}{2} + n_i - 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{n'_c-1}{2} + n'_i - 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{n'_c}{2} + n'_i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{n'_c}{2} + n'_i - 1 \end{aligned}$$

La formule est donc aussi valable dans le 2nd cas.

- Conclusion : Pour tout polygone dont les sommets sont des points à coordonnées entières, composé de n triangles élémentaires, $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \frac{n_c}{2} + n_i - 1$.

IV- Conclusion

Tout polygone dont les sommets sont des points à coordonnées entières peut être décomposé en triangles élémentaires, donc pour tous ces polygones : $A = \frac{n_c}{2} + n_i - 1$.

NOTES D'ÉDITION

(1) Ce résultat est connu sous le nom de Théorème de Pick.

(2) Dans ces figures, les échelles ne sont pas les mêmes sur les deux axes. Mais les lignes en pointillé représentent toujours les points dont l'abscisse ou l'ordonnée est un entier, et l'unité d'aire est l'aire d'un rectangle de largeur et de hauteur 1.

(3) On ne considère que les rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes.

(4) Attention, ce ne sont pas les seules formes possibles de triangles élémentaires. Il en existe de plus compliquées comme celle du triangle dont les sommets ont pour coordonnées : (0,0), (3,1), (5,2).

(5) Ce résultat n'est pas du tout évident. Cela est facile à calculer pour les exemples donnés page 225, moins pour celui donné dans la précédente note d'édition et encore plus difficile en général!

(6) Partant d'un polygone décomposé en $n+1$ triangles élémentaires, on lui enlève un triangle élémentaire pour se ramener à n triangles, mais toujours sur le bord de façon à ne pas créer de "trous". Le triangle enlevé a un ou deux côtés sur le bord du polygone (les deux cas à étudier).

Le lecteur intéressé pourra trouver d'autres approches du théorème de Pick dans plusieurs articles d'élèves sur le site MATH.en.JEANS (mathenjeans.fr/comptes-rendus).

LOI DE SABRINA 1

On utilise 180 fois le chiffre 3 si on écrit tous les nombres de 1 à 400.

de 1 à 100	20 fois
de 100 à 199	20 fois
de 200 à 299	20 fois
de 300 à 400	120 fois

LOI DE RÉMI 4

Si on connaît un multiple de 8, voici comment faire pour trouver le suivant :

Si le chiffre des unités est plus petit que 3, ajouter 8.

Si le chiffre des unités est plus grand que 2, enlever 2 aux unités et ajouter 1 aux dizaines.

Figures isoaires

Année 2013-2014

Morgane Dommanget : Term. S, Gaétan Fadat, Quitterie Lucas, Nicolas Marteau, Marie Soulard : 1^{ère} S,
Léa Guilloteau, Arnaud Roger : 2nd.

Encadrés par : Gilles Marechal, Frédérique Martin-Gatard

Etablissement : Lycée Saint Joseph, BRESSUIRE

Etablissement jumelé : Lycée Edouard Branly de Châtellerauld

Chercheur : Julien Michel, Université de Poitiers

Sujet :

Est-il possible de construire une figure d'aire finie et de périmètre infini ? En particulier, peut-on modifier une figure pour augmenter son périmètre sans changer son aire ?

Conjectures – Résultats :

La recherche des élèves a consisté à construire des procédés conservant l'aire mais augmentant le périmètre. Presque tous les calculs ont été faits dans l'année mais tous n'ont pas été rédigés ici.

De même pour les procédures sous GéoTortue.

Les élèves ont mis en place des suites associées à des longueurs de côtés et à des périmètres, calculé certaines limites, élaboré des procédures, établi des tableaux de valeurs et de résultats ainsi que des graphiques comparatifs.

Procédé	Côté		Périmètre		Limite		Procédure	
	Formule	Démo	Formule	Démo	Résultat	Démo	Ecriture	Dessin
Escalier	*	*	*	*	*	*	*	*
Dentolite 1	*	*	*	*	*	*	*	*
Dentolite 2	*		*	*			*	*
Carré	*	*	*	*			*	*
Hexagone	*	*					*	*
Cercle	*	*	*	*	*	*	*	*
Peigne			*					*
Octogone	*		*				*	*
Cgone			*				*	*

Peut-on augmenter le périmètre d'une figure sans changer son aire ? Dans de nombreux sujets de maths, on rencontre des applications d'optimisation d'aires pour un périmètre fixe. Mais inversement, quel procédé faut-il mettre en œuvre pour avoir un périmètre maximal sans changer d'aire ? À notre aire fixe de 1 m^2 , on peut également ajouter un paramètre supplémentaire : un cadre de 4 m^2 à ne pas dépasser. C'est en partant de carrés, rectangles, octogones, hexagones ou encore cercles, que nous avons baptisé ces objets nouvellement créés « isoaires ».

Les unités utilisées seront les m^2 et degrés.

1 - Escalier

Description du procédé :

Pour commencer, en partant d'une figure de côté 1, on "enlève" $\frac{1}{4}$ de la surface du carré en haut à gauche, que l'on replace au dessus du coin supérieur droit. Ainsi l'aire est conservée. Le périmètre augmente à chaque étape de 2 fois la moitié du côté du carré précédent.

À chaque étape, on enlève un quart du dernier carré ajouté que l'on replace au-dessus. Le périmètre augmente de manière semblable à chaque étape : 2 fois la moitié du côté du carré précédent.

Calculs :

Soit P_n le périmètre, C_n le côté, où n est l'indice d'étape.

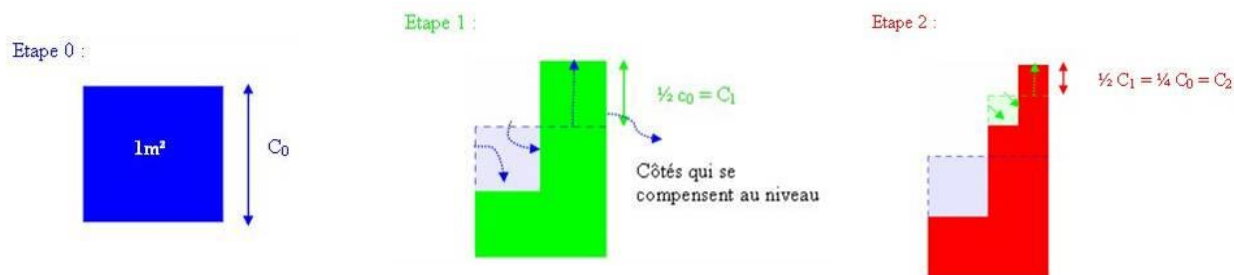


Figure 1 – Découpages pour Escalier

On a ainsi :

$$P_0 = 4 = 4C_0 \text{ et } P_1 = 4 + 2 \times \frac{1}{2} = 4C_0 + 2C_1 \text{ et } C_1 = \frac{1}{2}C_0 ;$$

$$\text{puis } P_2 = P_1 + 2 \times \frac{1}{4} = 4C_0 + 2C_1 + 2C_2 \text{ et } C_2 = \frac{1}{2}C_1 \text{ donc } P_2 = 2C_0 + 2C_0 + 2C_1 + 2C_2$$

on peut alors en induire une formule permettant de calculer le périmètre :

$$P_n = 2C_0 + 2 \sum_{i=0}^n C_i$$

Voici une démonstration par récurrence de la suite P_n :

Initialisation :

$$P_0 = 4 = 2C_0 + 2C_0$$

Hérédité :

Si $P_n = 2C_0 + 2 \sum_{i=0}^n C_i$, est-ce que $P_{n+1} = 2C_0 + 2 \sum_{i=0}^{n+1} C_i$ est vraie ?

$P_{n+1} = P_n + 2C_{n+1}$ car 2 nouveaux côtés sont rajoutés à la figure.

$$P_{n+1} = P_n + 2C_{n+1} = 2C_0 + 2 \sum_{i=0}^n C_i + 2C_{n+1} = 2C_0 + 2 \sum_{i=0}^{n+1} C_i$$

Conclusion :

P_{n+1} est vraie, donc par récurrence P_n est vraie pour tout n .

Par ailleurs $C_0 = 1, C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}, C_n = \frac{1}{2^n}$, or $P_n = 2C_0 + 2 \sum_{i=0}^n C_i$
donc

$$P_n = 2 + 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \text{ donc } P_n = 2 + 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 4 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 2 + 4 = 6$$

Avec ce procédé, on a alors un périmètre qui tend vers une limite finie.

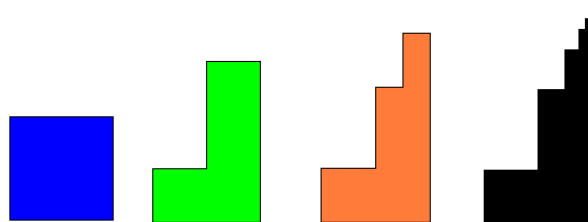


Figure 2 – Escaliers 0-1-2-10

À chaque étape deux segments du nouveau carré sont rajoutés, les premières valeurs du périmètre sont

$$P_1 = 4 + 2 \times \frac{1}{2}, P_2 = P_1 + 2 \times \frac{1}{2^2} \text{ et } P_3 = P_2 + 2 \times \frac{1}{2^3}$$

Le processus se continuant on a de même

$$P_n = P_{n-1} + 2 \times \frac{1}{2^n}$$

Le calcul des premières valeurs fait apparaître 6 comme limite. Peut-on faire mieux ?

2 – Dentiolite 1 :

En partant d'un carré de côté 1, on "enlève" du bord supérieur un triangle de hauteur la moitié du côté, que l'on replace sur le bord inférieur. L'aire est ainsi conservée.

Le périmètre est diminué de 2 côtés puis augmenté de 4 fois la longueur des côtés du triangle (qui est isocèle) par rapport au périmètre précédent.

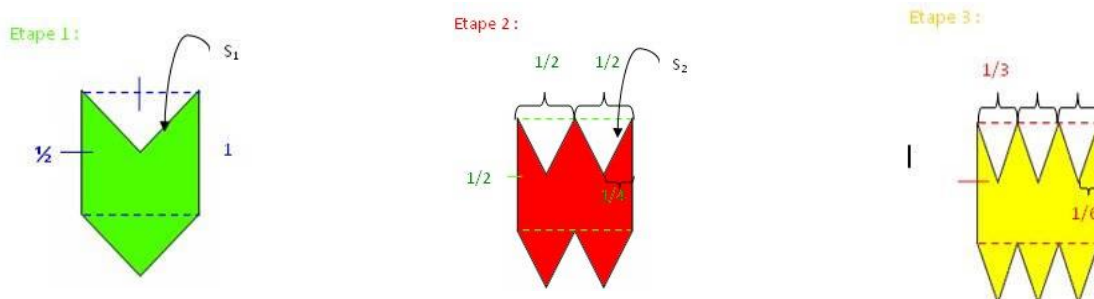


Figure 3 – Découpages pour Dentiolite 1

La figure initiale étant un carré, le périmètre initial est donc $P_0 = 4$.

On note P_n le périmètre, C_n le côté du triangle, et l'indice n l'étape.

A l'étape 1 on a $C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $P_1 = 2 + 4C_1$.

Aux deux étapes suivantes

À chaque étape, on "coupe" le bord supérieur de la figure initiale d'un triangle de plus, en le replaçant sur le bord inférieur. Le périmètre augmente de manière semblable à chaque étape : on conserve toujours la longueur des 2 côtés latéraux de la figure et on ajoute le nombre de côtés de triangles autant de fois que l'étape le nécessite.

A l'étape 2 on a $C_2 = \frac{\sqrt{5}}{4}$ et $P_2 = 2 + 8C_2$.

A l'étape 3 on a $C_3 = \frac{\sqrt{10}}{6}$ et $P_3 = 2 + 12C_3$.

Calcul de P_n en fonction de n et de C_n

Pour calculer C_n on utilise le théorème de Pythagore.



Figure 4 – Calcul des côtés

Par exemple à l'étape 2 on a $C_2 = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{5}{16}}$.

En suivant le même raisonnement que précédemment, on peut généraliser ce calcul :

$$C_n = AC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2n}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2}} = \sqrt{\frac{n^2 + 1}{4n^2}} = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{2n}.$$

Procédure sous GéoTortue

Pour tracer la Dentiolite 1 nous avons utilisé le logiciel GéoTortue. Il nous faut la longueur des côtés, que l'on a pour le triangle avec la formule C_n , et l'angle pour faire tourner la tortue, notamment au niveau des triangles, que l'on a calculé (directement dans la procédure).

```

Procédures
1> pour dent n
2> av 100
3> rep n [tg (180 - atan (1/n)) ; av ((50/n)*sqrt(n^2+1)) ;
4> td 2*(90-atan(1/n)) ; av ((50/n)*sqrt(n^2+1)) ; td atan(1/n)]
5> tg 180
6> av 100
7> rep n [tg atan(1/n) ; av ((50/n)*sqrt(n^2+1)) ;
8> tg 2*(90-atan(1/n)) ; av ((50/n)*sqrt(n^2+1)) ; td (180-atan(1/n))]
9> fin
    
```

Figure 5 - Procédure Dentiolite 1

Calcul de la limite de P_n .

On a alors

$$P_n = 2 + 4 \times nC_n = 2 + 4n \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{2n} = 2 + 2\sqrt{n^2 + 1}.$$

On a $P_n \approx 2 + 2n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$. Avec ce procédé P_n a une limite qui tend vers l'infini.

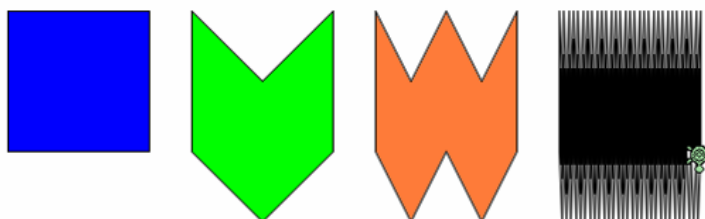


Figure 6 – Dentiolites 0-1-2-10

Peut-on faire mieux ?

3 - Dentiolite 2 :

Description du procédé :

Sur le même principe que la Dentiolite 1, au lieu de couper des triangles dans le carré, on peut couper à l'aide de paraboles. C'est-à-dire que pour la Dentiolite 1, on peut associer les segments de droite du triangle à des courbes de degré 1, et là on opère avec une courbe de degré 2. Cela permet d'avoir un processus d'augmentation du périmètre plus rapide, car les côtés ajoutés sont plus longs.

Pour chaque étape, le processus se déroule de la même manière que pour la Dentiolite 1 : on ajoute une dent à chaque fois.

Le périmètre augmente de manière semblable à chaque étape : on conserve les deux côtés latéraux et on ajoute autant de fois que l'étape le nécessite le nombre de côtés formés par les courbes.

On note P_n le périmètre, C_n la portion de courbe, où n est l'indice l'étape.

Étape 1 :

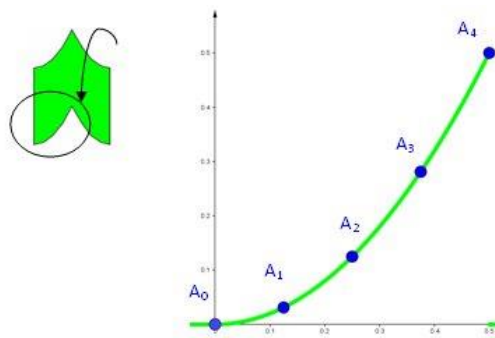


Figure 7 – Dentiolite 2 – Etape 1

De même que pour la Dentiolite 1, la figure initiale est un carré de côté 1, donc on a $P_0 = 4$ et $P_1 = 2 + 4C_1$.

La formule de généralisation pour calculer le périmètre est ainsi $P_n = 2 + 4n \times C_n$.

Pour calculer C_n on va étudier la portion de courbe dans un repère avec des coordonnées. On découpe en 4 et on choisit d'avoir 5 points par souci de faciliter les calculs, cependant le calcul est moins précis que si on en avait plus. Pour avoir la longueur de C_n , il faut additionner les distances entre les points.

Par construction, on connaît les coordonnées des points A_0 et A_4 . On définit ensuite les autres points en coupant de manière égale l'axe des ordonnées. On ne connaît ni leurs abscisses ni l'équation de la courbe pour le moment, on va donc les calculer.

Recherche de la courbe

On a d'abord besoin de l'équation de la courbe pour pouvoir trouver les ordonnées.

On est sur une courbe de second degré sur l'intervalle $[0; 0,5]$.

On connaît le sommet de cette parabole qui est $A_0(0; 0)$.

Soit une équation du second degré : $y = ax^2 + bx + c = f(x)$; S son sommet : $S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$. On sait que $-\frac{b}{2a} = 0$, donc $b = 0$, on a alors $y = ax^2 + c = f(x)$.

La courbe passe par $A_0(0; 0)$ donc $f(0) = 0$ donc $c = 0$ d'où on a $y = ax^2 + c = f(x)$.

La courbe passe par $A_4\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ donc pour $x = \frac{1}{2}$ on a $y = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2} = a\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $\frac{1}{2} \times 4 = a$ d'où $a = 2$.

Ainsi on a pour l'étape 1 la parabole d'équation $y = 2x^2$.

Calcul des coordonnées des points

On peut alors calculer les coordonnées des points $A_0(x_0; y_0)$, $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$, $A_4(x_4; y_4)$.

On choisit $x_1 = \frac{1}{8}$ d'où $y_1 = 2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{32}$, puis $x_2 = \frac{2}{8}$ d'où $y_2 = 2 \times \left(\frac{2}{8}\right)^2 = \frac{2^2}{32}$

puis $x_3 = \frac{3}{8}$ d'où $y_3 = 2 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{3^2}{32}$.

On remarque que les ordonnées y forment une suite. Si on appelle p l'indice correspondant pour les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 on a alors : $y_p = \frac{p^2}{32}$ car en prenant $x_p = \frac{p}{8}$ on a $y_p = 2 \times \left(\frac{p}{8}\right)^2 = \frac{p^2}{32}$, et ainsi pour $x_4 = \frac{4}{8}$ on a $y_4 = \frac{4^2}{32} = \frac{1}{2}$, ce qui était attendu pour $A_4 \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Les points du découpage sont donc $A_0(0; 0), A_1\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{32}\right), A_2\left(\frac{2}{8}; \frac{4}{32}\right), A_3\left(\frac{3}{8}; \frac{9}{32}\right), A_4\left(\frac{4}{8}; \frac{16}{32}\right)$.

Périmètre

On a alors $C_1 = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4$, puis $P_1 = 2 + 4C_1$.

Étape 2

À l'étape 2, on étudie la courbe sur $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ car l'on découpe la base de la « dent » en deux, on a ainsi une dent en plus.

Soit B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 les points à l'étape 2.

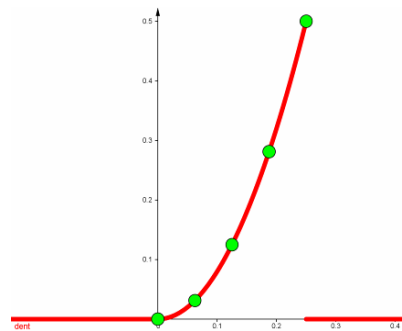


Figure 8 – Dentolite 2 – Etape 2

Recherche de l'équation de la courbe

De même que pour l'étape 1, par construction, on connaît les coordonnées des points B_0 et B_4 . On définit ensuite les autres points en coupant de manière égale l'axe des ordonnées : $\frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{4}{16}$. Mais on ne connaît ni les abscisses des points, ni l'équation de la courbe.

En procédant comme pour l'étape 1, l'équation est de la forme $y = ax^2$.

La courbe passe par le point $B_4\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ d'où $\frac{1}{2} = a\left(\frac{1}{4}\right)^2$ d'où $a = 8$ d'où l'équation de la courbe est $y = 8x^2$.

Calcul des coordonnées des points B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 .

De même qu'à l'étape 1, on a $x_1 = \frac{1}{16}, x_2 = \frac{2}{16}, x_3 = \frac{3}{16}, x_4 = \frac{4}{16}$, c'est-à-dire $x_p = \frac{p}{16}$.

Pour l'abscisse des points, on peut définir une formule comme pour l'étape 1 :

Pour $n = 1$ on avait $x_p = \frac{p}{8}$, pour $n = 2$ on a $x_p = \frac{p}{8 \times 2}$; pour $n = 3$ on aurait un découpage en $24 = 8 \times 3$, on aurait alors $x_p = \frac{p}{8 \times 3}$; on peut alors induire que pour n on aura $x_p = \frac{p}{8n}$.

À l'étape 2 on a $y_1 = 8 \times \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{32}$ et $y_2 = 8 \times \left(\frac{2}{16}\right)^2 = \frac{4}{32}$, puis dans le cas général $y_p = 8 \times \left(\frac{p}{16}\right)^2 = \frac{p^2}{32}$.

On constate que y_p a les mêmes valeurs qu'à l'étape 1. On peut donc induire que y_p aura les mêmes valeurs pour toutes les étapes.

Les points du découpage sont donc $B_0(0; 0), B_1\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{32}\right), B_2\left(\frac{2}{16}; \frac{4}{32}\right), B_3\left(\frac{3}{16}; \frac{9}{32}\right), B_4\left(\frac{4}{16}; \frac{16}{32}\right)$.

Périmètre

On a de même $C_2 = B_0B_1 + B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4$. Mais à l'étape 2 on a 8 segments de parabole d'où $P_2 = 2 + 8C_2$.

On remarque que $P_1 = 2 + 4C_1$ et $P_2 = 2 + 2 \times 4C_2$.

À l'étape 3 on aurait de même 12 segments, d'où on aurait $P_3 = 2 + 3 \times 4C_3$.

On peut alors en induire une formule pour le périmètre en fonction de n et C_n : $P_n = 2 + n \times 4C_n$.

On remarque que la formule du périmètre est la même que pour la Dentiolite 1, c'est bien ce qui était prévu dans le procédé.

Étape 3

À l'étape 3, on étudie la courbe sur $\left[0; \frac{1}{6}\right]$, on aura 3 dents. Les abscisses des points du découpage seront alors

$$x_p = \frac{p}{3 \times 2 \times 4} = \frac{p}{3 \times 8}.$$

Généralisation pour la parabole :

En généralisant le procédé au dessus on peut alors induire que les points du découpage ont pour abscisses $x_p = \frac{p}{8n}$.

En procédant comme aux étapes 1 et 2, l'équation est de la forme $y = ax^2$.

La courbe passe par le point $B_4\left(\frac{1}{2n}; \frac{1}{2}\right)$ d'où $\frac{1}{2} = a\left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{a}{4n^2}$ d'où $a = \frac{4n^2}{2}$

d'où l'équation de la courbe est $y = 2n^2x^2$.

Remarques :

Nous avons utilisé le logiciel GéoTortue pour tracer la Dentiolite 2. Pour cela nous avons utilisé la distance entre les points pour pouvoir tracer la courbe, ainsi que l'angle pour tourner (directement dans la procédure). Nous l'avons réalisé uniquement pour l'étape 1, car il nous faudrait à chaque étape recalculer la distance et l'angle.

```

1> pour parad l
2> td 90
3> tg atan(1/4)
4> av l*(((1/8)^2+(1/32)^2)^(1/2))
5> tg (atan(3/4)-atan(1/4))
6> av l*(((1/8)^2+(3/32)^2)^(1/2))
7> tg (atan(5/4)-atan(3/4))
8> av l*(((1/8)^2+(5/32)^2)^(1/2))
9> tg (atan(7/4)-(atan(5/4)))
10> av l*(((1/8)^2+(7/32)^2)^(1/2))
11> fin

13> pour parag l
14> tg 90
15> td atan(1/4)
16> av l*(((1/8)^2+(1/32)^2)^(1/2))
17> td (atan(3/4)-atan(1/4))
18> av l*(((1/8)^2+(3/32)^2)^(1/2))
19> td (atan(5/4)-atan(3/4))
20> av l*(((1/8)^2+(5/32)^2)^(1/2))
21> td (atan(7/4)-(atan(5/4)))
22> av l*(((1/8)^2+(7/32)^2)^(1/2))
23> fin

25> pour dent l
26> parad l
27> lc,td (atan(7/4)); av l/2; td 90; av l/2; tg 180; bc;
28> parag l
29> fin

31> pour dentioliite2 l
32> dent l
33> tg (atan(7/4))
34> lc; av l/2; tg 90; av l/2; bc; av l; tg 180;
35> dent l
36> tg (atan(7/4)); tg 180; lc; av l/2; td 90; av l/2; bc; tg 180; av l
37> fin
    
```

Figure 9 - Procédure Dentiolite 2

Il faut beaucoup de calculs pour passer à l'étape 2.

Nous avons aussi pensé à utiliser Algobox, logiciel sous lequel nous pouvons entrer des coordonnées de points. Cependant cela nécessite beaucoup de ligne de programmation (rien que pour l'étape 1, il y a $5 \times 2 \times 4$ coordonnées à rentrer : 5 points par courbe, coordonnées x et y , courbe présente 4 fois dans la figure). On peut aussi mettre les formules pour calculer les coordonnées, mais cela implique de déclarer énormément de variables, ce qui ne raccourcit pas forcément le programme, contrairement à ce que l'on pouvait penser.

Pistes d'amélioration :

Pour optimiser encore le processus d'augmentation du périmètre, on peut penser à augmenter le degré de la courbe, ce qui rallonge la longueur des côtés ajoutés. On imagine que la figure vers laquelle ça va tendre sera un rectangle dont on ne distinguera plus l'intérieur de l'extérieur, car la « dent » formée par la courbe va "s'aplatir".

On peut aussi penser à "creuser" les « dents » plus loin dans le carré de départ : au lieu d'aller seulement à $1/2$ de hauteur, prendre une hauteur de 1, voir plus, mais après les « dents » s'emboîteraient les unes dans les autres.

Ces différents processus n'ont pas de limite : les périmètres tendent vers l'infini.

Peut-on améliorer la rapidité de croissance ?

4 – Carré avec récursivité

Présentation

Pour répondre à notre problème, c'est-à-dire augmenter le périmètre d'une figure tout en conservant la même aire, nous pouvons continuer à nous placer dans un carré.

On divise chaque côté du carré (de longueur 1) en cinq segments égaux. On peut alors rajouter un carré de longueur $1/5$ à l'extérieur du carré initial (à partir du deuxième segment).

Le périmètre a été augmenté (création de segments supplémentaires) mais l'aire aussi. C'est pourquoi il faut retirer un carré (à l'intérieur du carré initial) de même aire en prenant pour un de ses côtés le quatrième segment de longueur $1/5$.

On réitère ce phénomène sur les quatre côtés du carré. Ainsi, l'aire est restée identique mais le périmètre a beaucoup augmenté (de 5 segments on en obtient 9 segments sur chaque côté du carré).

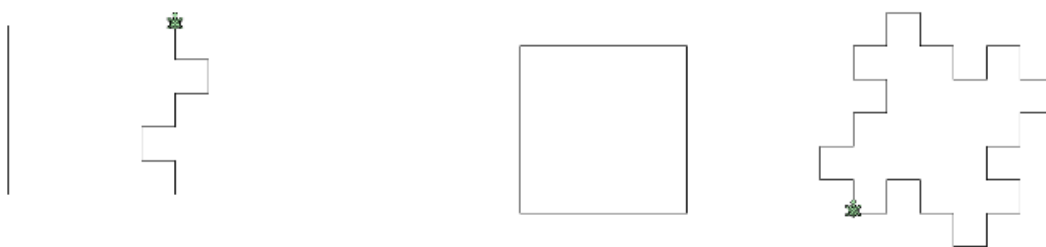


Figure 10 – Découpage d'une ligne - Carré 0 et Carré 1

Récursivité

A chaque étape, cette opération se répète à une échelle plus petite (on divise à nouveau par 5 chaque côté initialement divisé par 5) : on utilise le phénomène de récursivité.

```
Procédures
1> pour segment l n
2> si n==0 alors [ av l ] sinon [ segment l/5 n-1
3> tg 90; segment l/5 n-1
4> td 90; segment l/5 n-1
5> td 90; segment l/5 n-1
6> tg 90; segment l/5 n-1
7> td 90; segment l/5 n-1
8> tg 90; segment l/5 n-1
9> tg 90; segment l/5 n-1
10> td 90; segment l/5 n-1 ]
11> fin
13> pour carré l n
14> rep 4 [segment l n; td 90 ]
15> fin
```

Figure 11 - Procédure Carré

Sur la figure, cela se manifeste par la création de carrés de plus en plus petits en fonction des étapes.

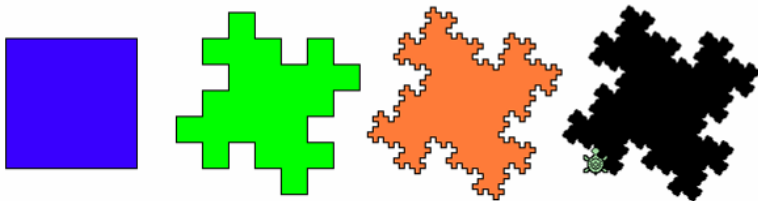


Figure 12 – Carré 0, Carré 1, Carré 2 et Carré 10

Les différentes valeurs sont relevées dans le tableau en dessous.

Étape	0	1	2	n
Nombre de côtés	4×1	4×9	$4 \times 9 \times 9$	4×9^n
Longueur d'un côté	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5 \times 5}$	$\frac{1}{5^n}$
Périmètre	4	$4 \times 9 \times \frac{1}{5}$	$4 \times 9^2 \times \frac{1}{5^2}$	$4 \times 9^n \times \frac{1}{5^n}$

On construit ainsi la formule $P_n = 4 \times 9^n \times \frac{1}{5^n}$ où 4 correspond aux quatre côtés du carré, n correspond au nombre d'étapes, $1/5$ correspond à la division de chaque segment en 5 plus petits et 9 correspond aux segments créés à partir d'un seul initialement.

Variante

Pour augmenter l'efficacité de cette méthode, nous pourrions diviser les segments par 4, et non par 5, afin d'augmenter la valeur du périmètre (les segments rajoutés seraient plus longs), et nous n'aurions que 8 nouveaux segments.

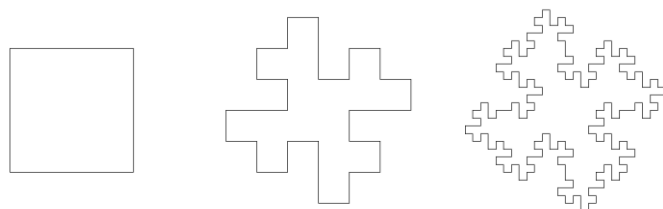


Figure 13 – Carré Variante

Étape	0	1	2	n
Nombre de côtés	4×1	4×8	$4 \times 8 \times 8$	4×8^n
Longueur d'un côté	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4 \times 4}$	$\frac{1}{4^n}$
Périmètre	4	$4 \times 8 \times \frac{1}{4}$	$4 \times 8^2 \times \frac{1}{4^2}$	$4 \times 8^n \times \frac{1}{4^n}$

Les deux formules sont $P_n^5 = 4 \times \left(\frac{9}{5}\right)^n$ et $P_n^4 = 4 \times \left(\frac{8}{4}\right)^n = 4 \times 2^n$.

Les deux périmètres deviennent infiniment grands lorsque n augmente infiniment, mais il est évident que la variante augmente plus rapidement car $\frac{9}{5} < 2$.

5 - À partir d'un hexagone

On considère maintenant un hexagone régulier comme figure initiale (voir figure ci-dessous), contenue dans une surface dont l'aire fixe $A_S = 4$:

Si l'aire A_H de ce polygone régulier H est $A_H = 1$ alors le côté c de l'hexagone prend comme valeur $c = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$.



Figure 14 – Hexagone initial

Calcul de c

Soit c un côté de l'hexagone. On a alors $h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, h étant la hauteur du triangle équilatéral de base c .

L'aire d'un triangle équilatéral t de l'hexagone H est définie par

$$A_t = \frac{c \times h}{2} = \frac{c \times \frac{\sqrt{3}}{2}c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2.$$

L'aire de l'hexagone H est alors définie par

$$A_H = 6 \times A_t = 6 \times \frac{\sqrt{3}c^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}c^2}{2}.$$

Sachant que $A_H = 1 \text{ m}^2$ on a donc $A_H = \frac{3\sqrt{3}c^2}{2} = 1$ d'où $c^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, donc $c = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Construction initiale

Pour obtenir l'étape suivante, on peut appréhender le problème de la grandeur du périmètre en soustrayant des trapèzes (dont les côtés non parallèles et la petite base équivalent à $c/2$) sur un côté de l'hexagone et ensuite rajouter cette partie à l'extérieur du trapèze.

Pour cela, l'étude sur la moitié de l'hexagone, soit un trapèze, facilite la lecture de la construction (1).

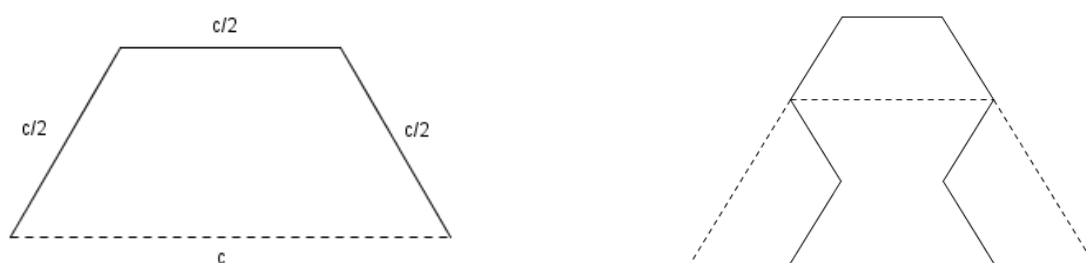


Figure 15 – Construction initiale

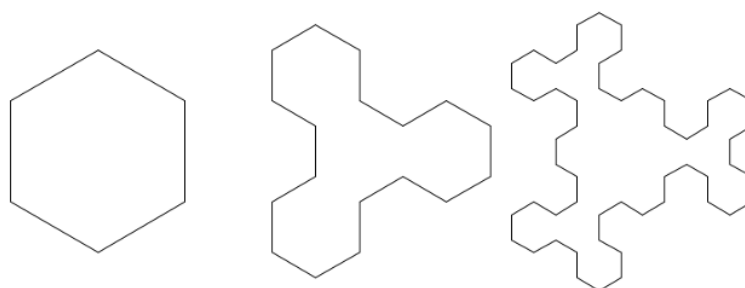


Figure 16 – Hexagones 0, 1 et 2

Calcul du périmètre

Après avoir calculé à la main le périmètre P_n des figures créées selon les premières étapes n , on peut regrouper les résultats dans le tableau suivant.

n	P_n	
0	$6 \times c$	$6 \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \approx 3,7$
1	$18 \times \frac{c}{2}$	$9 \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \approx 5,6$
2	$54 \times \frac{c}{4}$	$13,5 \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \approx 8,4$
3	$162 \times \frac{c}{8}$	$20,25 \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \approx 12,6$
4	$486 \times \frac{c}{16}$	$30,375 \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \approx 18,8$

n	P_n	
0	$6 \times c$	$6 \times 1 \times \frac{c}{1}$
1	$9 \times c$	$6 \times 3 \times \frac{c}{2}$
2	$13,5 \times c$	$6 \times 9 \times \frac{c}{4}$
3	$20,25 \times c$	$6 \times 27 \times \frac{c}{8}$
4	$30,375 \times c$	$6 \times 81 \times \frac{c}{16}$

Après observation, on voit que le périmètre augmente en fonction de l'étape. On peut donc chercher à formuler une conjecture.

On peut donc généraliser en proposant la conjecture suivante $P_n = 6 \times 3^n \times \frac{c}{2^n} = 6c \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Démonstration

À chaque étape chaque côté est divisé par deux et remplacé par 3 côtés, 6 étant le nombre de côtés et c étant la dimension du côté de base.

Calcul de la limite du périmètre

On a donc $P_n = 6c \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$, or $6c = 6 \times \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$ est une valeur constante, donc la valeur de la limite porte sur $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ (suite géométrique de raison $q = \frac{3}{2}$).

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ car $q = \frac{3}{2} > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$.

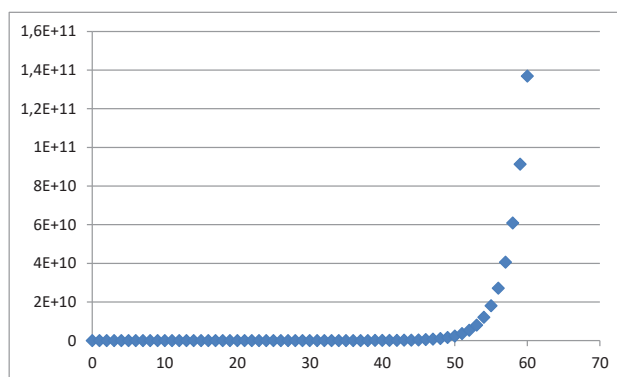


Figure 17 – Périmètre en fonction de n

Construction avec GéoTortue

Le logiciel GéoTortue permet d'utiliser la récursivité. On peut visualiser l'évolution de l'allure de la figure et se rendre compte alors que le périmètre est d'autant plus grand que le rang de l'étape augmente.

Procédures
1> pour trapèzeg l n
2> si n==0 alors [av l] sinon [
3> tg 60
4> trapèzeg l/2 n-1
5> td 60
6> trapèzed l/2 n-1
7> td 60
8> trapèzeg l/2 n-1
9> tg 60]
10> fin

12> pour trapèzed l n
13> si n==0 alors [av l] sinon [
14> td 60
15> trapèzeg l/2 n-1
16> tg 60
17> trapèzeg l/2 n-1
18> tg 60
19> trapèzeg l/2 n-1
20> td 60]
21> fin

24> pour hexa l n
25> si n==0 alors [av l] sinon [
26> trapèzeg l/2 n-1
27> td 60
28> trapèzed l/2 n-1]
29> fin
30>
31> pour hexagone l n
32> rep 3 [td 60; hexa l n]
33> fin

Figure 18 – Procédure Hexagone

La procédure permettant de construire la figure exige une programmation en 3 étapes. Sachant que la figure est un assemblage de trapèzes qui subissent un agrandissement ou une réduction selon la valeur de l'étape ; il a été nécessaire de créer deux procédures intermédiaires pour construire ces trapèzes :

- une procédure intitulée *trapèzeg* pour les trapèzes « sortants » (ceux qui sont « recollés » à l'extérieur ;
- une procédure intitulée *trapèzed* pour les trapèzes « rentrants » (ceux qui sont « creusés »).

Enfin, la figure obtenue exige alors un assemblage de ces deux trapèzes (*hexa*) qui dépend du rang de l'étape. Ainsi, on répète 3 fois ce programme (*hexagone*) pour visualiser la figure selon l'étape n .

Il faut en plus paramétrer le programme pour modéliser une figure selon les variables l qui indique la longueur du segment initial et n qui indique l'étape.

Voici la modélisation finale jusqu'à l'étape 4 (l'aire est conservée et le périmètre augmenté).

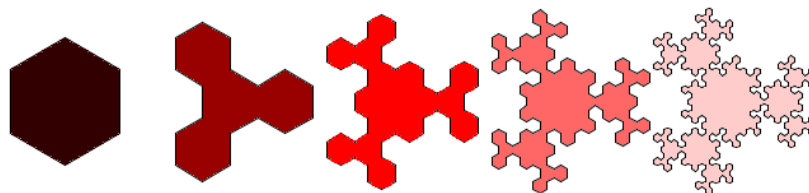


Figure 19 – Hexagones de 0 à 4

6 – À partir d'un cercle

Après être partis de figures polygonales, nous avons eu l'idée de débiter avec la figure pour laquelle une aire de 1 donnait un périmètre minimal : le cercle.

Dès lors, connaissant l'aire de notre figure il faut lui trouver son rayon.

Comme $A_C = 1$, on a $\pi r^2 = 1$ d'où $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Construction du creux

Nous avons voulu reprendre l'idée d'enlever des morceaux de notre figure pour les remettre ailleurs, mais le problème dans un cercle est que les découpages doivent prendre en compte des parties arrondies, plus difficiles à superposer sur le reste du cercle.

Nous avons donc eu l'idée de prendre un « trapèze » dans le cercle auquel on ôterait sa partie arrondie. Pour tracer ce « trapèze » nous prenons deux points du cercle (A et A') chacun reliés au centre du cercle O . L'angle que forme $A'OA$ est noté α : $\alpha = \angle A'OA$. De ce rayon nous ôtons un segment de longueur d , qui nous permettra d'avoir une figure en une seule partie dont les différents morceaux ne coïncideraient pas par un seul point (O, C, C' distincts)

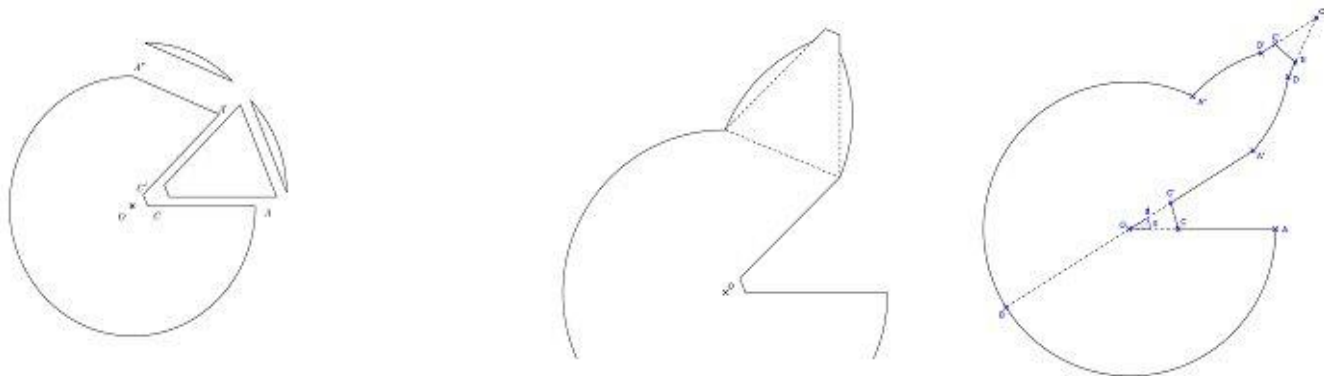


Figure 20 – Découpage dans un cercle

Construction de la bosse

Revenons à la figure, nous relierons les deux rayons amputés des segments de longueur d qui donnent les points C et C' , ainsi que les deux points initiaux : A et A' . Comme nous pouvons le voir sur la figure 20, la partie arrondie est écartée et préservée pour la suite. On définit alors le point A'' symétrique de A par rapport à A' .

En reliant ce point à A' et en découpant la partie extérieure, on obtient une nouvelle surface identique au premier morceau arrondi découpé. Nous avons également créé un nouveau côté plat sur lequel nous pouvons poser le trapèze qui a exactement les bonnes dimensions, AA' étant égal à $A''A'$. Les deux morceaux arrondis trouvent alors naturellement leur place chacun d'un côté du trapèze.

Conditions

Sachant que $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, le périmètre du cercle est $P_0 = 2\pi r = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\pi}$.

Par ailleurs on a $d = OC = OC' \in]0; \frac{1}{\pi}[$ et $AC = A'C' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - d$.

Nous avons aussi besoin des points D, D', E, E', O' définis en reposant le trapèze au dessus de $[A'A']$.

Nous avons aussi alors remarqué qu'il fallait un angle pas trop grand sinon les parties arrondies du cercle recollées sur le trapèze se chevaucheraient.

On cherche donc l'ensemble de définition de α : $A''D' \leq A''O' = r$ sinon $[A'D']$ et $[A'D]$ seraient sécants, et $A''D' \neq A''O'$ sinon O', D', D seraient confondus et alors le triangle $O'E'E$ serait « vide ».

Si $O' = D'$ alors le triangle $AA'O'$ est équilatéral, l'angle $\widehat{A'O'A''} = \widehat{A'O'A} = \alpha$ vaut alors 60° .

Pour que la construction soit possible, il faut donc que $\alpha < 60^\circ$.

Calcul de distances

1. $\cos \widehat{AA'O}$ en fonction de AA'

Soit B le symétrique de A' par rapport à O : le triangle $BA'A$ est rectangle en A donc

$$\cos \widehat{AA'B} = \frac{AA'}{A'B} = \frac{AA'}{2r} = \frac{AA'}{2/\sqrt{\pi}} = \frac{AA'\sqrt{\pi}}{2} \text{ donc } \cos \widehat{AA'O} = \frac{AA'\sqrt{\pi}}{2}$$

2. AA' en fonction de α

De plus AOA' est isocèle en O et $\widehat{AOA'} = \alpha$ donc $\widehat{AA'O} = \frac{180-\alpha}{2}$, de plus $\cos \widehat{AA'O} = \frac{AA'\sqrt{\pi}}{2}$ donc

$$\frac{2 \cos \widehat{AA'O}}{\sqrt{\pi}} = AA'$$

$$AA' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos \left(\frac{180 - \alpha}{2} \right)$$

2'. Autre calcul de AA'

En prenant I milieu de $[AA']$ le triangle OAI est rectangle en O et $\widehat{AOI} = \frac{\alpha}{2}$ d'où $\sin \widehat{AOI} = \frac{AI}{AO}$ d'où $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AA'/2}{1/\sqrt{\pi}}$
d'où $AA' = 2 \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

On retrouve bien le même résultat qu'au dessus puisque $\cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right) = \cos\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. CC' en fonction de α

(OA) et (OA') sont sécantes en O ; $O, C, A \in (OA)$ et sont dans cet ordre, de même $O', C', A' \in (OA')$; on a $\frac{OC}{OA} = \frac{d}{r}$
et $\frac{OC'}{OA'} = \frac{d}{r}$ donc $\frac{OC}{OA} = \frac{OC'}{OA'}$.

Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(CC') \parallel (AA')$ donc

$$\frac{d}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} = \frac{CC'}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right)} \text{ donc } d\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{CC'}{\cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right)} \text{ donc } CC' = \frac{2d\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \times \cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right) \text{ d'où}$$

$$CC' = 2d \times \cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right).$$

3'. Autre expression pour CC'

Dans le triangle $OC'C'$ soit H le milieu de $[CC']$.

Le triangle OCH est rectangle en H avec $\widehat{COH} = \frac{\alpha}{2}$ d'où $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{CH}{OC} = \frac{CC'/2}{d}$ d'où $CC' = 2d \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Là encore on retrouve bien le même résultat qu'au dessus.

4. Calcul de l'augmentation du périmètre

Nos constructions sur le cercle n'altèrent pas l'aire de départ du cercle, ainsi chaque fois que nous utilisons le processus de construction le périmètre augmente de :

$$p = AC + CC' + C'A' + DE + EE' + E'D' = 2AC + 2CC' + 2AC - 2AA' = 4AC + 2CC' - 2AA'$$

$$p = 4\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) + 2\left(2d \cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right)\right) - 2 \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right)$$

D'où

$$p = 4\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) \times \left(1 - \cos\left(\frac{180-\alpha}{2}\right)\right)$$

4'. Autre formule

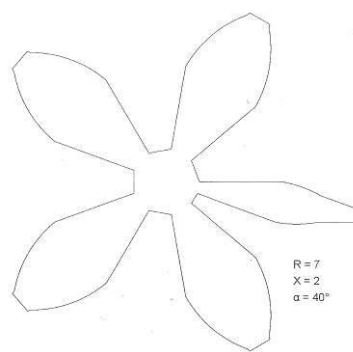
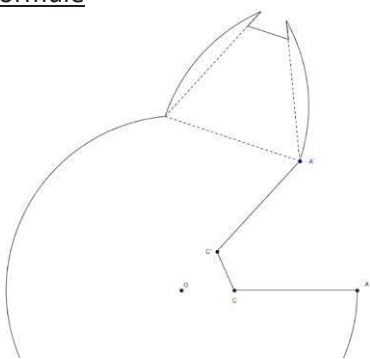


Figure 21 – Figures particulières

Pour tenir compte des situations particulières selon d , on pose $DE = |A'E - A'D| = |AC - AA'|$

$$\text{d'où } DE = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d \right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right|$$

$$p = AC + CC' + C'A' + DE + EE' + E'D' = 2AC + 2CC' + 2DE$$

$$p = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) + 2\left(2d \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + 2\left| \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d \right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right|$$

Répétition

Notre idée de départ était de répéter le processus jusqu'à avoir fait le tour du cercle.

Ces augmentations sont opérées un nombre maximum de fois dépendant de l'angle pris au départ. Pour simplifier les calculs nous n'avons pas cherché à utiliser la partie de cercle restante.

Nous n'avons donc pris que la partie entière de $\frac{360}{2\alpha}$ notée $E\left(\frac{360}{2\alpha}\right)$.

La partie ajoutée au périmètre du cercle vaut donc $E\left(\frac{360}{2\alpha}\right) \times p$ c'est-à-dire

$$4E\left(\frac{360}{2\alpha}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) \times \left(1 - \cos\left(\frac{180 - \alpha}{2}\right)\right)$$

En notant ${}^dP_\alpha$ le périmètre total dépendant de α et de d on a donc

$${}^dP_\alpha = 2\sqrt{\pi} + 4E\left(\frac{360}{2\alpha}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) \times \left(1 - \cos\left(\frac{180 - \alpha}{2}\right)\right)$$

Découpage par étapes

Nous intégrons la notion d'étape dans la formule précédente, c'est-à-dire que le périmètre ${}^dP_\alpha$ pourra être calculé à n'importe quelle étape n du processus. Une étape n correspond à une division par 2 de l'angle α :

si $n = 0$ on a 0 pétale ; si $n = 1$ on a $E\left(\frac{360}{2\alpha}\right)$ bosses ou pétales ; si $n = 2$ on a $E\left(\frac{360}{2\alpha/2}\right)$ pétales ;

si $n = 3$ on a $E\left(\frac{360}{2\alpha/4}\right)$ pétales ...

On peut donc conclure en prenant comme angle α en fonction des étapes n : $\frac{\alpha}{2^{n-1}}$.

On remplace donc α par $\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ dans la formule ${}^dP_\alpha$ ce qui donne

$${}^dP_n = 2\sqrt{\pi} + 4E\left(\frac{360}{2\frac{\alpha}{2^{n-1}}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) \times \left(1 - \cos\left(\frac{180 - \frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2}\right)\right)$$

Ce qui donne

$${}^dP_n = 2\sqrt{\pi} + 4E\left(\frac{360 \times 2^{n-1}}{2\alpha}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) \times \left(1 - \cos\left(\frac{180 - \frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2}\right)\right)$$

En choisissant $\alpha = 45^\circ$ on obtient

$${}^dP_n = 2\sqrt{\pi} + 4E\left(\frac{360 \times 2^{n-1}}{90}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) \times \left(1 - \cos\left(\frac{180 - \frac{45}{2^{n-1}}}{2}\right)\right)$$

Ce qui donne

$${}^dP_n = 2\sqrt{\pi} + 4E(2^{n+1}) \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - d\right) \times \left(1 - \cos\left(90 - \frac{45}{2^n}\right)\right)$$

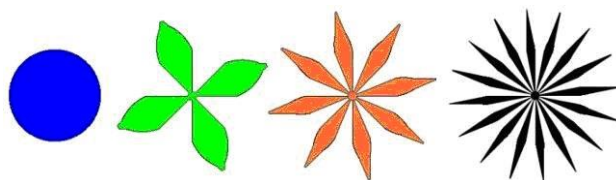


Figure 22 – Fleurs 0-1-2-3

Procédures			
1 > pour trou r d a	11 > pour bosse r d a	29 > pour figure r d a	37 > pour Fleur r d p
2 > f = r-d	12 > n := a	30 > ct	38 > a := 180/ p
3 > b := (180- a)/2	13 > g := r-d-2*r*sin(a/2)	31 > trou r d a	39 > rep (180/ a) [figure r d a]
4 > l := 2* d*sin(a/2)	14 > b := (180- a)/2	32 > td a/2	40 > lc
5 > couleur 255 0 0	15 > l := 2* d*sin(a/2)	33 > bosse r d a	41 > tg 180; av 320
6 > td 180; av f	16 > s := 2* r*sin(a/2)	34 > tg 180-(a/2)	42 > td 90; av 80; tg 90
7 > tg b ; av l	17 > c := a/n	35 > fin	43 > bc
8 > tg b ; av f	18 > couleur 0 0 255		44 > écris nombre de pétales = p
9 > fin	19 > rep n [av s ; td c]		45 > lc
	20 > couleur 255 0 0		46 > av 15; tg 90; av 30; td 90
	21 > tg a/2 ; av g		47 > bc
	22 > td b ; av l		48 > écris rayon = r
	23 > td b ; av g		49 > lc
	24 > tg a/2		50 > av 15; td 90; av 15; tg 90
	25 > couleur 0 0 255		51 > bc
	26 > rep n [av s ; td c]		52 > écris rayon central = d
	27 > fin		53 > fin

Figure 23 – Procédure Fleurs

Procédures			
1 > pour trou r d a	11 > pour bosse r d a	29 > pour figure r d a	37 > pour Fleur r d p
2 > f = r-d	12 > n := a	30 > ct	38 > a := 180/ p
3 > b := (180- a)/2	13 > g := r-d-2*r*sin(a/2)	31 > trou r d a	39 > rep (180/ a) [figure r d a]
4 > l := 2* d*sin(a/2)	14 > b := (180- a)/2	32 > td a/2	40 > lc
5 > couleur 255 0 0	15 > l := 2* d*sin(a/2)	33 > bosse r d a	41 > tg 180; av 320
6 > td 180; av f	16 > s := 2* r*sin(a/2)	34 > tg 180-(a/2)	42 > td 90; av 80; tg 90
7 > tg b ; av l	17 > c := a/n	35 > fin	43 > bc
8 > tg b ; av f	18 > couleur 0 0 255		44 > écris nombre de pétales = p
9 > fin	19 > rep n [av s ; td c]		45 > lc
	20 > couleur 255 0 0		46 > av 15; tg 90; av 30; td 90
	21 > tg a/2 ; av g		47 > bc
	22 > td b ; av l		48 > écris rayon = r
	23 > td b ; av g		49 > lc
	24 > tg a/2		50 > av 15; td 90; av 15; tg 90
	25 > couleur 0 0 255		51 > bc
	26 > rep n [av s ; td c]		52 > écris rayon central = d
	27 > fin		53 > fin

Figure 23 bis – Procédure Fleurs (conforme)

7 – Peigne

Une autre idée a été de modifier un rectangle pour faire un « peigne » ou « radiateur ».

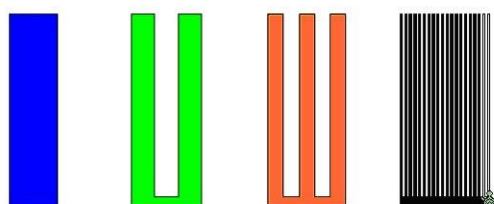


Figure 24 – Peignes 0-1-2-10

Le périmètre est donné par $P_n = 4 + 3,8n + \frac{4n+2}{2,1n+3}$.

Cette figure est paradoxale puisqu'on a l'impression que l'aire devient plus grande quand n est très grand. (2)

8 - Octogone

Une tentative limitée a été faite à partir d'un octogone, les mesures sont en *cm*. La mise en place d'un processus ne semble pas possible.

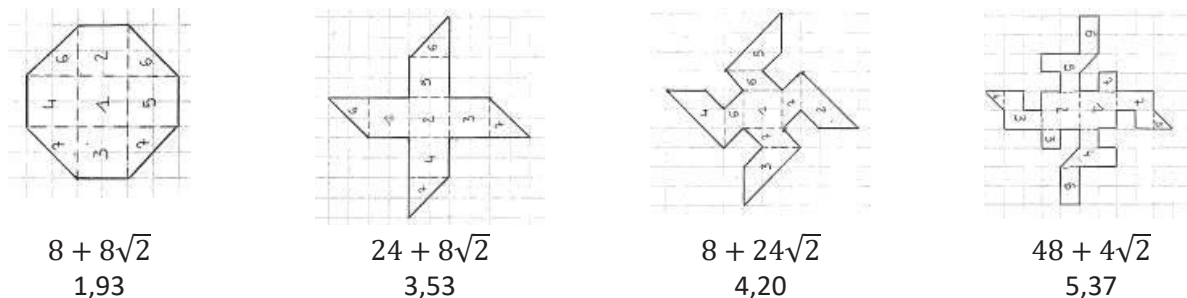


Figure 25 – Découpage d'un Octogone

Une variante a été cherchée en reprenant l'idée utilisée pour le carré : découper les bords et rajouter des octogones réduits. Mais pour éviter que des morceaux se superposent il a fallu modifier le découpage.

Voici une procédure avec GéoTortue avec un redécoupage de chaque segment en 11.

```

1 > pour segment l n
2 > si n==0 alors [av l] sinon [segment l/11 n-1]
3 > av 2*l/11
4 > tg 135; segment l/11 n-1
5 > td 45; segment l/11 n-1
6 > td 45; segment l/11 n-1
7 > td 45; segment l/11 n-1
8 > td 45; segment l/11 n-1
9 > td 45; segment l/11 n-1
10 > td 45; segment l/11 n-1
11 > tg 135; segment l/11 n-1
12 > av 2*l/11
13 > td 135; segment l/11 n-1;
14 > tg 45; segment l/11 n-1
15 > tg 45; segment l/11 n-1
16 > tg 45; segment l/11 n-1
17 > tg 45; segment l/11 n-1
18 > tg 45; segment l/11 n-1
19 > tg 45; segment l/11 n-1
20 > td 135; segment l/11 n-1]
21 > av 2*l/11
22 > fin
23 >
24 > pour octogone l n
25 > rep 8 [segment l n; td 45]
26 > fin

```

Figure 26 – Procédure Octogone

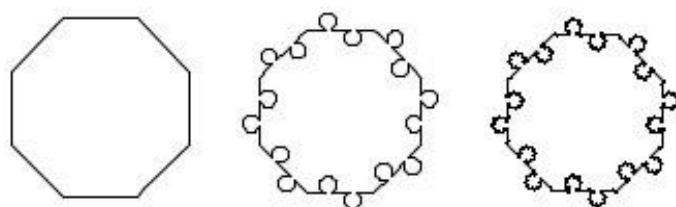


Figure 26bis – Octogone 0-1-2

9 – Cgone

En cherchant à étendre à des polygones réguliers il a fallu utiliser la partie entière pour découper en 3. Une première tentative a fait apparaître, en zoomant, des superpositions : sans doute qu'il y a trop de rajouts intermédiaires.

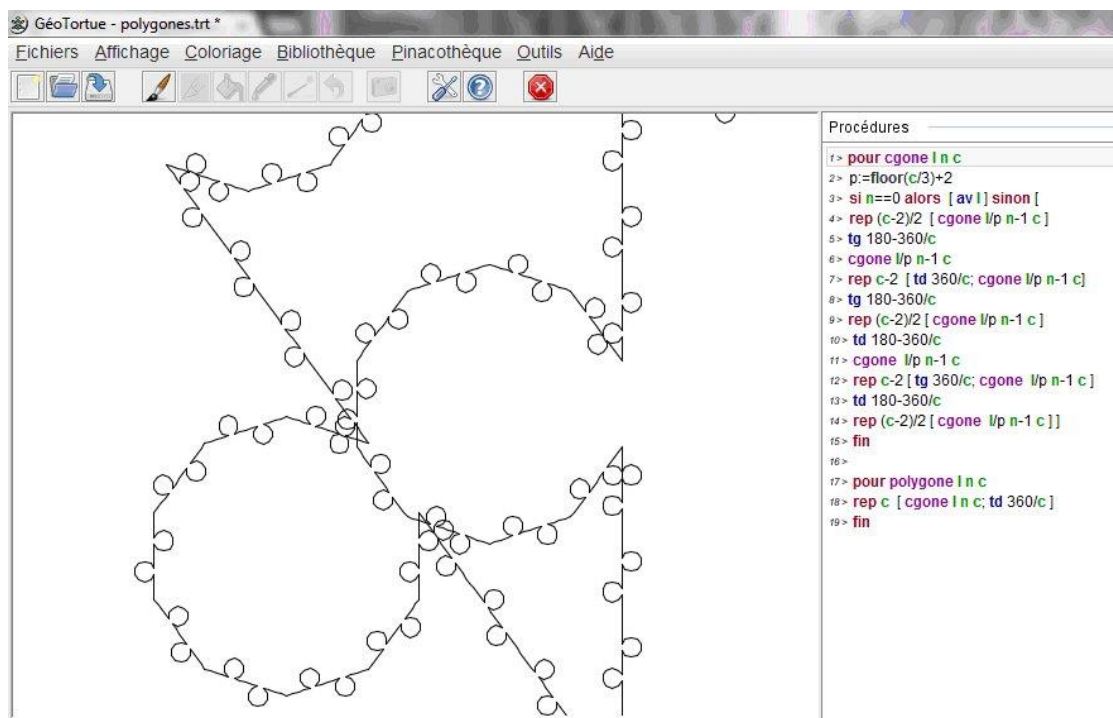


Figure 27 – Procédure Octogone 2 - Erreur

En procédant comme dans les figures précédentes, c'est-à-dire en ne rajoutant que deux insertions par segments et en utilisant un découpage avec $(3 * \text{floor}(c/3) + 5)$ on obtient des figures satisfaisantes.

```

1 > pour cgone l n c
2 > p:=3*floor(c/3)+5
3 > si n==0 alors [ av l ] sinon [ av (floor(c/3)+3)*l/p;
4 > tg 180-360/c;
5 > rep c-1 [ cgone l/p n-1 c; td 360/c ]
6 > td 180; av (floor(c/3)-1)*l/p; td 180-360/c
7 > rep c-1 [ cgone l/p n-1 c; tg 360/c ]
8 > td 180; av (floor(c/3)+3)*l/p ]
9 > fin
10 >
11 > pour polygonepubli l n c
12 > rep c [ cgone l n c; td 360/c ]
13 > fin
14 >

```

Figure 28 – Procédure cgone

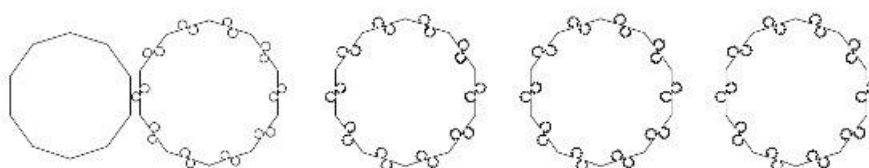


Figure 29 – 10gones 0-1-2-3-4

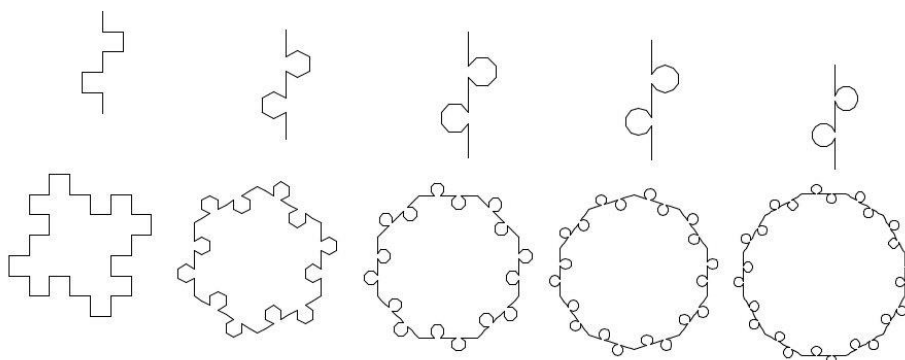


Figure 30 – c-gones 1 pour c valant 4-6-8-10-12

Les différentes formules donnant le périmètre sont regroupées en dessous :

$$4\left(\frac{9}{5}\right)^n \quad 6\left(\frac{16}{8}\right)^n \quad 8\left(\frac{23}{11}\right)^n \quad 10\left(\frac{30}{14}\right)^n \quad 12\left(\frac{37}{17}\right)^n$$

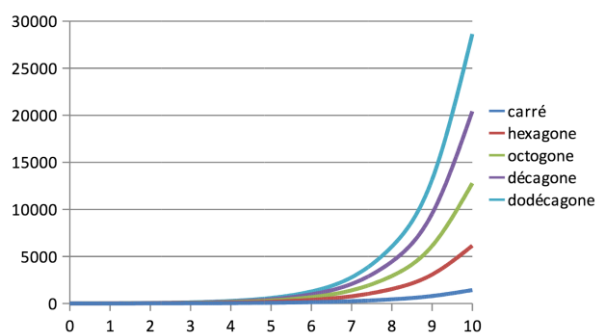


Figure 31 – Comparaison 1 des périmètres

10 – Comparaisons

Afin de mieux appréhender les différentes formules que nous avons trouvées et d'en comparer les résultats, nous les avons rentrées sur un tableur pour pouvoir comparer l'évolution du périmètre selon les étapes.

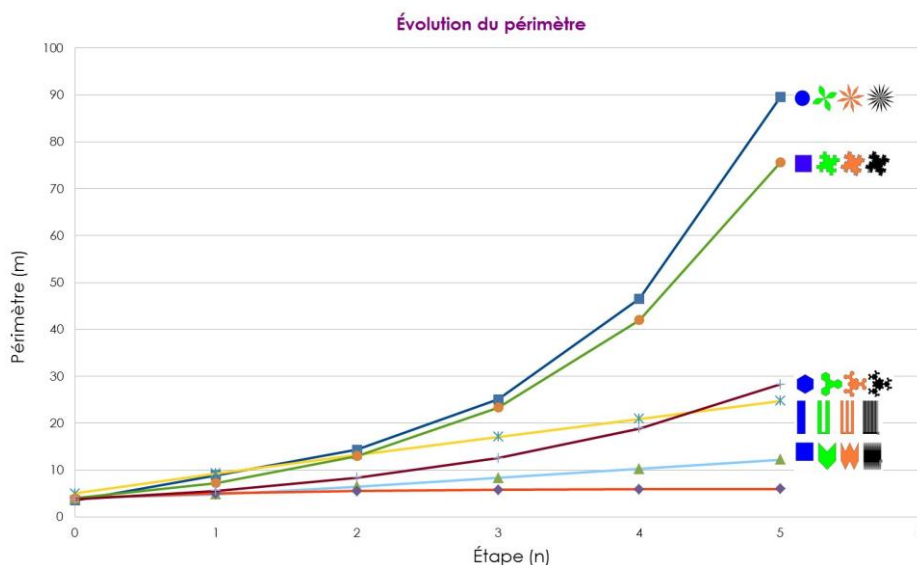


Figure 32 - Comparaison 2 de périmètres

Ainsi comme nous pouvons le voir sur la figure qui présente les 6 premières étapes, nous pouvons regrouper les méthodes de construction en trois groupes différents.

Dans le premier, nous mettrons l'Escalier. Ce dernier augmente légèrement et a une limite de 6.

Dans le groupe suivant se trouvent les Dentiolites et le Peigne. Tous augmentent doucement mais ne plafonnent à aucune limite.

Dans le dernier groupe, à l'instar des fractales (de carrés, d'hexagones ou autres polygones), la fleur connaît une forte croissance (bien que pour l'hexagone, la figure ne montre pas parfaitement sa rapide augmentation). Les membres de ce groupe vont donc voir leur périmètre tendre vers l'infini de façon plus fulgurante que les méthodes utilisées pour les figures du second groupe.

Conclusions

Par ailleurs toutes ces figures restent bien dans un domaine limité. Il resterait à vérifier que les figures restent dans le carré de côté 2, en particulier pour toutes les fleurs ou alors à trouver les conditions pour que ce soit réalisé.

Deux applications en technologie et dans le monde du vivant ont été citées lors de la présentation au forum Faîtes de la Science.

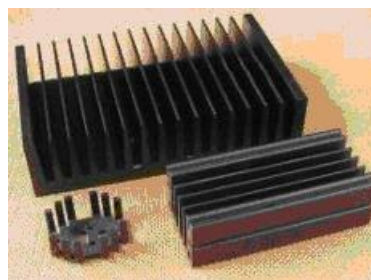
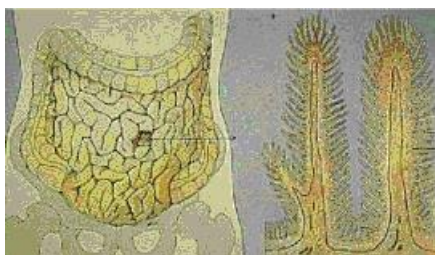


Figure 33 – Applications

NOTES D'ÉDITION

(1) Finalement, à chaque étape on enlève et rajoute alternativement un trapèze à chaque côté. Comme il y a toujours un nombre pair de côtés, on enlève et rajoute autant de trapèzes, donc l'aire est bien conservée! Par exemple, à l'étape 1 on enlève 3 trapèzes et l'on en rajoute 3, à l'étape 2, on enlève 9 trapèzes et on en rajoute 9, etc.

(2) Il manque les paramètres de la construction pour retrouver cette formule ... Néanmoins, en supposant que le rectangle initial est de côtés 2 et 0,5 (donc d'aire 1) et que pour chaque n , la largeur des bâtonnets est identique à la largeur des interstices qui les séparent, saurez-vous retrouver la hauteur H des interstices (qui est inférieure à 2, et la même pour tout n), et la largeur $l(n)$ des bâtonnets et interstices à l'étape n ? Vous pouvez alors vérifier si l'aire est bien toujours égale à 1.

Réponse : $H = 1/2$ et $l(n) = 1/2^{n+1}$

LOI DE ADRIEN 1

Si P représente un nombre pair et I un nombre impair,

+	P	I	−	P	I	×	P	I
P	P	I	P	P	I	P	P	P
I	I	P	I	I	P	I	P	I

On ne peut pas construire un tableau de ce genre pour la division.

Modélisation de croissance d'un arbre

Année 2013-2014

Razvan Boldis, Marius Vlas et Lorand Berekmeri de classe 11 (équivalent Term.) du Colegiul National Emil Racovita de Cluj (Roumanie) et Amaury Jourdain, Martin Luc et Tanguy Ruth élèves de 1^{er}ES et 1^{er}S du lycée d'Altitude de Briançon (France)

Encadrés par : Ariana Văcarețu (Roumanie) et Mickaël Lissonde et Hubert Proal (France)

Établissements : Colegiul Național Emil Racoviță (Cluj / România), Lycée d'Altitude de Briançon (France)

Chercheurs : Madame Adela Lupescu (Université Bades – Bolyai de Cluj-Napoca), Messieurs Camille Petit (Université de Fribourg) et Yves Papegay (INRIA-Sophia Antipolis)

Présentation du sujet

Un arbre est un assemblage de cinq types de branches. Branche de type n°1 de longueur 1, branche de type n°2 de longueur $\frac{1}{2}$, branche de type n°3 de longueur $\frac{1}{3}$, branche de type n°4 de longueur $\frac{1}{4}$ et branche de type n°5 de longueur $\frac{1}{5}$.

Une branche évolue en deux nouvelles branches de numéro supérieur ou égal à son numéro (seule la branche n°5 n'évolue plus).

Pour déterminer comment évolue une branche n° i ($i \leq 4$), on choisit un nombre p au hasard entre 0 et 1.

On cherche alors dans la matrice d'évolution M (1) le coefficient le plus petit $M_{i,j}$ de la ligne n° i tel que $p \leq M_{i,j}$.

Plusieurs cas se présentent alors. Soit $j = i$ et alors la branche évoluera en deux branches de type n° $i + 1$.

Soit $j > i$ et alors la branche évoluera en une branche de type n° i et une de type n° j .

Voici un exemple de matrice d'évolution $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,8 & 0,9 & 0,95 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0,8 & 0,9 & 1 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$

Problème : programmer ce système, le faire évoluer, changer les valeurs de M . Le but est de le rendre le plus proche de la réalité.

Résultats obtenus

Les élèves sont capables de déterminer la probabilité de l'âge d'un arbre (nombre d'évolutions avant que toutes les branches soient au maximum) en fonction de la matrice M .

Ils ont aussi travaillé, dans un second temps, sur l'aspect graphique, mais les recherches ne sont pas finies.

Après de nombreux essais (à la main) nous avons orienté notre travail sur deux pistes.

A. Modélisation brute

Dans cette partie, on ne regardera pas l'aspect graphique du modèle, nous ne regardons que la croissance de l'arbre.

Notre enseignant nous a fourni les programmes en LARP (voir Annexe 1) qui permettent de simuler une croissance d'arbre.

Nous avons limité nos recherches à des arbres composés de 4 types de branches et non 5 et nous avons fait

fonctionner le programme en prenant comme matrice d'évolution $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,8 & 0,9 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0,8 & 1 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$

Pour chaque simulation que fournit le programme (2), nous déterminons ce que nous appelons l'âge de l'arbre, c'est-à-dire le nombre d'évolutions qu'il y a eu pour arriver à une liste composée de 4 (figure 1)

[illegible]

Figure 1 : l'arbre ci-dessus a 7 ans : à la septième évolution, il n'y a que des 4.

Nous avons fait 55 simulations (avec la même matrice d'évolution), et nous avons regroupé nos résultats dans le graphique suivant (figure 2).

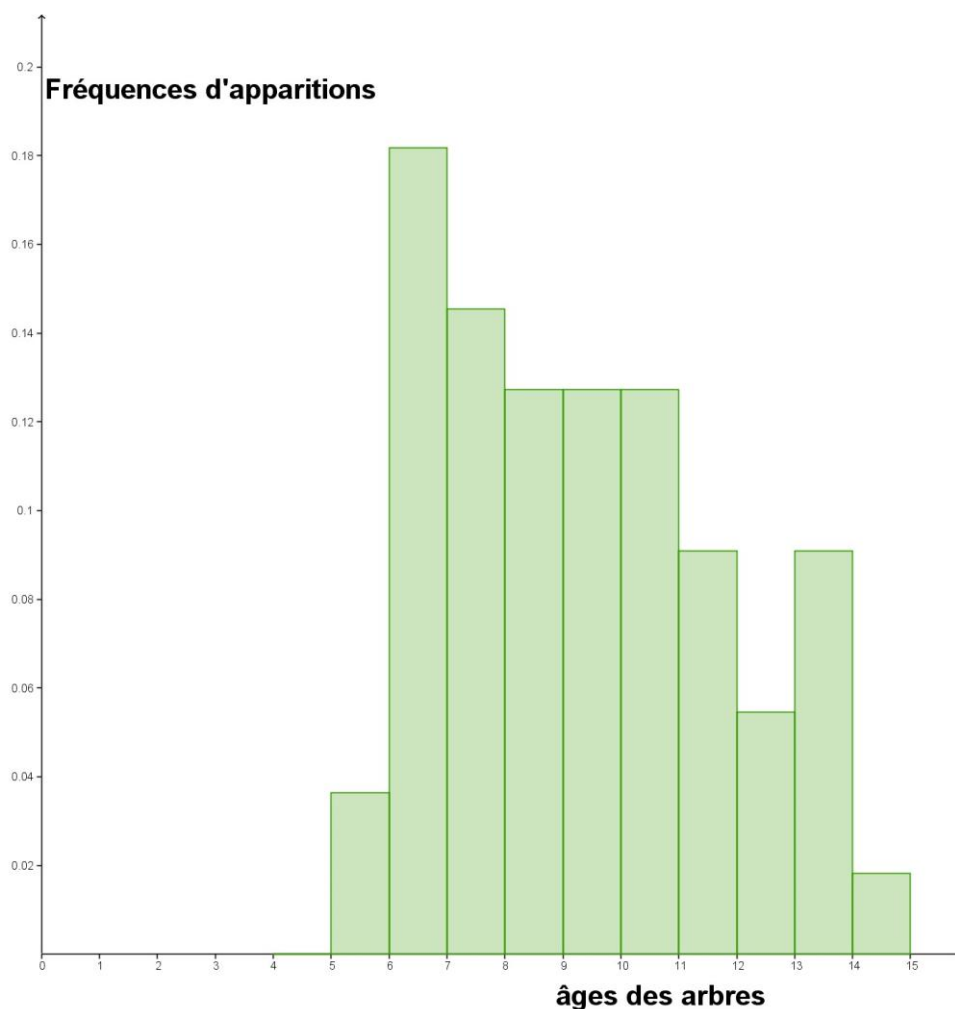


Figure 2 : résultats des 55 simulations de croissances d'arbres

A partir de ce premier travail, nous avons étudié plusieurs pistes :

A1) Quel est l'âge de l'arbre le plus jeune que nous puissions avoir ?

Pour réaliser le plus jeune arbre il faut « rapidement » arriver aux branches n°4. Il faut ainsi qu'à chaque étape d'évolution, une branche de type n° i se divise en deux branches de type n° $i + 1$.

La branche n°1 de départ va créer deux branches n°2 (avec probabilité 0,5), puis chaque branche n°2 va créer deux branches n°3 (probabilité 0,5²) et enfin les 4 fourches n°3 vont créer des branches n°4 (probabilité 0,5⁴).

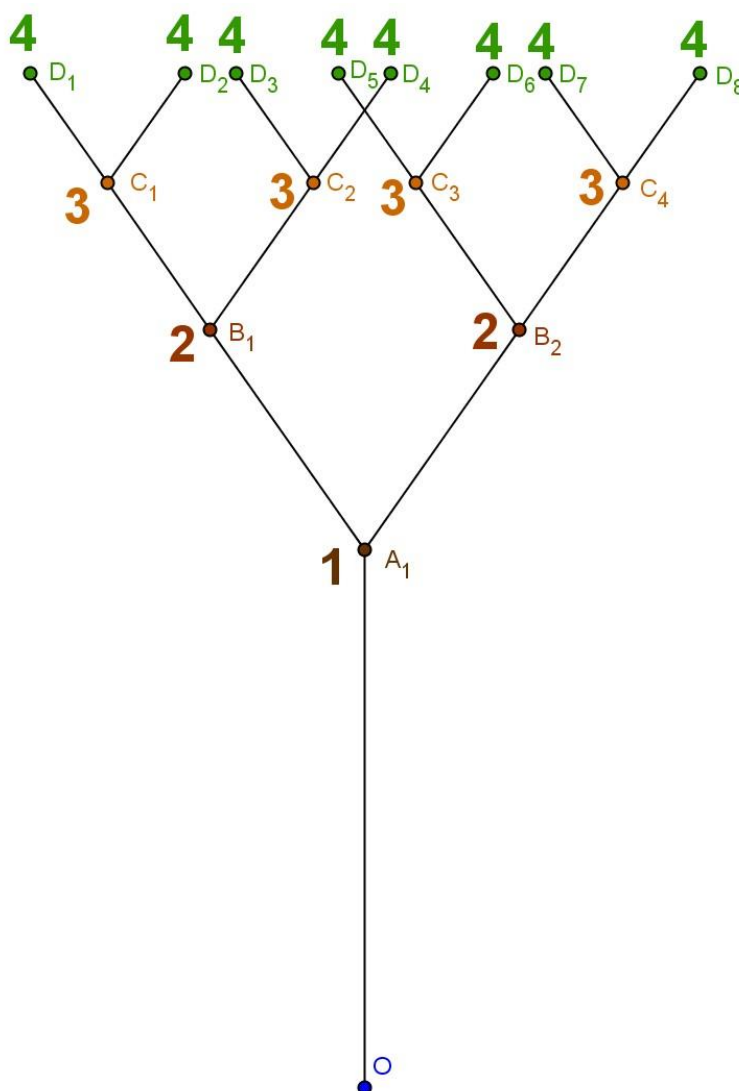


Figure 3 : arbre le plus jeune que nous puissions avoir

Ainsi la probabilité d'avoir un arbre de 4 ans est $0,5 \times 0,5^2 \times 0,5^4 = 0,5^7$ (7 correspond au nombre de fourches).

Pour le cas général nous avons la propriété suivante :

Propriété : si la matrice d'évolution a la même valeur a sur sa diagonale, si on note NE le nombre d'évolutions (nombre de lignes de la matrice d'évolution plus 1) alors l'âge du plus jeune arbre sera NE avec une probabilité de $a^{1+2+2^2+\dots+2^{NE-2}}$.

A2) Augmenter le nombre de simulations pour déterminer la loi de l'âge

Nous avons réalisé davantage de simulations pour essayer de nous faire une meilleure idée de la courbe de la figure 2. Nous avons pour cela modifié notre programme en rajoutant une boucle qui réalise le nombre de fois voulu la simulation. Dans nos premiers essais le programme s'est bloqué. Nous avons alors limité l'âge à 10 ans pour éviter de bloquer notre programme.

Nous avons réalisé 4 simulations de 10000, soit 40000 simulations qui nous donnent les résultats suivants (figure 4).

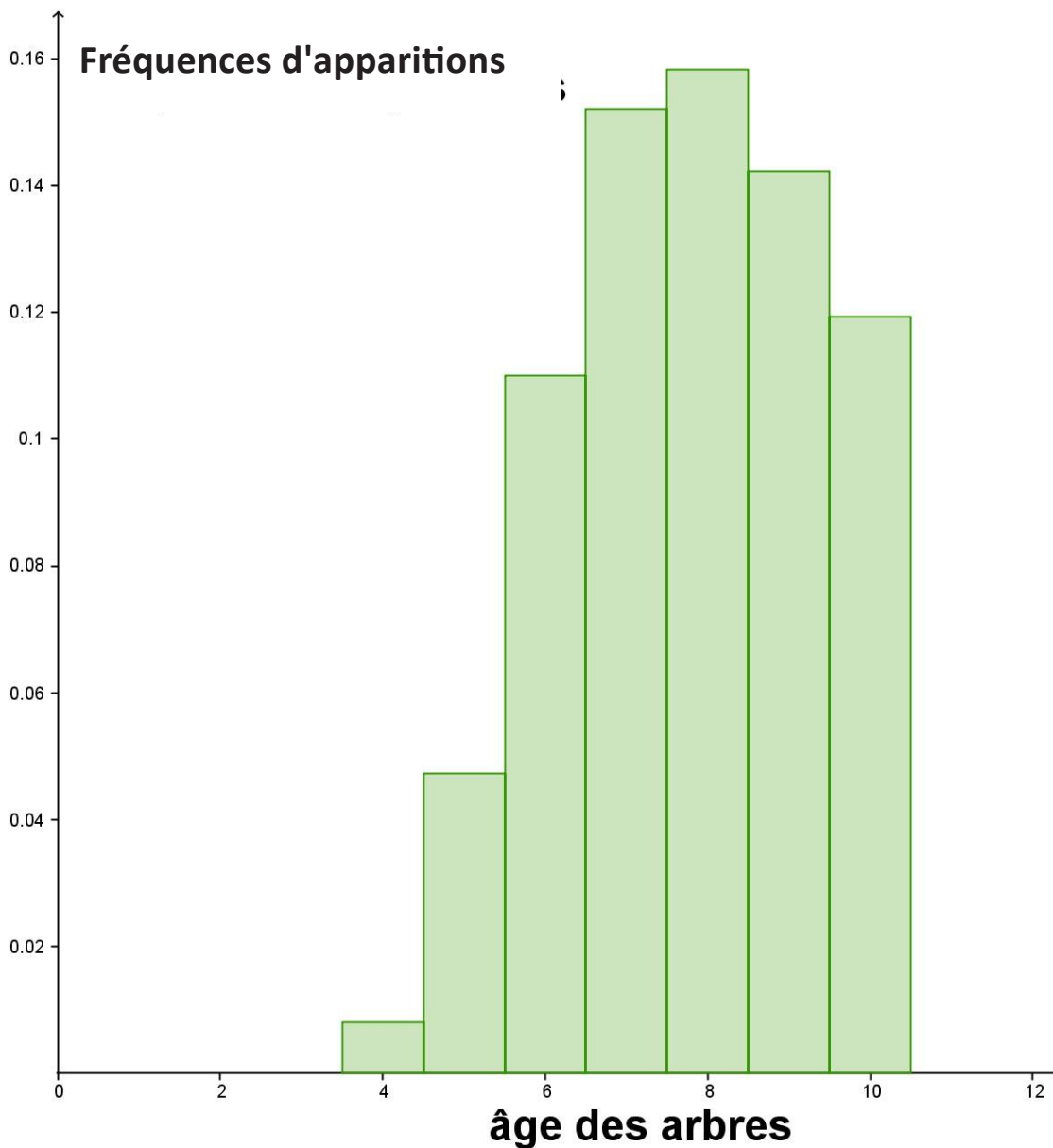


Figure 4 : résultats pour 40000 simulations

Il reste à trouver une suite (3) qui passe par ces points.

A3) Recherche sur des matrices plus petites

Pour essayer d'avoir un résultat théorique nous avons travaillé sur une matrice plus petite.

Si $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ on est dans une situation où un arbre ne peut avoir que deux types de branches (n°1 et n°2). Une branche n°2 évolue toujours (4) en deux branches n°2 et une branche n°1 évolue soit en deux branches n°2 (si $p \leq 0,3$), soit en une branche n°1 et en une branche n°2.

Dans le cas ci-dessus, $P(\text{âge} = 2) = 0,3$, $P(\text{âge} = 3) = 0,7 \times 0,3$, $P(\text{âge} = 4) = 0,7 \times 0,7 \times 0,3$.

Nous généralisons (5) à $P(\text{âge} = n) = 0,7^{n-2} \times 0,3$ pour $n \geq 2$ (figure 5).

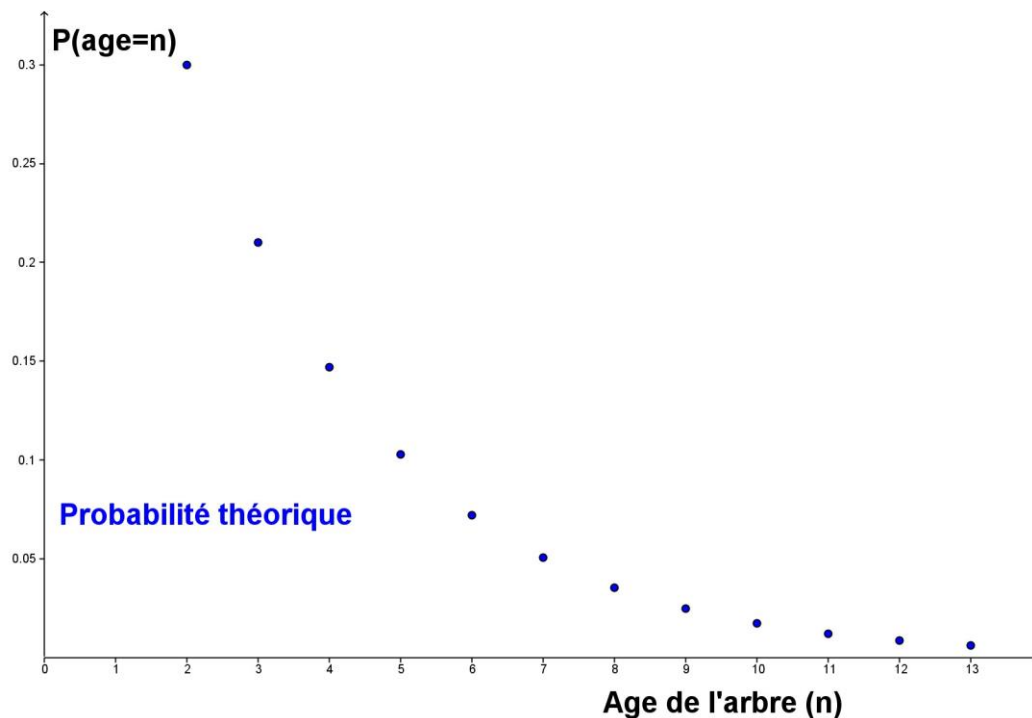


Figure 5 : Résultats théoriques pour un arbre à deux types de branches

Avec l'aide du programme, nous avons réalisé 3000 simulations d'évolution avec la nouvelle matrice (figure 6).

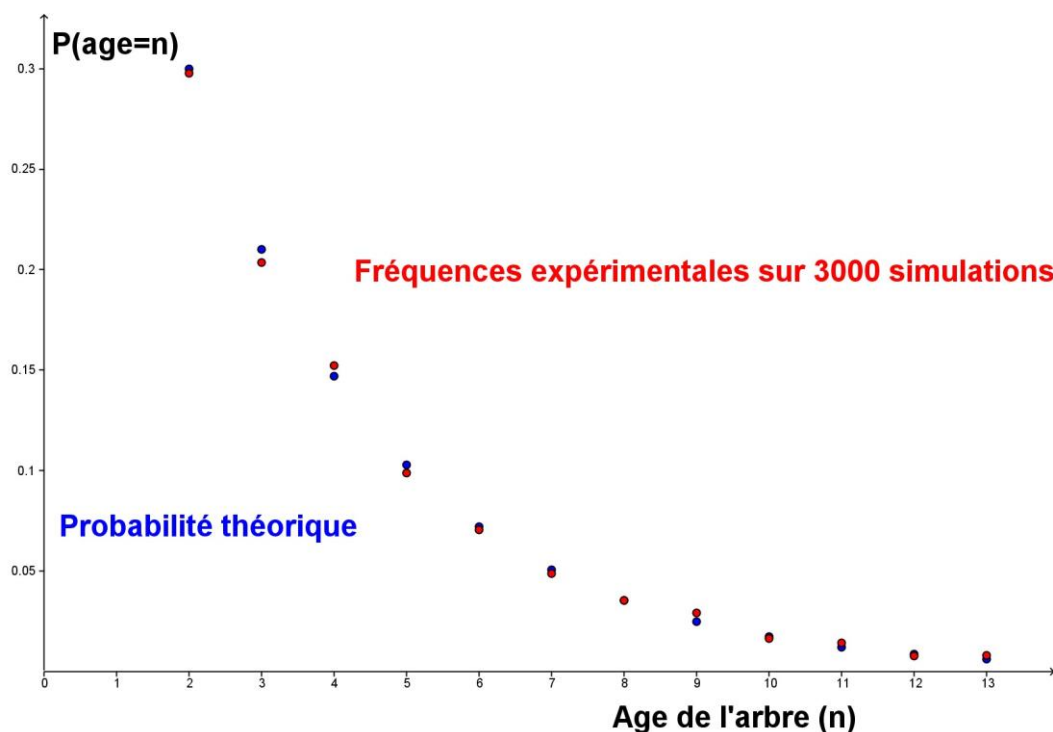


Figure 6 : Résultats théoriques et expérimentaux pour un arbre à deux types de branches

Grande idée de Tanguy.

Pour la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ nous avons trouvé $P(\text{âge} = n) = 0,7^{n-2} \times 0,3$ pour $n \geq 2$.

Nous pouvons ainsi obtenir (pour $n \geq 2$) (6)

$$P(\text{âge} \leq n) = 0,3 + 0,3 \times 0,7 + \dots + 0,3 \times 0,7^{n-2} = 0,3 \times (1 + 0,7 + \dots + 0,7^{n-2}) = 0,3 \times \frac{1 - 0,7^{n-1}}{1 - 0,7} \\ = 1 - 0,7^n$$

Prenons la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ et cherchons à exprimer $P(\text{âge} \leq n)$ pour $n \geq 3$.

Nous noterons $P(n, M)$ cette probabilité.

La branche de départ, avec un n°1, va évoluer en deux branches :

n°2-n°2 avec une probabilité de 0,3	n°1-n°2 avec une probabilité de 0,2	n°1-n°3 avec une probabilité de 0,5
Sur chaque branche n°2 l'évolution va se faire avec la matrice $Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ et les deux branches sont indépendantes. Ainsi la probabilité de cette partie de l'arbre ait un âge inférieur ou égal à $n - 1$, c'est-à-dire que chaque branche ait un âge inférieur ou égal à $n - 1$ va valoir le produit des probabilités (les branches sont indépendantes) soit $(1 - 0,7^{n-2})^2$ Ce qui donne comme début de formule pour $P(n, M)$ $0,3 \times (1 - 0,7^{n-2})^2$	Sur le même principe, nous obtenons comme « milieu » de la formule de $P(n, M)$ $0,2 \times P(n - 1, M) \times (1 - 0,7^{n-2})$	La fin de la formule de $P(n, M)$ sera $0,5 \times P(n - 1, M)$

Finalement, nous arrivons à $P(n, M) = P_n = 0,3 \times (1 - 0,7^{n-2})^2 + 0,2 \times (1 - 0,7^{n-2})P_{n-1} + 0,5 \times P_{n-1}$ avec $n > 3$ et $P_3 = 0,3^3$. Graphiquement nous obtenons pour la figure 7.

Remarque : $P(\text{âge} = n) = P(\text{âge} \leq n) - P(\text{âge} \leq n - 1)$

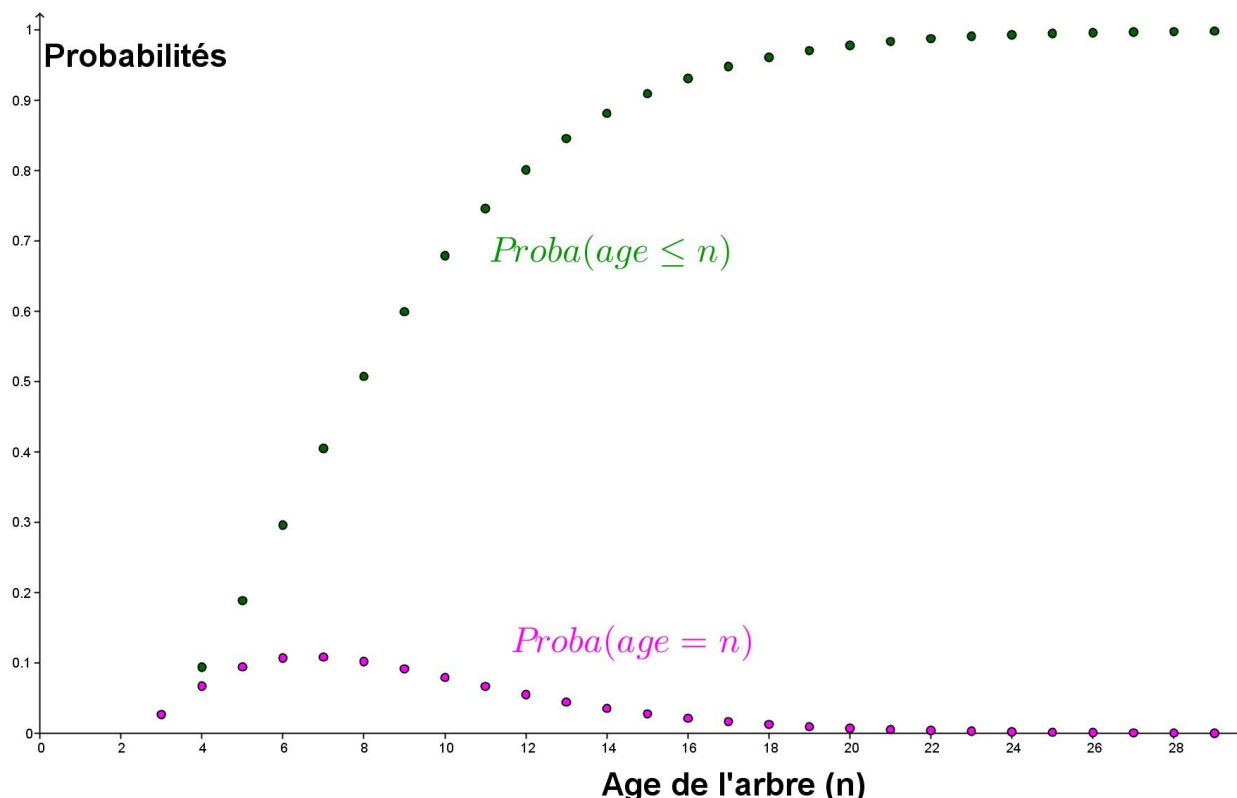


Figure 7 : résultats théoriques pour un arbre à trois types de branches

Nous avons voulu simuler cette évolution pour comparer nos résultats théoriques et expérimentaux. Malheureusement le langage LARP n'est pas assez puissant pour réaliser de nombreuses simulations. Nous avons refait nos programmes en Python, ce qui nous a permis de faire assez rapidement 30000 simulations, voici nos résultats (figure 8).

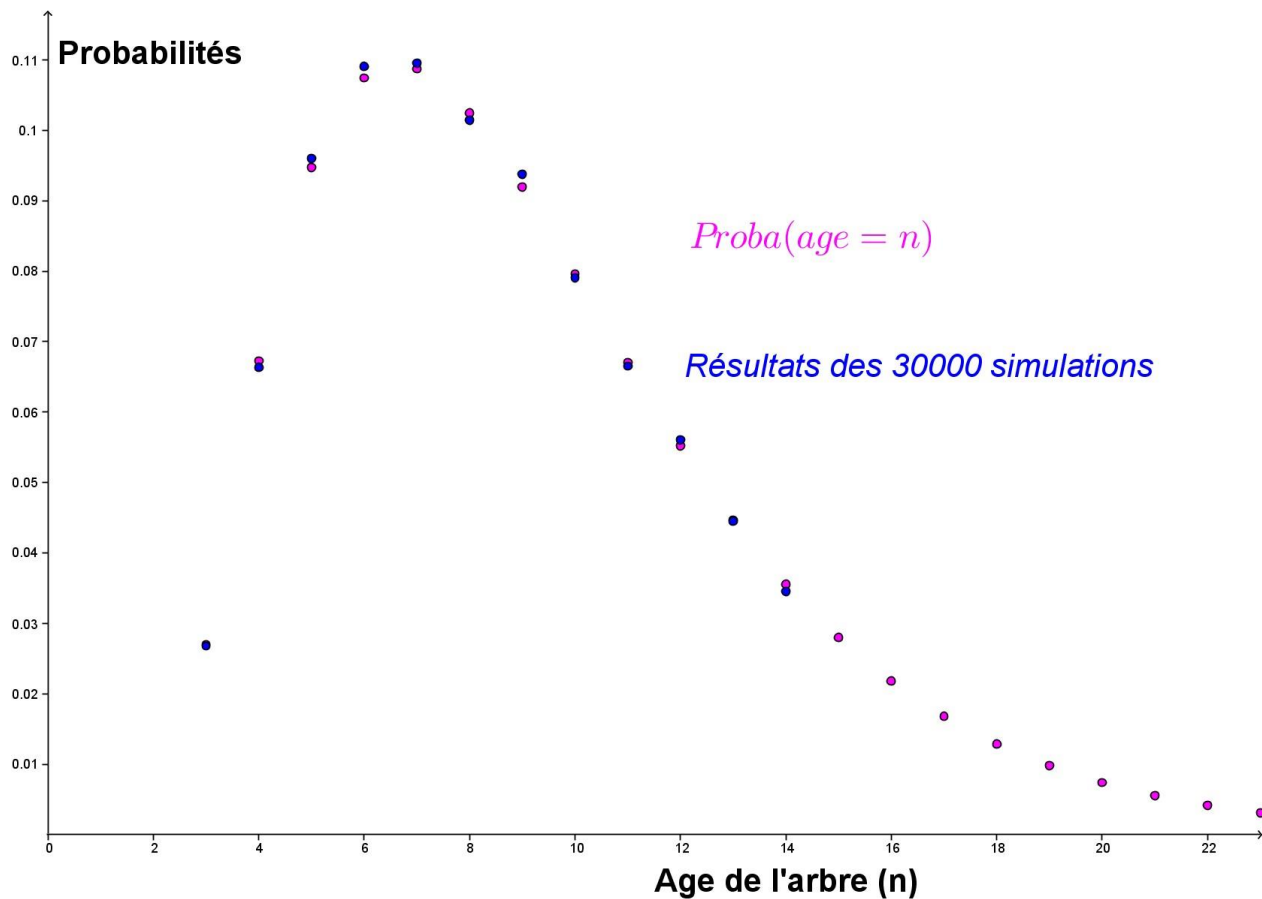


Figure 8 : résultats théoriques et expérimentaux sur un arbre à trois types de branches

Nous avons aussi fait varier les valeurs de la première ligne (0,3 0,5 1) sachant que la dernière doit être 1. Quand la première valeur augmente (la deuxième fixe), la forme de la bosse est de plus en plus haute vers la gauche (figure 9).

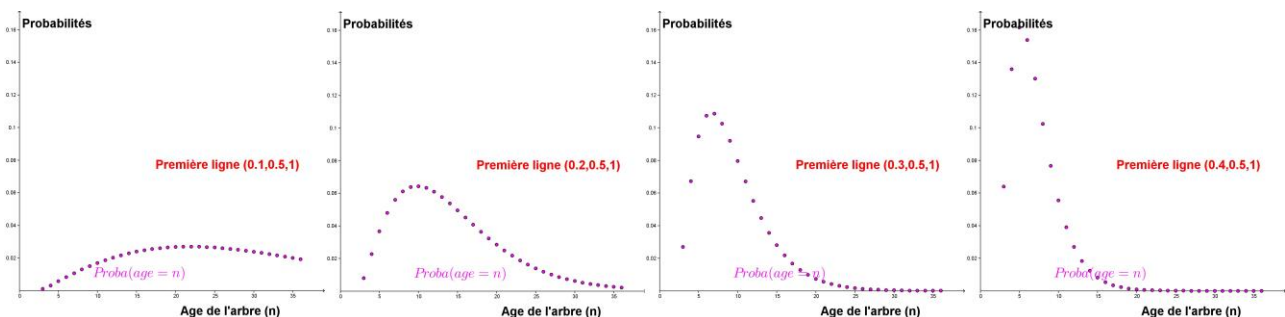


Figure 9 : courbes des probabilités des âges des arbres quand le premier paramètre varie

Quand la deuxième valeur augmente (la première fixe), la bosse baisse, mais ne semble pas se déplacer (figure 10).

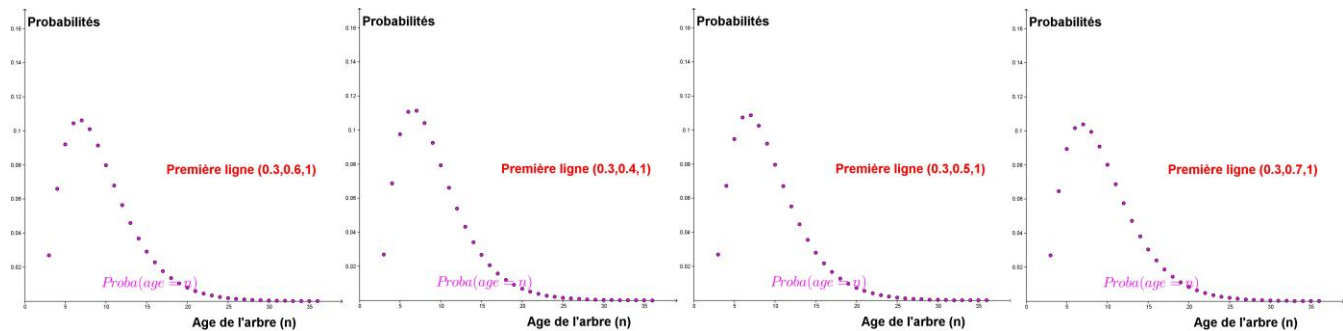


Figure 10 : courbes des probabilités des âges des arbres quand le deuxième paramètre varie

Il est possible de généraliser notre formule à des arbres avec plus de numéros de branche possible.

B. Modélisation géométrique

Nous avons abordé cette partie en début d'année, mais de nombreux paramètres sont à régler.

Par exemple, est-ce que l'angle des fourches est toujours le même ou dépend du numéro de la branche ? L'ordre des numéros des branches est important, les numéros les plus petits doivent-ils rester « proche » de l'axe de départ ?

Nous rappelons que la branche n°i est de longueur $\frac{1}{i}$.

Pour l'angle nous avons pris comme modèle qu'une branche va donner deux branches numéros x et y (voir figure 11). Les angles α et β sont deux paramètres et n est « l'âge » de la branche.

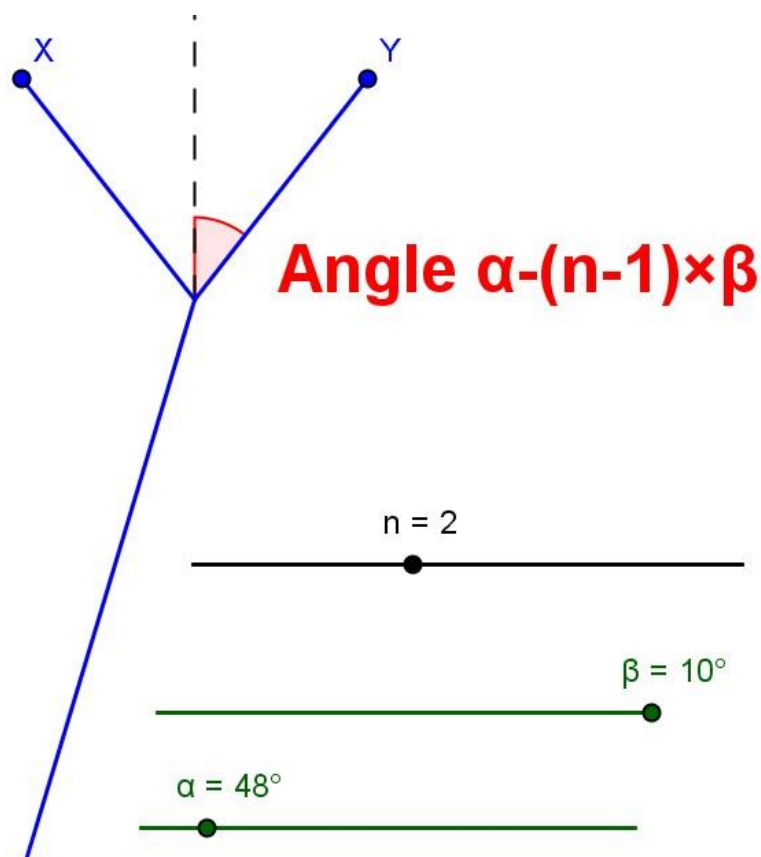


Figure 11 : angle d'évolution d'une branche

Examples :

La liste d'évolution ci-dessous va donner l'arbre de la figure 13.

Liste des numéros de branche à l'âge 1 est 1

Liste des numéros de branche à l'âge 2 est 2 2

Liste des numéros de branche à l'âge 3 est 4 2 3 3

Liste des numéros de branche à l'âge 4 est 4 4 3 2 4 4 4 4

Liste des numéros de branche à l'âge 5 est 4 4 4 4 4 3 3 4 4 4 4 4 4 4

Liste des numéros de branche à l'âge 6 est 4

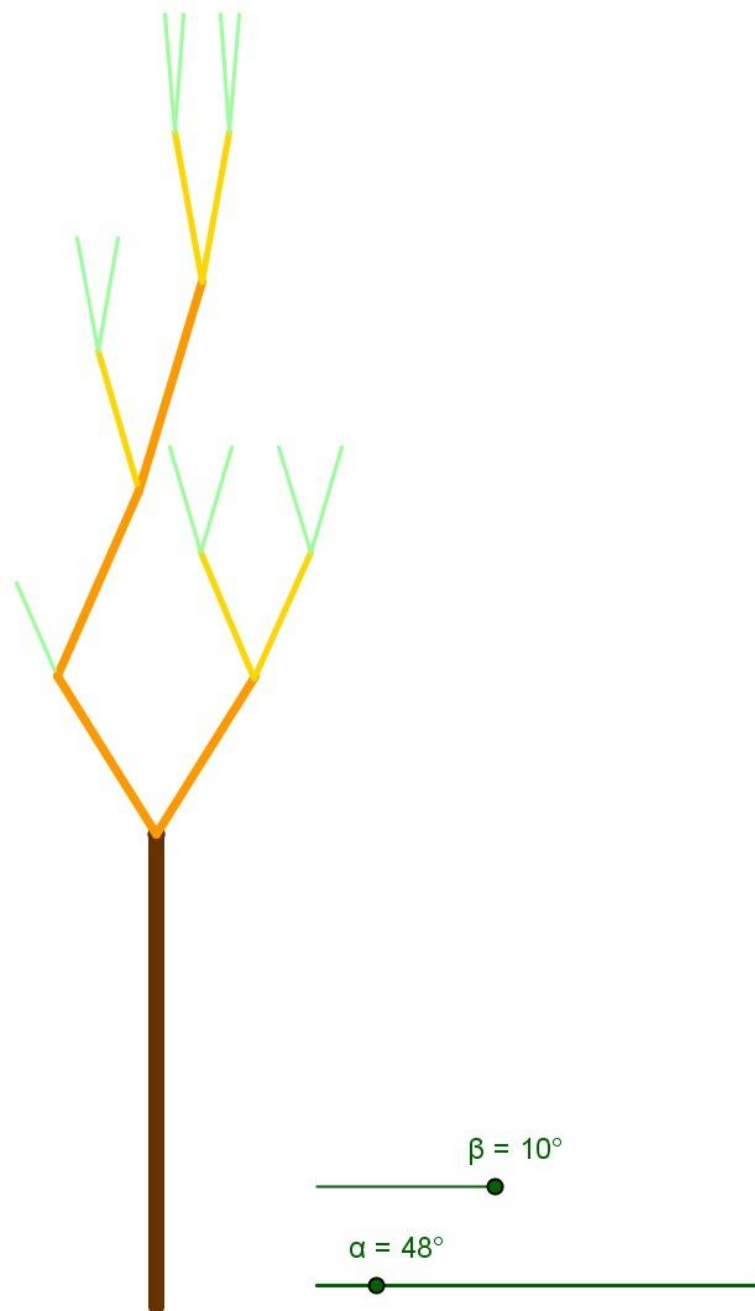


Figure 13 : exemple de réalisation d'arbre de 6 ans

Une autre liste d'évolution va donner un autre exemple d'arbre (figure 14).

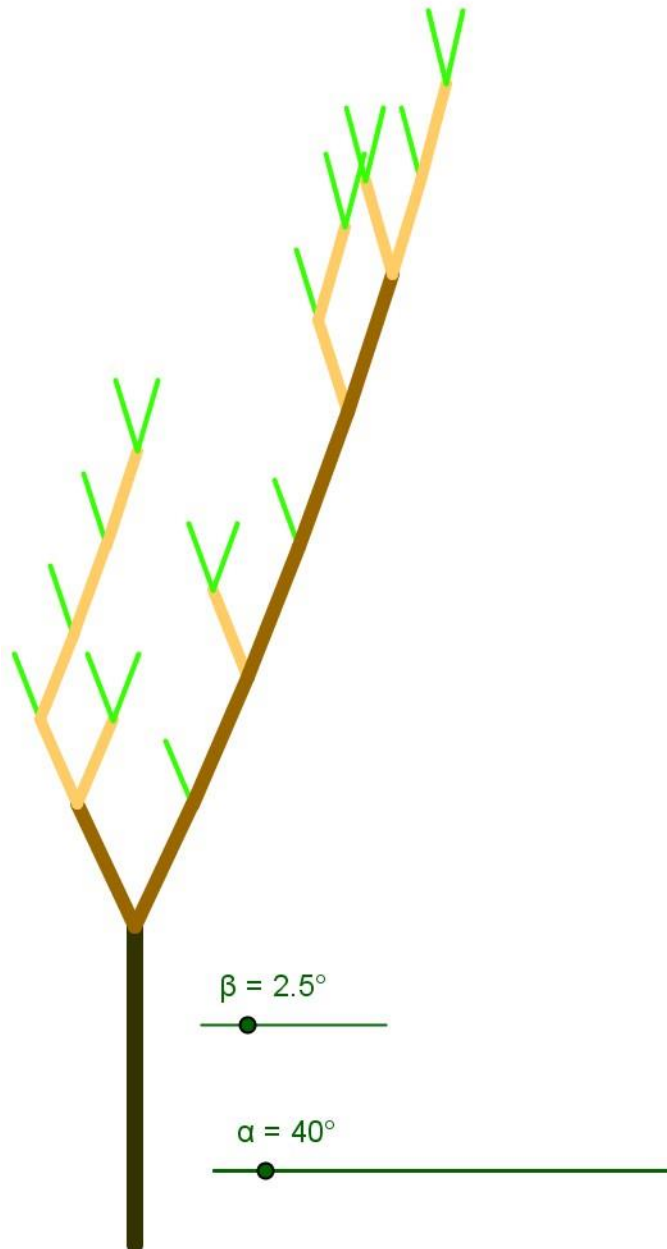


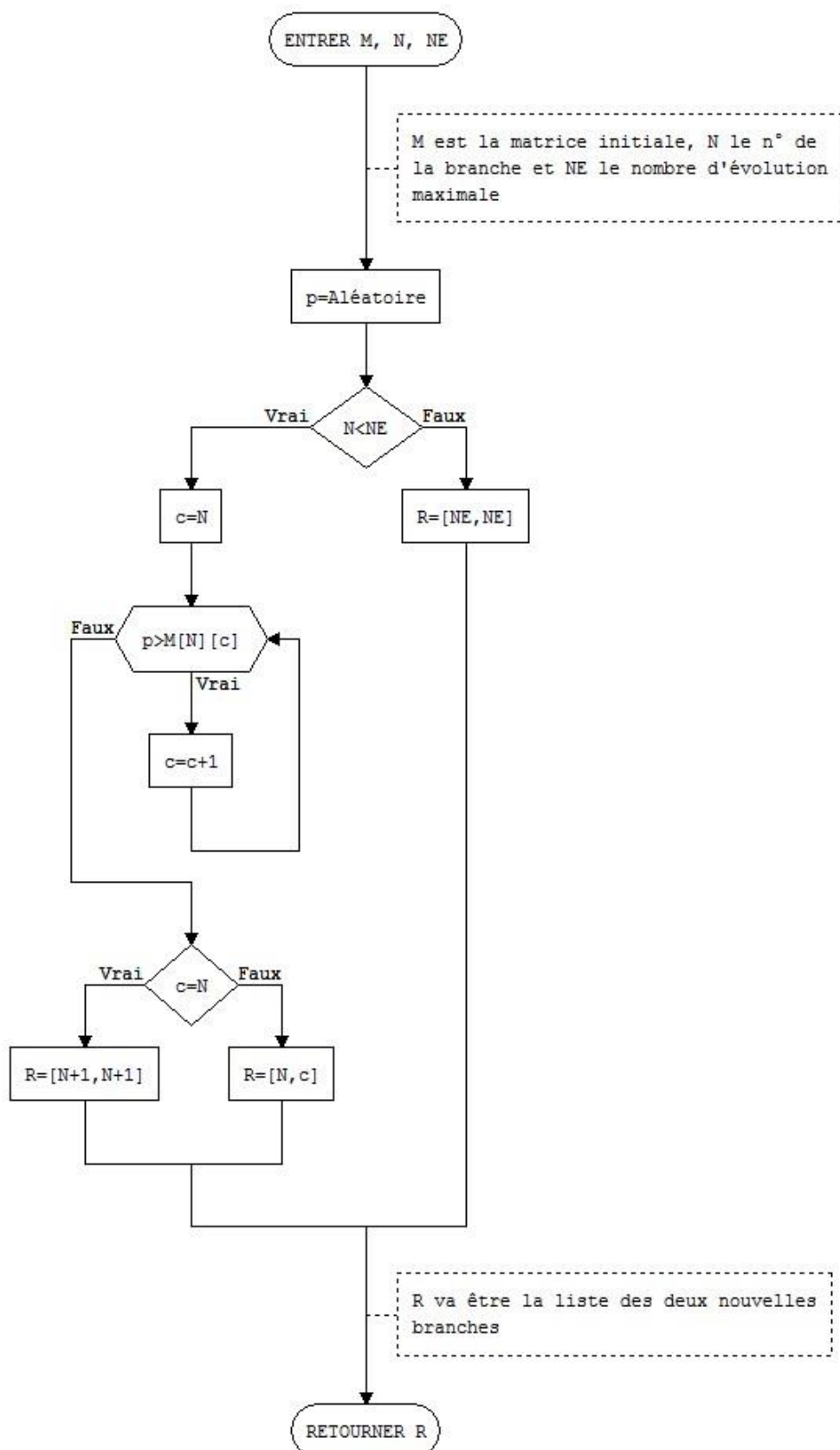
Figure 14 : exemple de réalisation d'arbre de 9 ans

ANNEXE 1

Programmes en LARP présentés sous forme d'organigramme

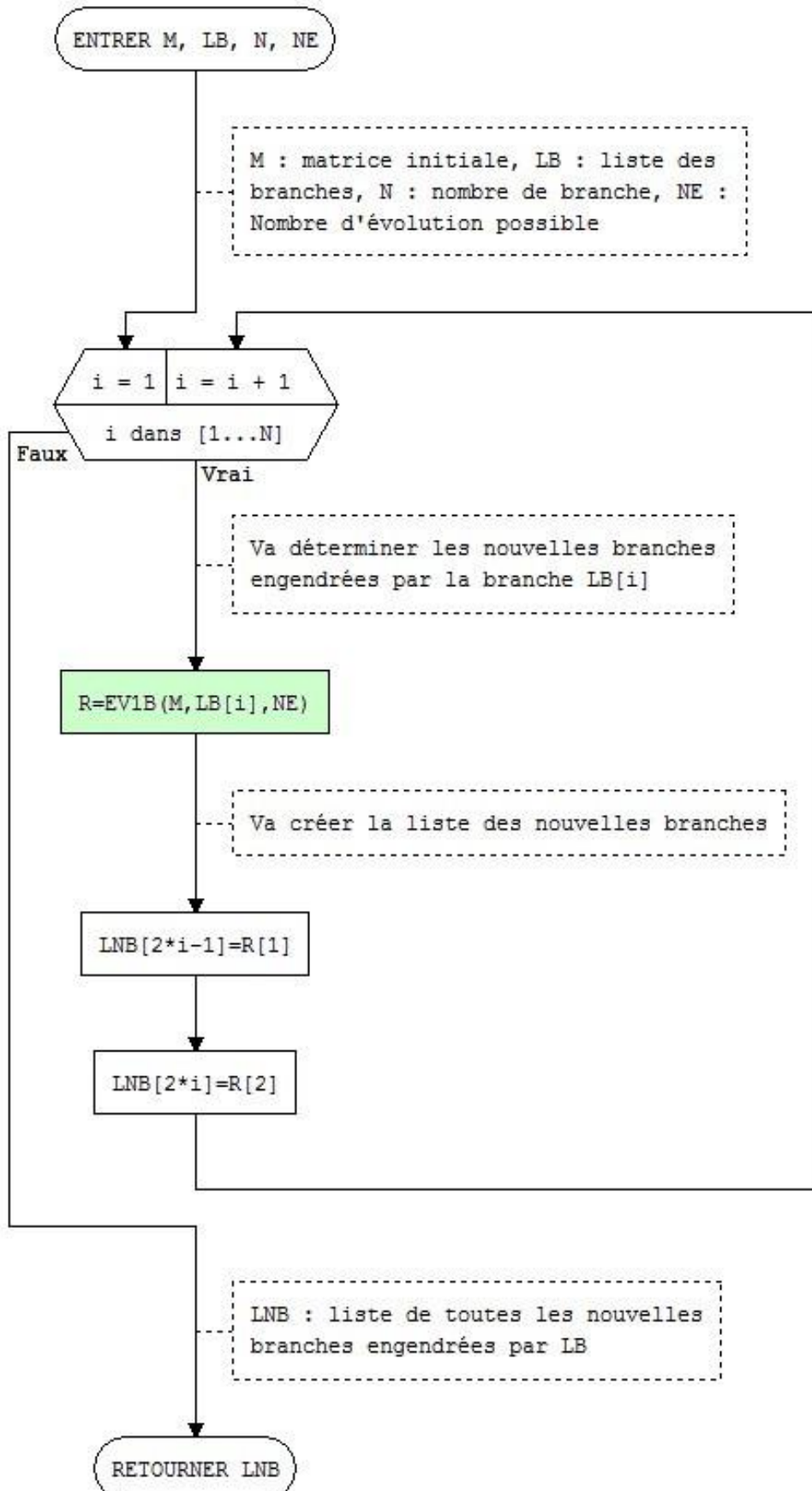
Sous programme EV1B - Évolution d'une branche

Il détermine l'évolution d'une branche n°N connaissant la matrice d'évolution (M) et le nombre d'évolution possible (NE). Il retourne R les deux nouvelles branches



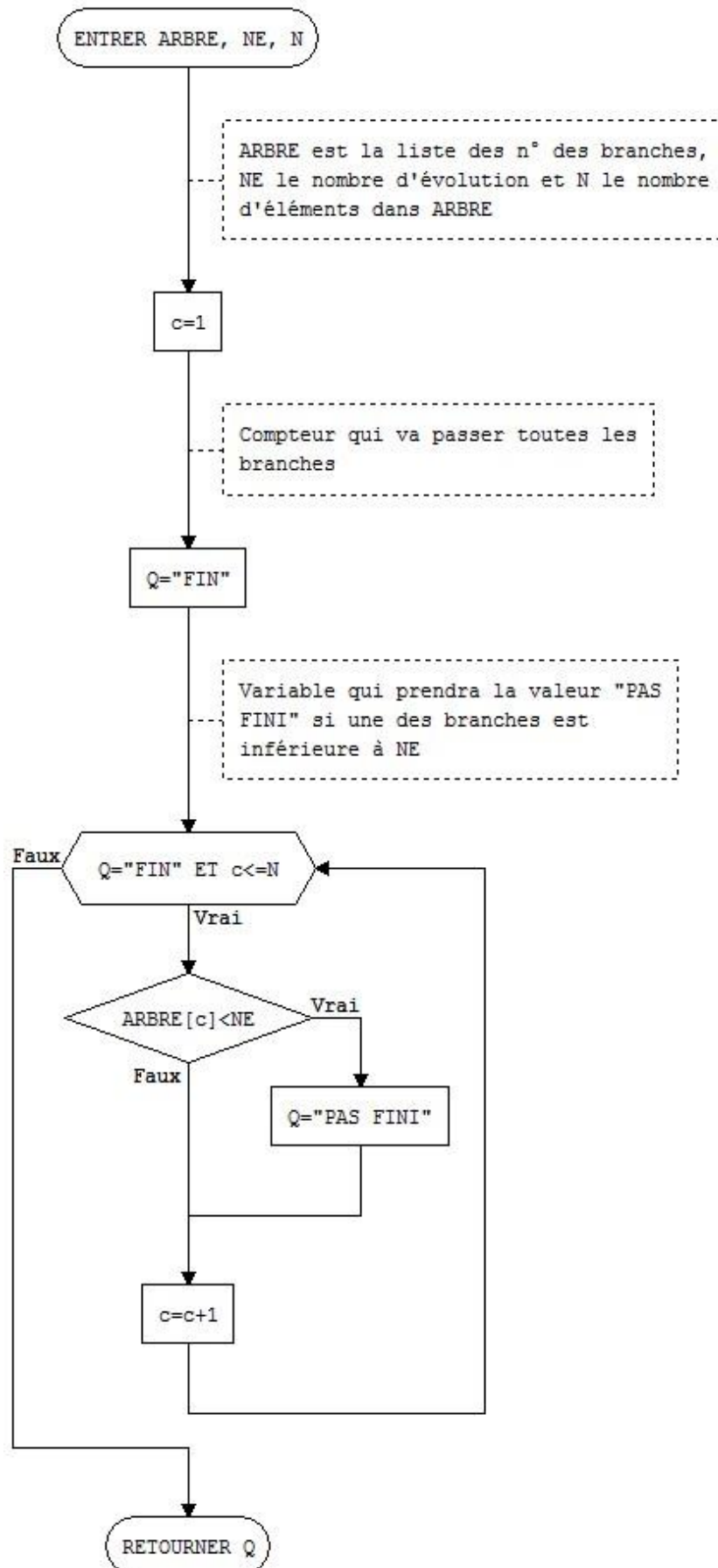
Sous programme EVDB - Évolution de branches

Il détermine l'évolution d'une liste de branches (LB), connaissant la matrice d'évolution (M), le nombre d'évolutions possibles (NE) et le nombre de branches (N). Il retourne la nouvelle liste de branches (LNB) deux fois plus longue.



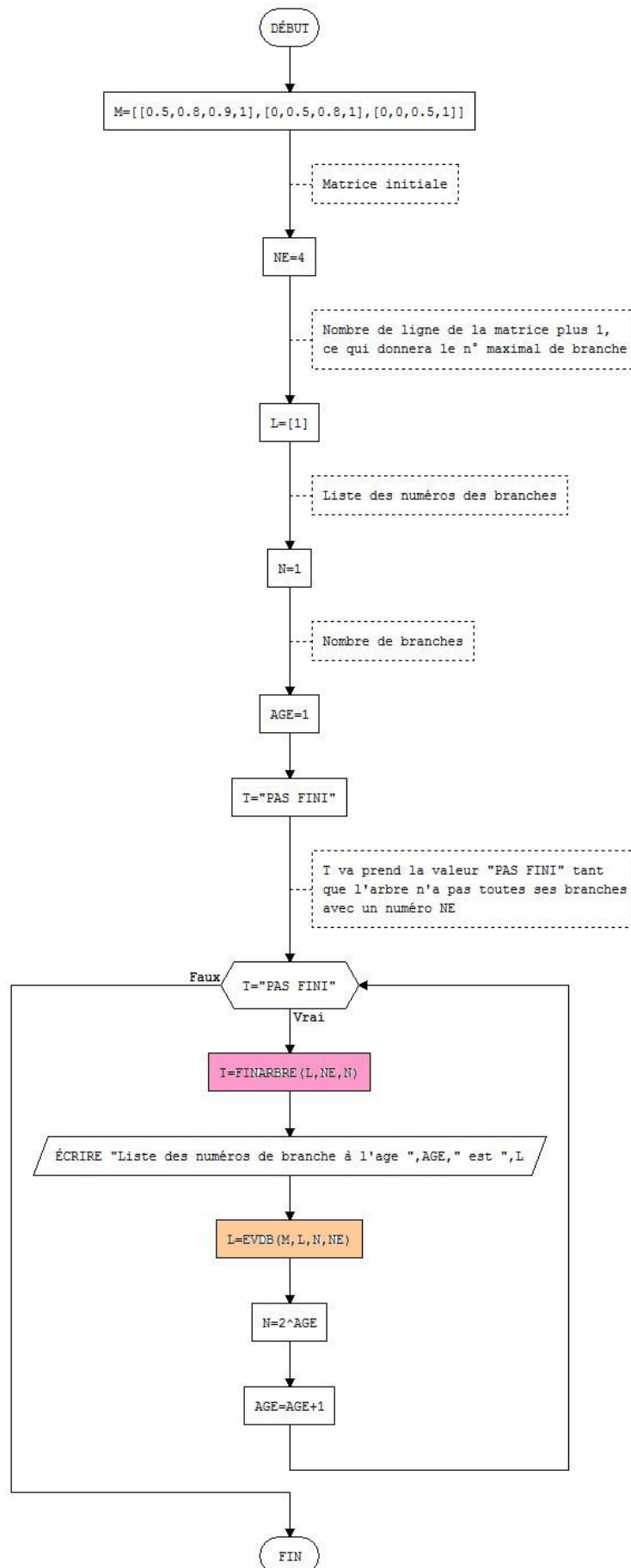
Sous programme FINARBRE -Fin d'un arbre

Il détermine si une liste de branches (*ARBRE*) composées de *N* branches est finie. C'est-à-dire si tous les numéros des branches de l'arbre valent *NE*.



Programme PRINCIPAL

Fait une évolution d'arbre. La matrice d'évolution M et NE sont rentrées dans le programme



NOTES D'ÉDITION

- (1) La matrice M est supposée être triangulaire supérieure c'est-à-dire avoir des zéros dans la triangle inférieur sous la diagonale et on suppose de plus que la suite des coefficients est croissante sur chaque ligne. En réalité elle provient d'une autre matrice P plus naturelle dite stochastique qui contient par ligne les probabilités $p(i,j)$ d'évolution de la branche n° i , la ligne n° i de M étant constituée des sommes cumulées de ligne n° i de P .
- (2) En fait on s'aperçoit que contrairement au processus expliqué page 253, dans le programme une branche n° 4 donne à chaque fois naissance à deux branches de même type, ce qui donne un nombre de branches qui suit les puissances de 2. Cela revient à rajouter une 4ème ligne à la matrice ayant 1 en position diagonale et 0 ailleurs.
- (3) Plutôt une loi de probabilité qui corresponde à cet histogramme.
- (4) Il semble qu'on suive maintenant la variante adoptée dans l'exemple page 254
- (5) Le lecteur averti aura reconnu une loi géométrique.
- (6) Ce résultat peut aussi se calculer en passant au complémentaire : $P(\text{âge} > n) = 0,7^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

LOI DE RÉMI 2

Si on connaît un multiple de 7 voici comment faire pour trouver le suivant :

Si le chiffre des unités est plus petit que 3, ajouter 7 aux unités.

Si le chiffre des unités est plus grand que 3, enlever 3 aux unités et ajouter 1 aux dizaines.

Le berger et ses moutons

Année 2014-2015

Jérémie Gantet et François Sellier, Première S

Encadrés par : Arnaud Carsalade et Laurent Guidini

Établissement : Lycée polyvalent Bellevue, Toulouse

Chercheuse : Sabine Mercier, Université Toulouse 2 - Jean Jaurès

1 Présentation du sujet

Nous allons dans ce document nous intéresser au problème isopérimétrique dans un triangle, que nous résoudrons par le biais de la géométrie et de l'analyse, puis nous élargirons au cas du quadrilatère, des polygones à n côtés et enfin au cas général d'une surface dans le plan.

Le problème auquel nous allons nous intéresser ici est le suivant :

Un berger possède 300 m de fil barbelé et trois piquets.

Comment doit-il placer ses piquets pour que ses moutons aient un maximum d'herbe à brouter ?

2 Conjectures et résultats obtenus

Afin de résoudre ce problème, nous avons dans un premier temps cherché quel était le triangle de périmètre minimal pour une base et une aire donnée, et nous avons montré que celui-ci était isocèle. Puis nous avons trouvé analytiquement que cette même situation donnait également le triangle d'aire maximale pour une base et un périmètre donné. Nous avons ensuite cherché quel type de triangle donnait la plus grande aire, et avons montré par l'absurde que le triangle équilatéral était bien la situation optimale.

3 Résolution

3.1 Un triangle de périmètre minimal pour une aire et une base données

Proposition 1

Le triangle ABC de base AB et d'aire $\mathcal{A}$ qui a le plus petit périmètre est le triangle ABC isocèle en C .

Soit un triangle ABC d'aire $\mathcal{A}$ et de base AB de longueur b fixées.

Comme $\mathcal{A} = b \times h/2$, on a également h fixé.

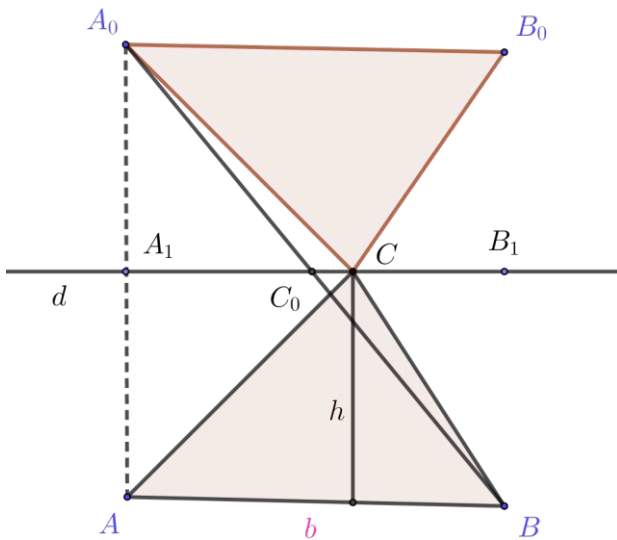


Figure 1 – Le chemin le plus court est le segment $[A_0B]$ (figure réalisée avec le logiciel *Geogebra*)

On cherche le point C_0 tel que ABC_0 soit de périmètre minimal. On place donc deux points A et B tels que $AB = b$ et une droite (d) parallèle à (AB) tels que les projetés orthogonaux A_1 et B_1 de A et B sur (d) soient tels que $AA_1 = BB_1 = h$. On a alors $C \in (d)$ (on restreint les solutions d'un seul côté de (AB) , l'autre étant le symétrique). Soit A_0 le symétrique de A par rapport à (d) ;

on a alors, par symétrie : $BC + CA = BC + CA_0$. D'après l'inégalité triangulaire, le chemin le plus court pour aller de B à A_0 est le segment $[A_0B]$ (voir Fig. 1 ci-contre), or ce segment passe par (d) en un point C_0 milieu du segment $[A_0B]$.

En effet, le triangle $A_0A_1C_0$ est semblable au triangle A_0AB car $(A_1B_1) \parallel (AB)$;

et avec $A_0A_1/A_0A = 1/2$, on a, d'après le théorème de Thalès,

$$A_0C_0/A_0B = A_0A_1/A_0A = 1/2.$$

On a donc $A_0C_0 = C_0B \Leftrightarrow AC_0 = C_0B$, qui est la configuration d'un triangle isocèle.

On en déduit que le triangle ABC de périmètre minimal pour une base AB fixée et une aire donnée est le triangle ABC isocèle en C .

Remarque Ce résultat ne nous permet pas de dire quel triangle a une aire maximale pour une base et un périmètre donnés, mais seulement qu'il existe un triangle de même aire mais de périmètre plus petit, si celui-ci n'est pas isocèle.

3.2 Un triangle d'aire maximale pour un périmètre et une base donnés

Proposition 2

Le triangle ABC de base AB et de périmètre P qui a la plus grande aire est le triangle ABC isocèle en C .

Soit un triangle ABC de périmètre P donné et de base AB de longueur b . On cherche un triangle tel que la hauteur issue de C soit la plus grande possible. On se place alors dans un repère orthonormal $(O; I; J)$ dans lequel les points A et B sont sur l'axe des abscisses, de coordonnées respectives $A(-b/2; 0)$ et $B(b/2; 0)$. On prend x et y pour coordonnées de C , on obtient (1)

$$P - b = AC + CB = \sqrt{(x + b/2)^2 + y^2} + \sqrt{(x - b/2)^2 + y^2}$$

On en déduit

$$(P - b) - \sqrt{(x - b/2)^2 + y^2} = \sqrt{(x + b/2)^2 + y^2}$$

En mettant l'expression au carré on obtient :

$$(P - b)^2 - 2(P - b)\sqrt{(x - b/2)^2 + y^2} + (x - b/2)^2 + y^2 = (x + b/2)^2 + y^2$$

Puis en développant et simplifiant :

$$\begin{aligned} (P - b)^2 - 2(P - b)\sqrt{(x - b/2)^2 + y^2} + x^2 - bx + b^2/4 &= x^2 + bx + b^2/4 \\ \Leftrightarrow (P - b)^2 - 2(P - b)\sqrt{(x - b/2)^2 + y^2} - bx &= bx \\ \Leftrightarrow (P - b)^2 2bx &= 2(P - b)\sqrt{(x - b/2)^2 + y^2} \end{aligned}$$

On divise par $2(P - b)$ car $P > b \Leftrightarrow P - b > 0 \Rightarrow 2(P - b) \neq 0$ et on a :

$$\frac{P - b}{2} - \frac{bx}{P - b} = \sqrt{(x - b/2)^2 + y^2}$$

On met alors l'expression au carré et on simplifie :

$$\begin{aligned} \frac{(P - b)^2}{4} - bx + \frac{b^2 x^2}{(P - b)^2} &= (x - b/2)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(P - b)^2}{4} - bx + \frac{b^2 x^2}{(P - b)^2} &= x^2 - bx + b^2/4 + y^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(P - b)^2}{4} + \frac{b^2 x^2}{(P - b)^2} &= x^2 + b^2/4 + y^2 \end{aligned}$$

On peut alors regrouper les termes comme ci-dessous :

$$x^2 \alpha + y^2 = \beta \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^{-1}\beta} + \frac{y^2}{\beta} = 1 \quad (1)$$

avec $1 > \alpha > 0$ et $\beta > 0$, qui est l'équation d'une ellipse (voir Fig. 2).

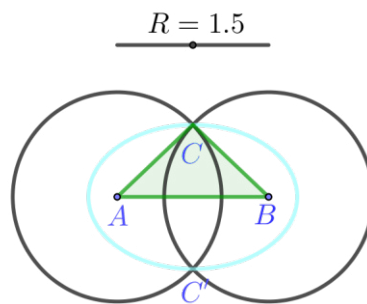


Figure 2 – Ellipse construite en fixant une base AB et un périmètre avec le logiciel *Geogebra*

L'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle de base b et de hauteur h est :

$$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$$

ici, la hauteur de notre triangle est $|y|$, donc :

$$\mathcal{A} = \frac{b \times |y|}{2}$$

On sait que $|y| = \sqrt{y^2}$, donc maximiser $\mathcal{A}$ pour b fixé c'est maximiser $|y|$, ce qui revient à maximiser $\sqrt{y^2}$, et donc à maximiser y^2 (2).

D'après (1), y^2 est maximal lorsque $x = 0$, c'est-à-dire lorsque le point C se trouve sur la médiatrice du segment $[AB]$, qui est la configuration d'un triangle isocèle en C .

On en déduit que pour un triangle ABC de base AB et de périmètre P , le triangle qui a la plus grande aire est le triangle ABC isocèle en C .

3.2 Un triangle isocèle d'aire maximale pour un périmètre

Comme pour un triangle ABC de base AB et de périmètre fixé, le triangle qui a la plus grande aire est le triangle ABC isocèle en C , nous allons désormais déterminer la longueur optimale de la base pour un triangle isocèle de périmètre fixé, puis nous démontrerons d'une autre façon ce résultat, par l'absurde.

Proposition 3

Le triangle ABC d'aire maximale pour un périmètre donné est le triangle équilatéral.

Solution analytique Soit un triangle ABC isocèle en C et de périmètre P fixé. On nomme b la longueur de la base AB du triangle et on calcule son aire en fonction de b sur $]0; P/2[$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(b) &= \frac{1}{2}b \times \sqrt{\left(\frac{P-b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}b \times \sqrt{\left(\frac{P}{4}\right)^2 - \frac{Pb}{2} + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}} \\ &= \frac{1}{2}b \times \sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2} - b\right)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{2}} b \times \sqrt{\frac{P}{2} - b}\end{aligned}$$

Maximiser l'aire revient à maximiser le carré de l'aire, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(b)^2 &= \frac{P}{8}b^2 \times \left(\frac{P}{2} - b\right) \\ &= \frac{P}{8} \times \left(\frac{P}{2}b^2 - b^3\right)\end{aligned}$$

On cherche alors les variations de $\mathcal{A}(b)^2$ sur $]0; P/2[$ (3) :

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}(b)^2)' &\geq 0; b \in]0; P/2[\\ \Leftrightarrow \frac{P}{8}(Pb - 3b^2) &\geq 0; b \in]0; P/2[\\ \Leftrightarrow \frac{P}{8}(Pb - 3b) &\geq 0; b \in]0; P/2[\\ \Leftrightarrow b &\in]0; P/3[\end{aligned}$$

La fonction $\mathcal{A}(b)^2$ est donc croissante sur $]0; P/3]$ et décroissante sur $[P/3; P/2[$, et il en est de même pour la fonction $\mathcal{A}(b)$ qui est strictement positive sur cet intervalle.

On en déduit que l'aire du triangle est maximale lorsque $b = P/3$, c'est-à-dire lorsque le triangle est équilatéral.

Démonstration par l'absurde Soit un triangle ABC non équilatéral de périmètre P qui a la plus grande aire possible pour ce périmètre.

Il existe alors dans ce triangle deux côtés adjacents a et b tels que $a \neq b$, or on peut construire un triangle isocèle tel que $a' = b'$ et $a' + b' = a + b$ de périmètre égal mais dont l'aire est plus grande (voir section précédente, proposition 2), ce qui contredit l'hypothèse de départ selon laquelle ce triangle a la plus grande aire possible pour ce périmètre fixé.

Le triangle ABC , pour avoir l'aire maximale, doit donc être équilatéral; or, il n'existe qu'une seule configuration de triangle équilatéral pour un périmètre donné ($AB = BC = AC = P/3$).

4 Conclusion

Le berger doit donc placer ses piquets de manière à créer un triangle équilatéral, de côté 100 m dans notre cas, afin que ses moutons aient un maximum d'herbe à brouter.

5 Élargissements

5.1 Un polygone à 4 côtés d'aire maximale pour un périmètre donné

Proposition 4

Le carré est le polygone à quatre côtés d'aire maximale pour un périmètre donné.

On peut montrer dans un premier temps par l'absurde que le quadrilatère d'aire maximale est un losange. Soit un quadrilatère convexe¹ qui n'est pas un losange et qui a l'aire maximale pour un certain périmètre donné. Il existe donc deux côtés a et b tels que $a \neq b$ (4), or on peut construire un autre quadrilatère tel que $a' = b'$ et $a' + b' = a + b$ dont l'aire est plus grande (voir partie triangle isocèle), ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle ce quadrilatère a une aire maximale.

Le quadrilatère d'aire maximale doit donc être un losange. Il existe plusieurs configurations de losanges, il faut déterminer celle qui donne l'aire maximale. L'aire d'un losange s'exprime de la forme suivante (avec α l'angle formé par l'un des côtés avec la base choisie) :

$$\mathcal{A} = b \times h = \frac{P}{4} \times h = \frac{P}{4} \times \frac{P}{4} \sin \alpha = \frac{P^2}{16} \times \sin \alpha$$

qui est maximale lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque l'angle α est droit. Un losange avec un angle droit est un carré, et il n'existe qu'une seule configuration de carré pour un périmètre donné, **c'est donc le carré qui a l'aire maximale.**

5.2 Un polygone à n côtés d'aire maximale pour un périmètre donné

On peut conjecturer que le polygone à n côtés d'aire maximale pour un périmètre donné est régulier, on se propose ici de démontrer uniquement le cas $n \in 2\mathbb{N}$.

Proposition 5

Le polygone à n côtés (n pair) d'aire maximale pour un périmètre donné est régulier.

¹ un polygone concave, en effet, a toujours un équivalent convexe de même périmètre mais dont l'aire est plus grande : une partie du polygone « tournée vers l'intérieur » réduit l'aire, alors qu'une partie « tournée vers l'extérieur » augmente l'aire

Soit un polygone convexe à n côtés dont tous ne sont pas égaux et qui a l'aire maximale pour un certain périmètre donné. Il existe donc deux côtés a et b tels que $a \neq b$ (4), or on peut construire un autre polygone tel que $a' = b'$ et $a + b = a' + b'$ dont l'aire est plus grande (voir partie triangle isocèle), ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle ce polygone a une aire maximale.

Le polygone d'aire maximale doit donc avoir tous ses côtés égaux. Il existe néanmoins plusieurs configurations de polygones à n côtés dont tous les côtés sont égaux, en particulier quand $n > 3$. Il faut donc déterminer lesquels ont une aire maximale.

Soit un polygone équilatéral convexe à n côtés, tel que $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, qui a l'aire maximale pour un certain périmètre donné mais qui n'est pas inscriptible dans un cercle. On coupe le polygone avec une diagonale $[A_1 A_p]$ en deux polygones de même périmètre (voir Fig. 3 page 276), et donc de même aire².

Soit A_i un sommet du polygone, différent de A et de A_1 , on a alors, avec $\alpha = \text{angle}(A_1 A_i A_p)$ l'aire du triangle : $\mathcal{A}_{A_1 A_i A_p} = \frac{1}{2} A_1 A_i \times A_i A_p \sin(\alpha)$ qui est maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (triangle rectangle). Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, alors il est possible de construire un autre demi-polygone $A_1 A_2 \dots A_p$ tel que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, sans modifier les valeurs de $A_1 A_i$ et de $A_i A_p$, mais seulement celle de $A_1 A_p$ de telle sorte que $A_1 A_i A_p$ ait une aire plus grande (5) ;

et comme les autres sections du demi-polygone ne sont pas modifiées (les sections $A_p \dots A_i A_i$ et $A_i A_{i-1} \dots A_1$ peuvent rester identiques comme les longueurs des deux segments restent les mêmes), on a alors une demi-aire plus grande, et le symétrique de ce demi-polygone peut être utilisé de l'autre côté, pour former une aire totale plus grande.

Lorsqu'un polygone ne possède pas tous ses sommets sur un même cercle, il est alors possible de construire un autre polygone plus grand avec la méthode que nous venons de voir. Un polygone d'aire maximale devrait donc avoir tous ses points sur un cercle de diamètre $[A_1 A_p]$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle ce polygone n'est pas inscriptible dans un cercle.

Le polygone d'aire maximale doit donc être inscriptible dans un cercle, en plus d'être équilatéral, or un tel polygone existe : c'est un polygone régulier.

Remarque. Nous n'avons démontré ce résultat que pour les polygones possédant un nombre pair de côtés, il reste donc le cas impair à résoudre.

5.3 L'inégalité isopérimétrique

On s'intéresse désormais au cas général d'une surface dans le plan.

Proposition 6

Le disque est la figure d'aire maximale pour un périmètre donné.

² s'ils n'ont pas la même aire, on peut utiliser le modèle de la partie la plus grande pour construire l'autre partie, et le polygone considéré n'a donc pas l'aire maximale

Soit un polygone régulier à n côtés, de périmètre P . L'apothème h de ce polygone, c'est-à-dire la distance entre le centre du polygone et chacun des côtés, est égal à³ : $h = \frac{b}{2} \times \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{n}\right)} = \frac{P}{2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

L'aire du polygone est la somme des aires de tous les triangles isocèles qui le composent :

$$\mathcal{A}_n = n \times \left(\frac{1}{2} \times b \times h \right) = n \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{P}{n} \times \frac{P}{2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right) = \frac{P^2}{4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

En étudiant les variations de l'aire en fonction du nombre de côtés, on doit pouvoir montrer que plus il y a de côtés à un polygone régulier, plus son aire à périmètre fixé est grande.

On a également, pour $\frac{\pi}{n} \in]0; \pi/2[$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) > \frac{\pi}{n} \Leftrightarrow 4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) > 4\pi$$

d'où

$$\frac{P^2}{4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} < \frac{P^2}{4\pi}$$

qui correspond finalement à l'aire du disque :

$$\mathcal{A}_{\text{disque}} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 = \frac{P^2}{4\pi}$$

Le disque est la figure qui maximise l'aire, car tous les points qui le délimitent doivent faire partie d'un même cercle pour donner une aire maximale (cf. section précédente). On a ainsi $\mathcal{A}_n$ qui est croissant et majoré, et qui converge vers $\frac{P^2}{4\pi}$ lorsque n tend vers l'infini.

On peut donc établir l'inégalité suivante, appelée inégalité isopérimétrique, qui établit pour toute surface de périmètre P et d'aire $\mathcal{A}$:

$$\frac{P^2}{4\pi} \geq \mathcal{A} \Leftrightarrow \frac{P^2}{4\pi\mathcal{A}} \geq 1 \Leftrightarrow P^2 - 4\pi\mathcal{A} \geq 0$$

³ on se place dans un triangle isocèle ayant pour base b un côté du polygone régulier et pour sommet le centre du cercle circonscrit au polygone

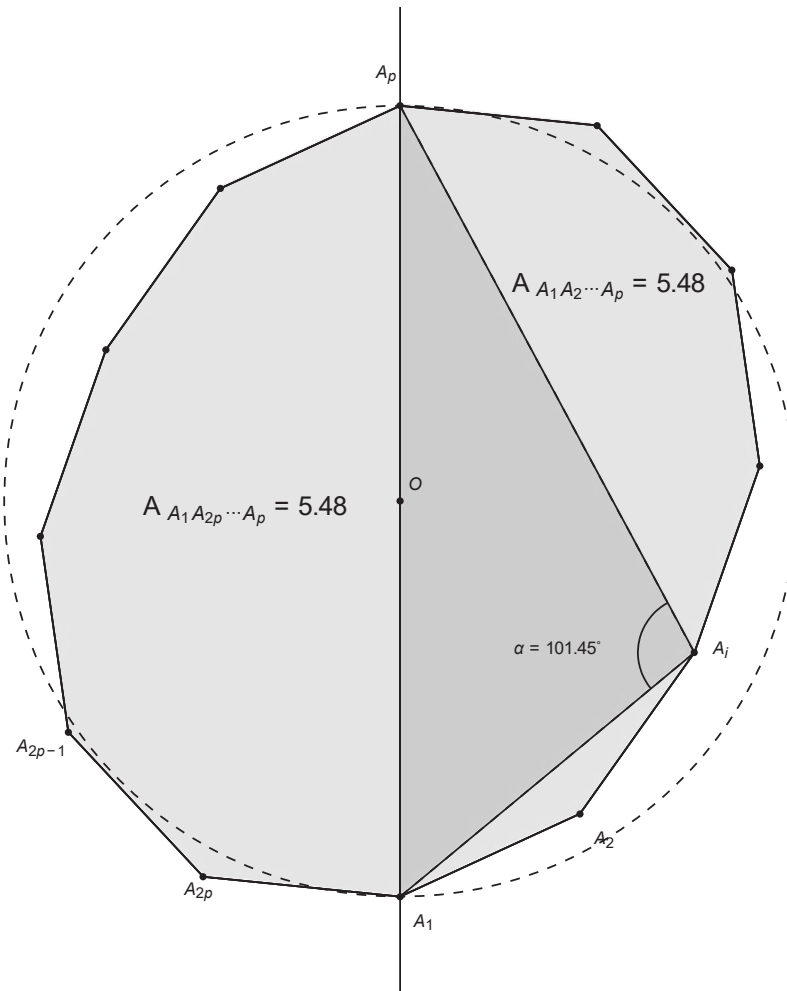


Figure 3 – Polygone équilatéral réalisé avec Geogebra

NOTES D'ÉDITION

- (1) Les auteurs cherchent ici à déterminer la position possible de C par rapport aux points A et B, c'est ce qu'on appelle un problème de lieu géométrique.
- (2) α et β valent ici respectivement $(1-b^2/(P-b)^2)$ et $((P-b)^2 b^2)/4$, qui sont fixés, donc maximiser y^2 revient à minimiser x^2 , donc à minimiser x .
- (3) Les variations de f sont trouvées par les auteurs en calculant le signe de sa dérivée, ici notée f' : quand la dérivée est positive, f est croissante, quand la dérivée est négative, f est décroissante.
- (4) a et b sont consécutifs, comme dans la démonstration par l'absurde de la proposition 3.
- (5) La construction des auteurs vise à placer le sommet A_i dans le cercle de diamètre $A_1 A_p$.

LOI DE NADIA 1

Pour les puissances de 8 :

8×8	se termine par 4
$8 \times 8 \times 8$	se termine par 2
$8 \times 8 \times 8 \times 8$	se termine par 6
$8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$	se termine par 8
$8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$	se termine par 4

et après, ça continue toujours pareil :

4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, 8, ...

Découpage de polygones de même aire

Année 2014-2015

Rahul Sinha, Valentin Schmit, Elwan Legall, Robin Didierlaurent, élèves de 5ème

Encadrés par : Mme Véronique Dupuits – M. Hervé Van Poucke

Etablissement : Collège Saint-Dominique, Nancy

Chercheur : M. Bruno Duchesne – IECL Nancy (Université de Lorraine)

Sujet : Si on a deux polygones de même aire, peut-on en découper un pour reformer l'autre ?

Cela est possible !

Voilà pourquoi.

Introduction

Pour prouver que nous pouvons toujours découper un polygone pour le superposer sur un autre de même aire, il nous faut d'abord le superposer sur un rectangle de 1cm de largeur (ou de largeur 1 mm ou encore moins pour les polygones ayant une aire inférieure à 1cm^2). Pour cela il faut d'abord suivre plusieurs étapes.

Étape 1 : Du polygone aux triangles

Pour découper un polygone convexe en triangles, il faut choisir un sommet et le relier aux autres sommets.

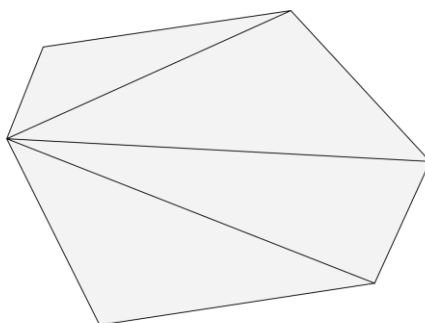


Figure 1. Polygone convexe

Par contre, pour un polygone non convexe, c'est à dire pour lequel un segment joignant deux sommets peut se trouver à l'extérieur du polygone, il faut d'abord le découper en polygones convexes pour appliquer ensuite la technique précédente à chaque polygone convexe obtenu.

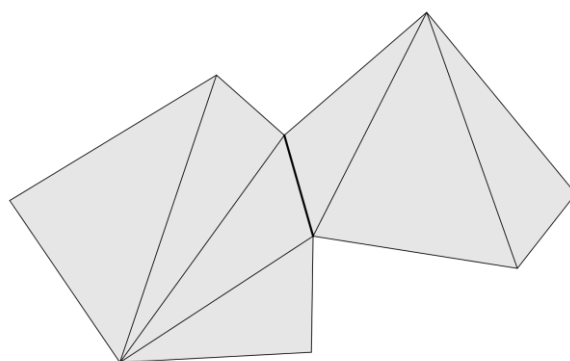


Figure 2. Polygone non convexe

Nous observons que **le nombre minimal de triangles que l'on peut découper dans un polygone à côtés est égal à $n - 2$.**

Dans un polygone convexe à n côtés : On choisit un sommet du polygone et on peut le relier par un segment à $n - 3$ sommets, ce qui nous donne $n - 2$ triangles.

Dans un polygone non convexe à n côtés :

On appelle y le nombre de segments tracés pour découper le polygone en polygones convexes. Le nombre total des côtés des polygones obtenus est $n + 2y$; il faut ajouter $2y$ car un segment tracé pour obtenir des polygones convexes est un côté commun à deux polygones.

Dans chaque polygone convexe obtenu, on choisit un sommet commun à deux polygones et on le relie à tous les autres sommets de ce polygone. On obtient ainsi : $n + 2y - 2(y + 1)$ triangles.

Nous développons :

$$T = n + 2y - 2(y + 1)$$

$$T = n + 2y - (2y + 2)$$

$$T = n - 2$$

On a prouvé que dans un polygone à n côtés, convexe ou non, on peut découper $n - 2$ triangles.

Etape 2 : du rectangle au triangle

À partir d'un triangle, on pourra toujours le découper pour obtenir un rectangle avec cette technique : il faut tracer une hauteur puis la médiatrice de celle-ci et utiliser une symétrie centrale des triangles rectangles obtenue par rapport aux points d'intersection de la médiatrice et des côtés du triangle.

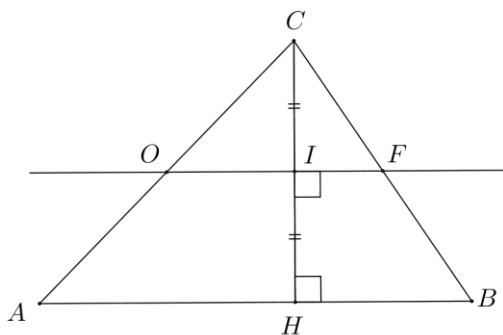


Figure 3

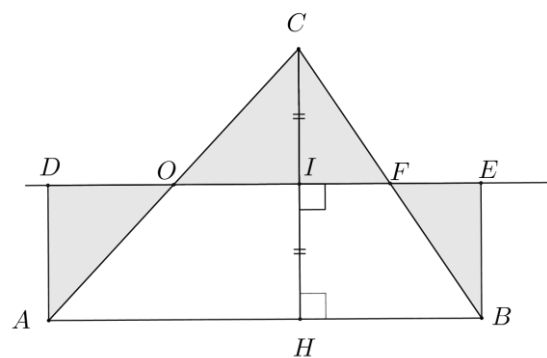


Figure 4

Pour cela nous devons prouver que la médiatrice coupe les côtés du triangle en leur milieu, c'est-à-dire que O est le milieu de AC et F est le milieu de BC .

Montrons que (OF) est parallèle à (AB) :

(CH) est la hauteur issue de C du triangle ABC donc (CH) est perpendiculaire à BC .

(OF) est la médiatrice de $[CH]$ donc (OF) est perpendiculaire à (CH) .

Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors ces deux droites sont parallèles. Donc (OF) et (AB) sont parallèles.

Or, si dans un triangle, une droite coupe un côté en son milieu et est parallèle à un deuxième côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Dans le triangle BCH , (OF) passe par le milieu de $[CH]$ et est parallèle à (BH) donc F est le milieu de $[BC]$. De même, dans le triangle ACH , O est le milieu de $[AC]$.

L'image du triangle FIC rectangle en I par la symétrie centrale de centre F est le triangle FEB rectangle en E . L'image du triangle CIO rectangle en I par la symétrie centrale de centre O est le triangle ADC rectangle en D .

Comme la symétrie centrale conserve les mesures, le triangle ABC et le rectangle $ADEB$ ont la même aire.

Etape 3 : D'un rectangle à un autre rectangle

Méthode : Pour transformer un rectangle en un autre rectangle de même aire, il faut reporter les mesures du rectangle final sur le rectangle de départ. Si le rectangle de départ a une largeur plus grande que le rectangle final, il faut reporter la largeur du rectangle final sur celui de départ et tracer une droite perpendiculaire à cette largeur passant par le point reporté. Placer ensuite le rectangle qu'il y a en trop sur la longueur du rectangle final. Si le rectangle de départ a la longueur la plus grande, alors faites les étapes inverses.

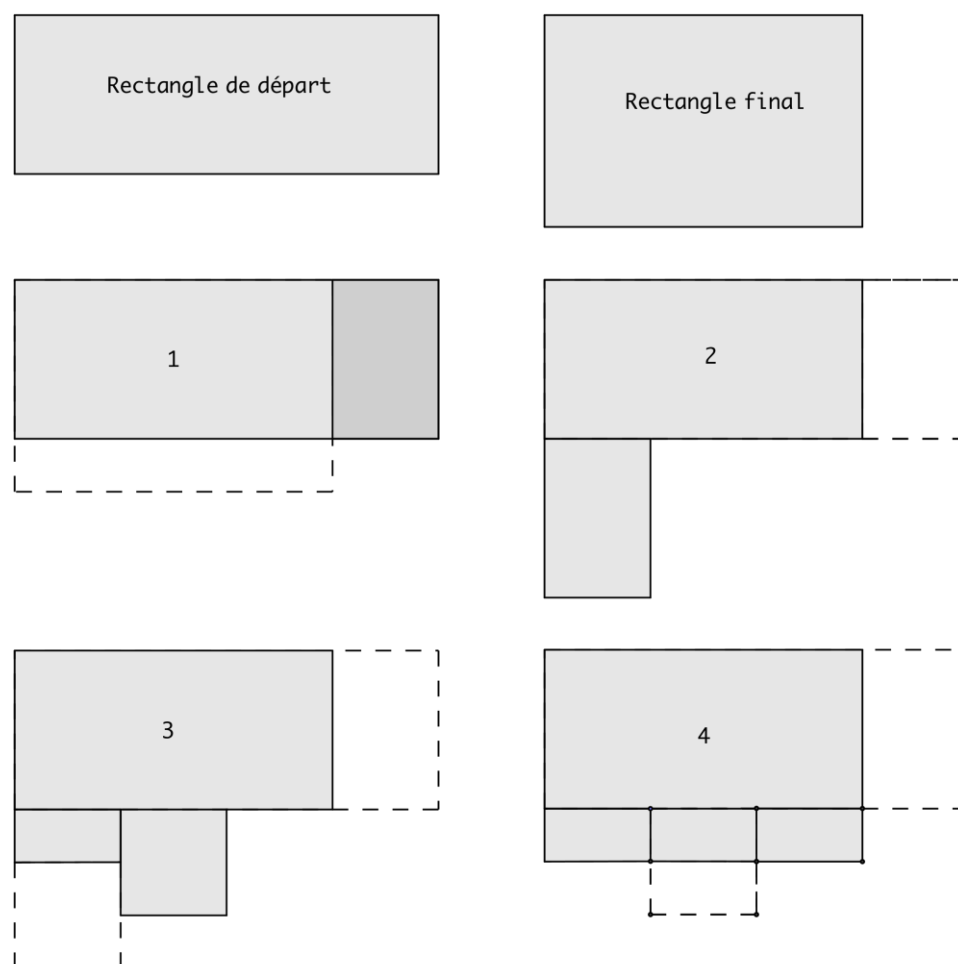


Figure 5

On recommence plusieurs fois pour obtenir un rectangle de 1cm de largeur.

Conclusion

N'importe quel polygone peut être découpé pour obtenir un rectangle de 1 cm de largeur. Pour cela il faut le découper en triangles, transformer chaque triangle en rectangle puis en rectangle de 1 cm de largeur et mettre les rectangles de 1 cm de largeur bout à bout.

Pour passer d'un polygone à l'autre il suffit de savoir découper chaque polygone en un rectangle de 1 cm de largeur (ils auront alors la même longueur) et de passer du premier polygone en un rectangle de 1 cm de largeur et d'appliquer la méthode inverse pour retrouver l'autre polygone.

Donc il est toujours possible de découper un polygone pour recouvrir un autre polygone de même aire.

Exemples de découpages

En général, nous n'avons pas besoin d'aller jusqu'au rectangle de 1 cm de largeur pour obtenir le polygone final, comme dans ces exemples.

Exemple 1 : De la flèche à l'hexagone

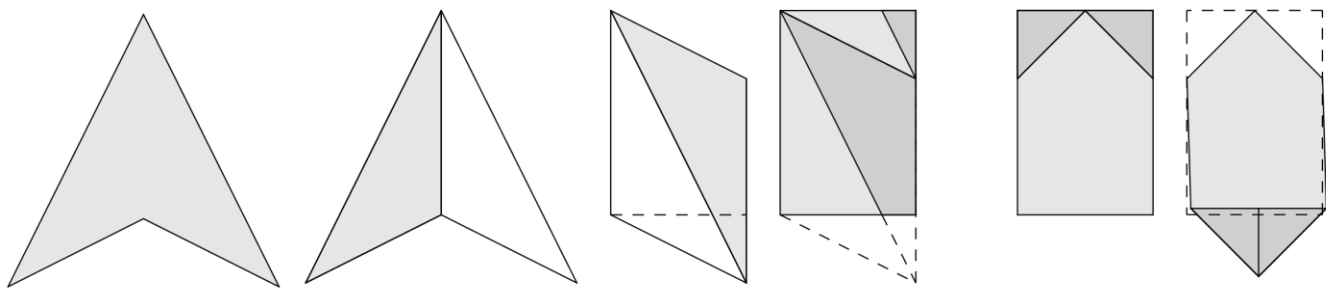


Figure 6

Exemple 2 : De deux carrés vers un carré

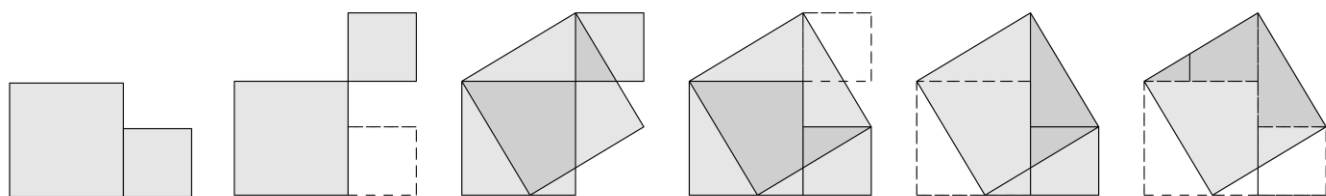


Figure 7

LOI DE JESSY 1

Avec une seule addition, il n'y a que 3 façons différentes de trouver 5 :

$1 + 4$ $2 + 3$ $5 + 0$

Avec une seule soustraction, il y a une infinité de solutions.

Les Robots reproducteurs

Année 2015-2016

Paulo Cisneros (1èreM), Rayna Fuleihan (1èreM), Camilla Ivesdal (1èreM), Zina Makki (1èreM), Thomas Moreau (1èreS), Robin Ollive (1èreS), Fabien Portas-Pittet (1èreS)

Encadrés par : Sabrina Biglione, Murièle Jacquier, Gilles Lamboley

Établissements : Institut Florimont, Petit-Lancy (Suisse) et Lycée de la Versoie, Thonon-les-Bains (France)

Chercheurs : Mounir Benheddi (Université de Genève), Catriona MacLean (Université de Grenoble)

Présentation du sujet

On place des robots (représentés par des cases vertes) sur une grille de taille infinie, les cases vides (sans robot), elles, sont blanches. Ces robots évoluent, c'est-à-dire naissent (apparaissent), meurent (disparaissent) ou survivent (restent inchangés), tour après tour, selon des règles définies avant de commencer, et immuables d'un tour à l'autre. Ces évolutions dépendent du nombre de voisins vivants que comporte une case, compris entre 0 et 8, les diagonales étant comptées.

Règles :

1. Si une case vide a 3 robots voisins, un robot naît sur cette case.

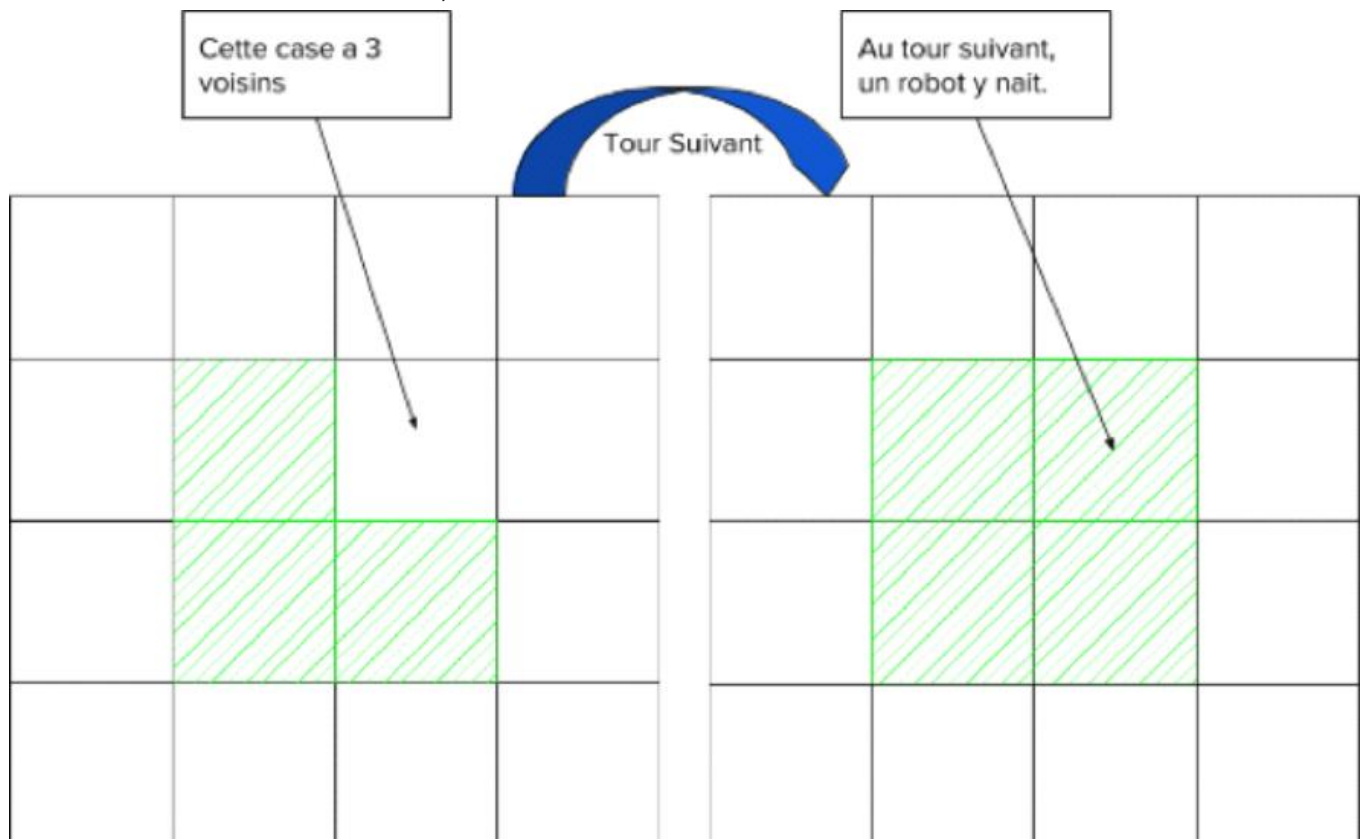


Figure n°1 : Règle 1

2. En revanche, si un robot a moins de 2 robots voisins, il meurt et la case devient donc vide (elle devient blanche).

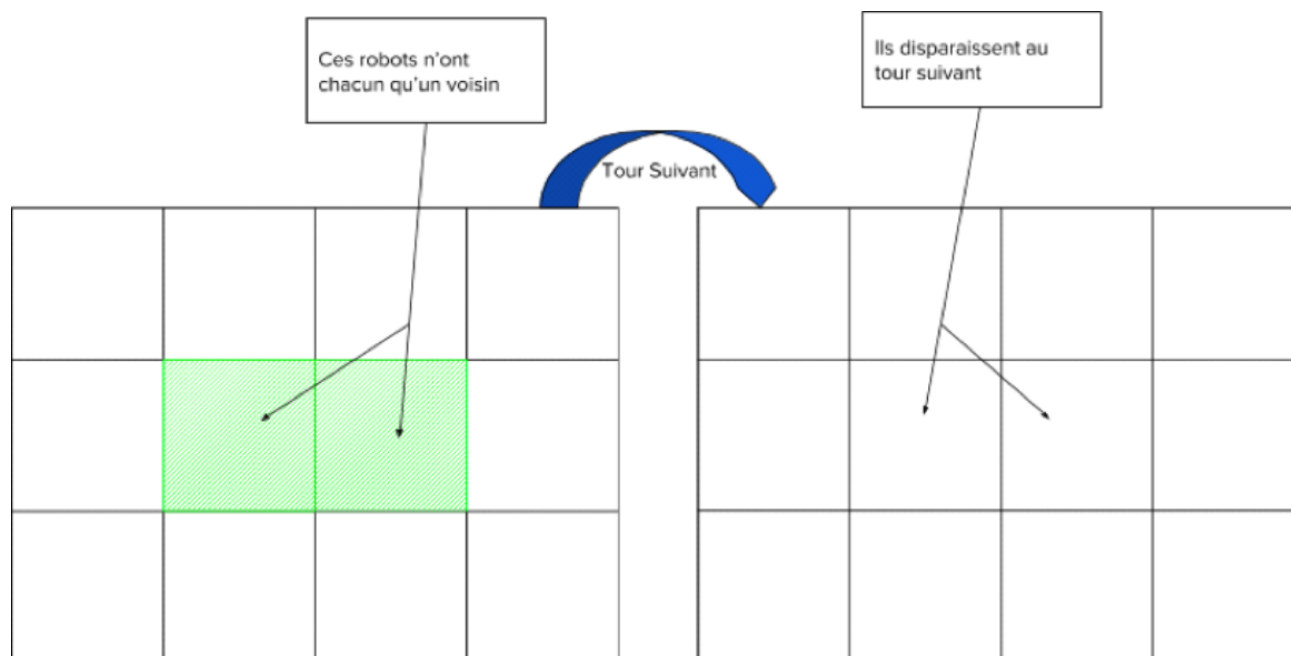


Figure n° 2 : Règle 2

3. De plus, si un robot a 4 robots voisins ou plus, il meurt également, comme par surpopulation.

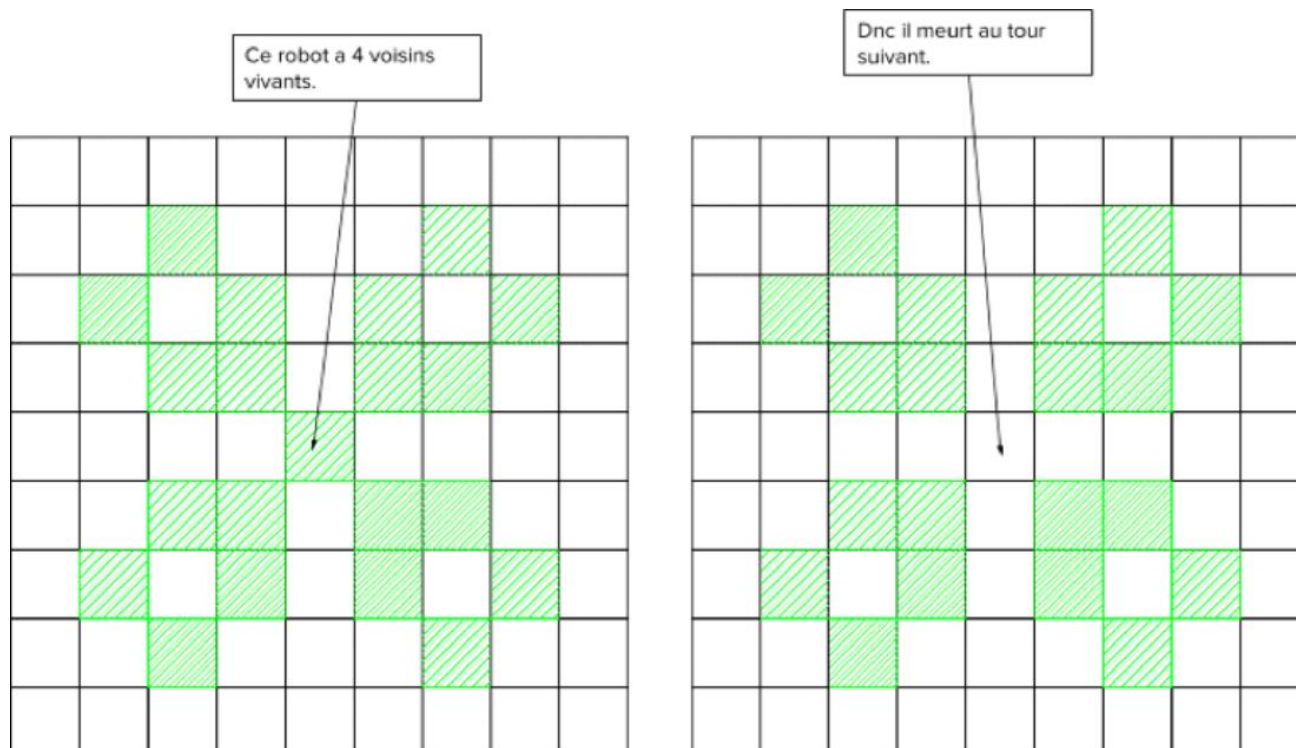
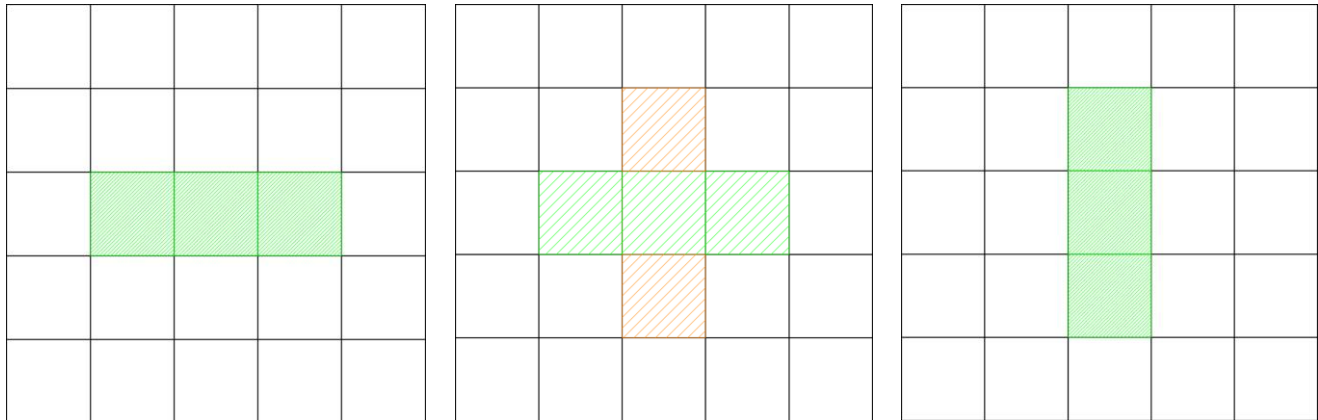


Figure n°3 : Règle 3

4. Dans les autres cas, la case reste la même qu'au tour précédent.



Attention : Les changements d'état d'un tour n'affectent pas les autres du même tour. On prend une "photo" de la grille au début du tour et on effectue les changements selon celle-ci.

Figure n° 4 : Les nouvelles modifications auront une influence seulement au tour suivant.

Définitions

Structure : ensemble de robots pouvant interagir entre eux, c'est-à-dire séparés de moins de deux cases.

Forme : arrangement de robots sur la grille. Peut être constituée de plusieurs structures.

Robot : synonyme de case vivante, représenté en vert.

Conjectures et résultats obtenus

A partir de ces règles, nous nous sommes fixés plusieurs objectifs :

- Trouver et répertorier des formes qui ont des comportements particuliers.
- Analyser le comportement des formes de taille importante.
- Trouver s'il existe une limite quant à la taille des formes stables.
- Modifier les règles de base, et observer le comportement des formes au comportement particulier avec ces nouvelles règles.

1) Démarche

Au cours des premières séances, nous avons d'abord recherché des formes à la main, par tâtonnement, en simulant sur du papier millimétré chaque tour.

Cette méthode créait beaucoup d'erreurs, et d'oublis, et était particulièrement fastidieuse.

Pour simplifier la recherche, nous avons créé un programme qui simulait les évolutions des robots de façon rapide et précise.

Des ajouts nous ont facilité la tâche, comme une option permettant l'affichage du nombre de voisins de chaque case, une avance rapide des tours et un menu permettant de changer les règles de base.

La version finale du programme est disponible à l'adresse suivante : <http://bit.ly/robotsreprod> (nécessite Java).

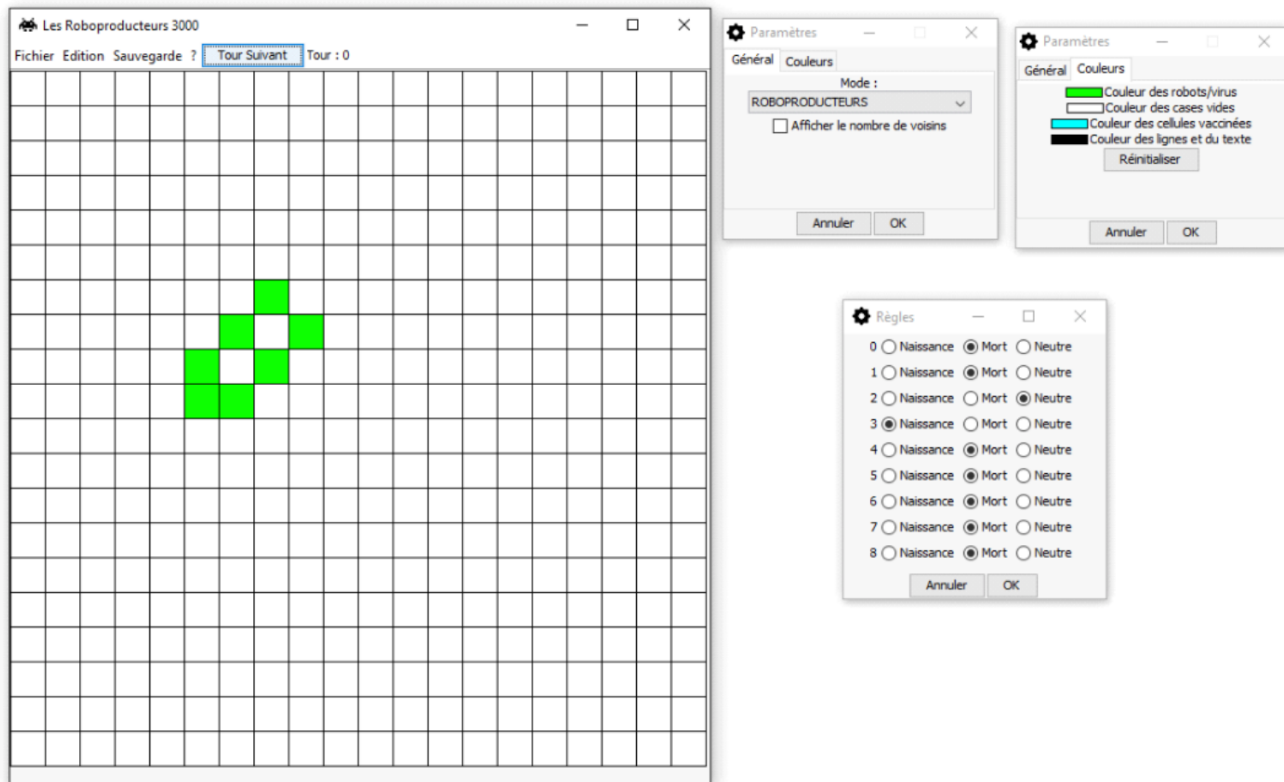


Figure n°5 : Programme de simulation

2) Objectif 1 : Répertoire des formes avec des comportements particuliers

Nous avons, tout d'abord, défini et classé ces comportements particuliers en trois catégories :

- les formes stables
- les formes oscillantes
- les formes mobiles

a) les formes stables

Elles restent figées, ne changent pas d'un tour à l'autre.

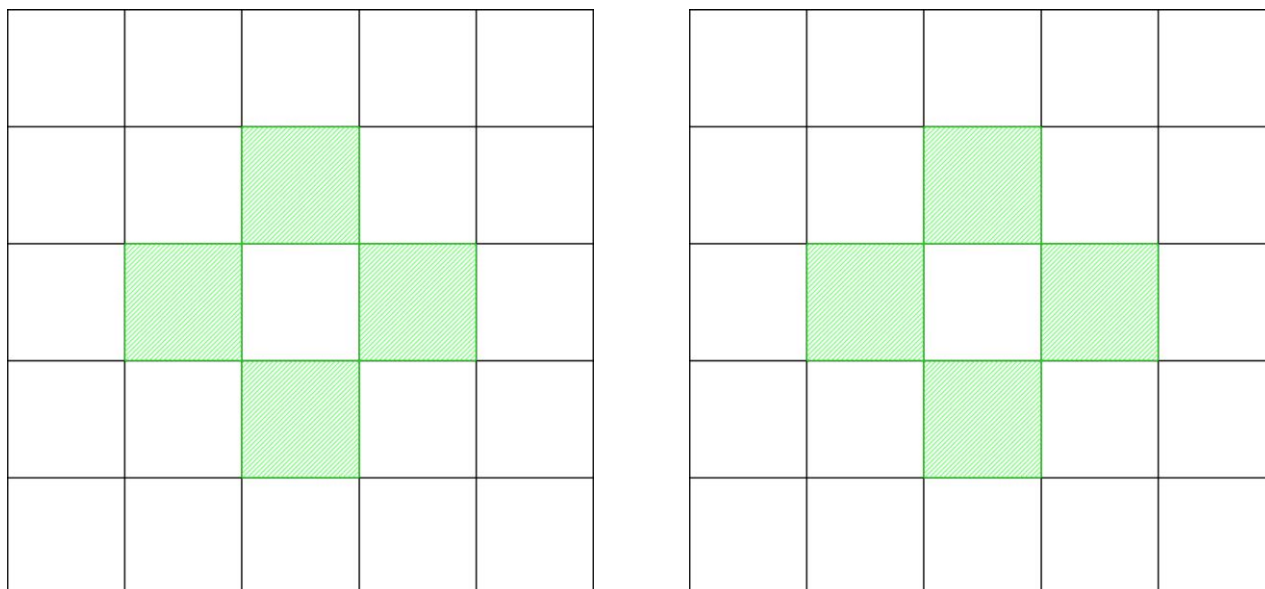


Figure n°6 : exemple de forme stable

Pour être stable, chaque case de la forme doit respecter les règles suivantes, v étant le nombre de robots voisins d'une case :

- Pour une case vide : $v \neq 3$
- Pour une case avec robot : $v \in \{2,3\}$

Au début, il nous a semblé que toute forme stable était symétrique selon un point, mais un contre-exemple a très vite prouvé que cela était faux :

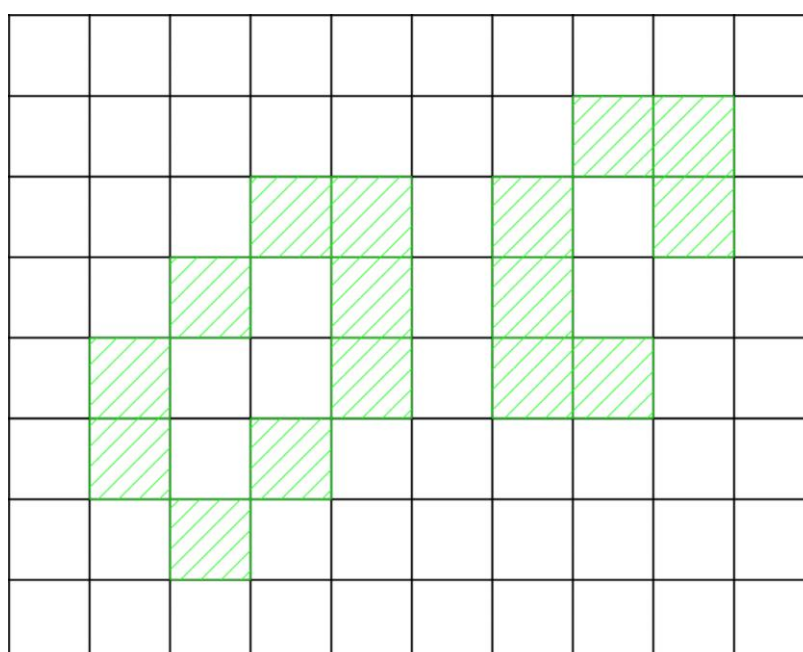


Figure n°7 : Exemple de forme stable sans symétrie centrale

b) Les formes oscillantes

Elles clignotent, on retrouve la même forme après un certain nombre de tours.

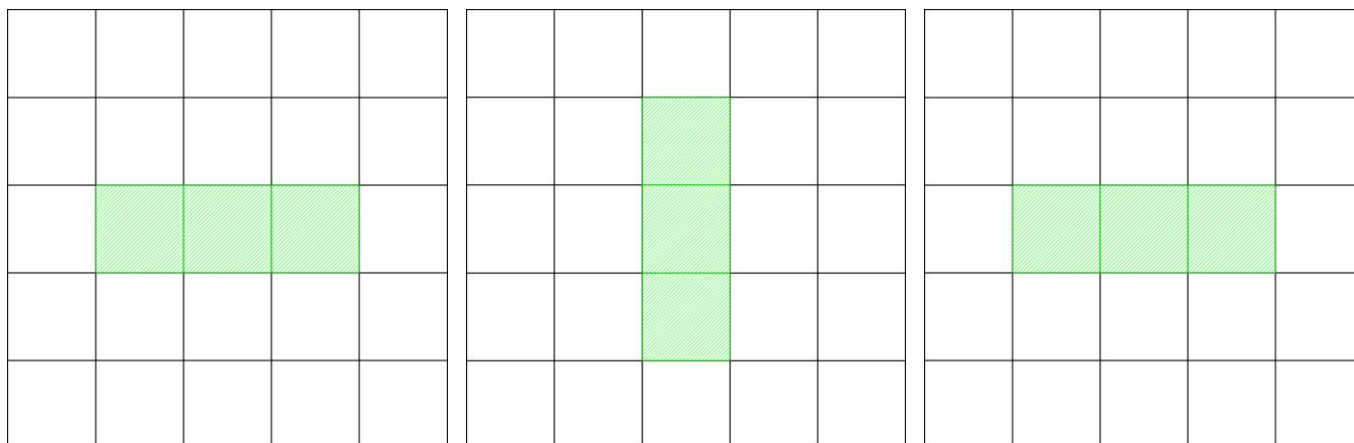


Figure n°8 : Exemple de forme oscillante de période 2

On appelle le nombre de tours nécessaires pour revenir à la forme originale, la période de la forme oscillante.

On peut créer une forme oscillante de période donnée, en “assemblant” différentes formes oscillantes (on les place côte à côte) : la période de la forme composée est alors obtenue par la multiplication des périodes des 2 formes initiales.

Exemple : On veut une forme oscillant en six tours ; on connaît une forme avec une période de trois tours, et de deux tours.

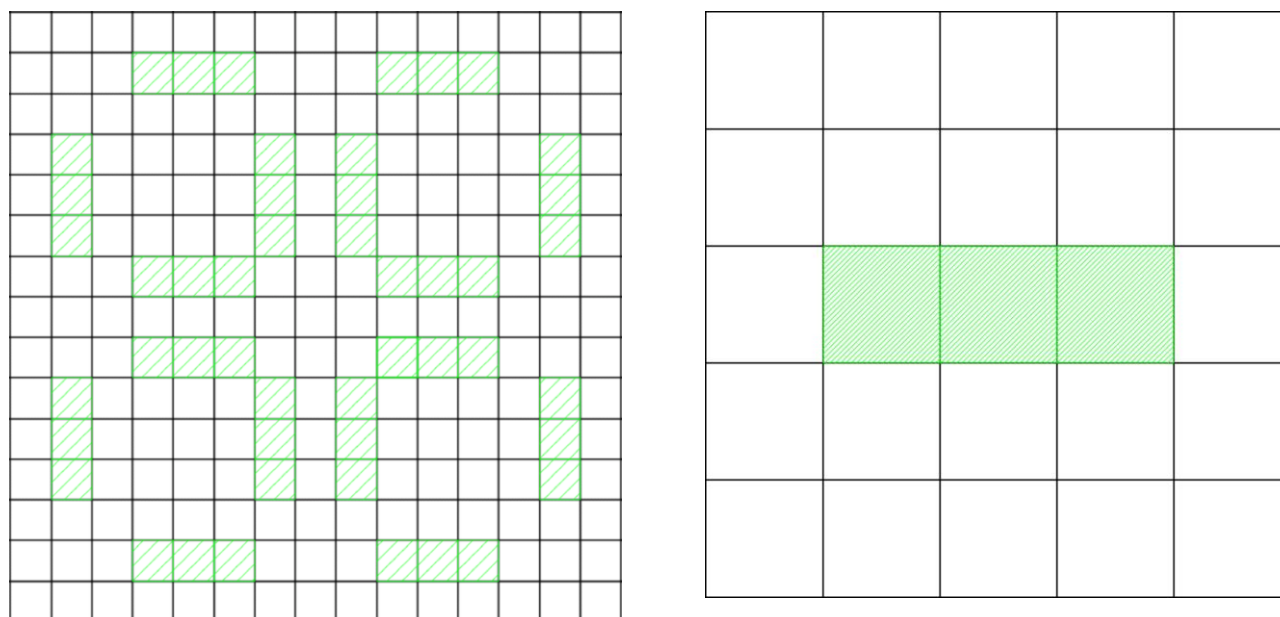


Figure n°9 : à gauche, forme oscillante de période 3 - à droite, forme oscillante de période 2

On peut donc créer la forme suivante (figure 10), pour avoir une forme oscillant en six tours :

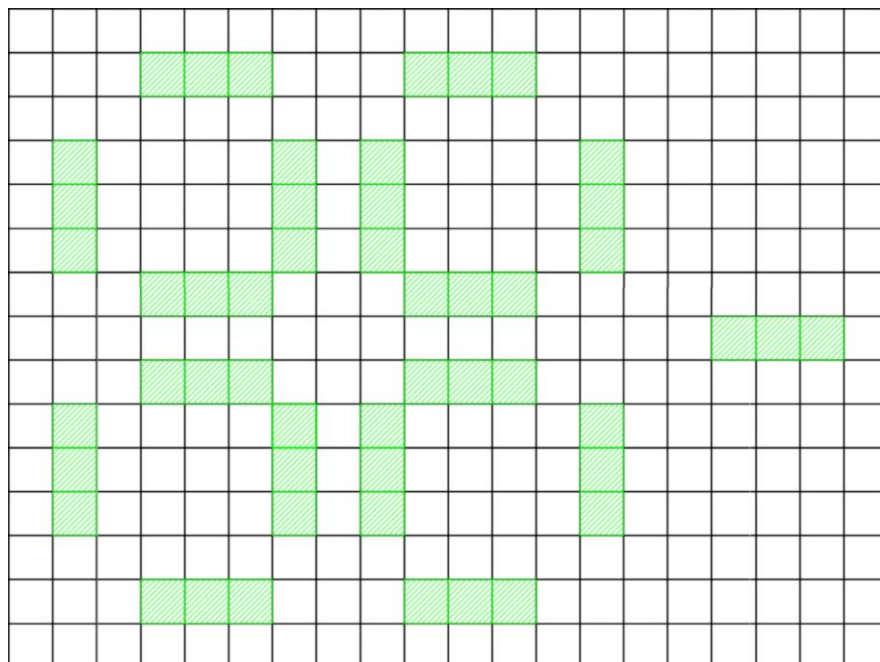


Figure n°10 : Exemple de forme oscillante de période 6

Cependant, quelques exceptions s'appliquent à cette méthode :

- La période désirée ne peut pas être un nombre premier
- Les formes mises côte à côte doivent avoir des périodes différentes (1)

c) Les formes mobiles

Elles se déplacent, on retrouve la même configuration de robots après un certain nombre de tours, mais déplacés dans une direction.

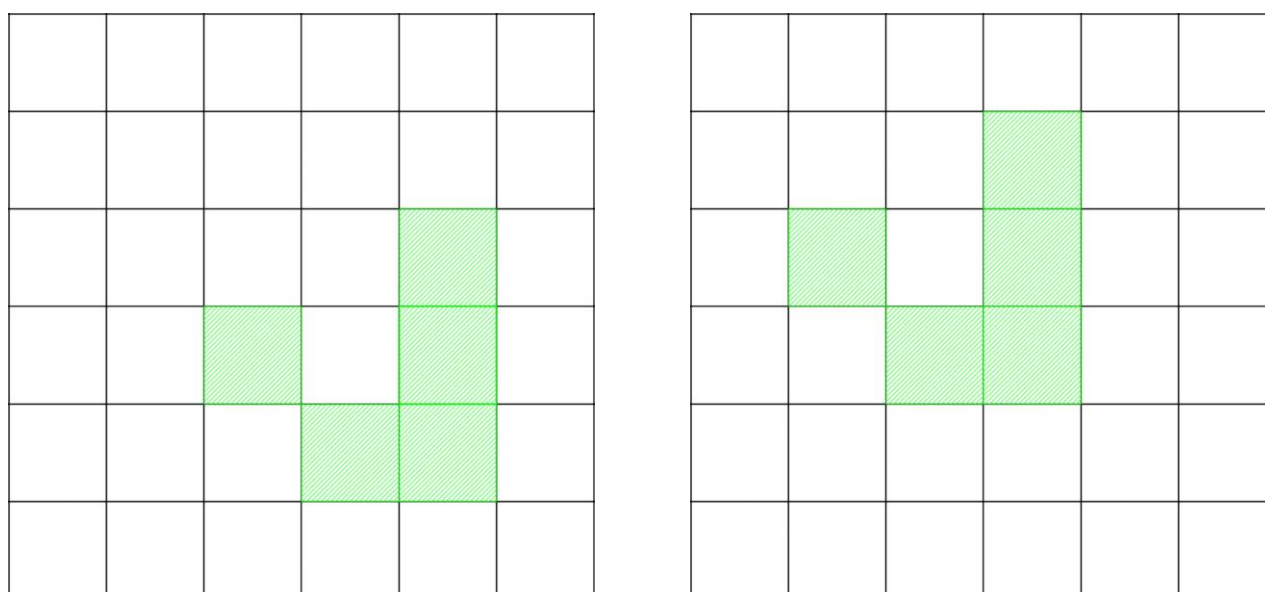


Figure n°11 : Exemple de formes mobiles

Ce comportement particulier est le plus complexe et semble être le plus rare, en conséquence, nous n'en avons trouvé qu'un exemple.

3) Objectif 2 : Analyser le comportement de formes de taille importante

On définit une forme de taille importante comme une forme ne pouvant pas rentrer dans un carré d'environ 5×5 .

Pour ce type de forme, il existe deux possibilités après qu'elles aient fini d'évoluer :

- soit elles disparaissent complètement.
- soit elles se décomposent en plusieurs petites formes élémentaires stables, oscillantes, ou même mobiles.

4) Objectif 3 : Trouver s'il existe une limite quant à la taille des formes stables

Pour trouver la limite de taille des formes stables, des tests de modification (agrandissement tout en gardant les conditions pour que la forme reste stable) sur les formes stables que nous avons déjà trouvées ont été effectués.

Nous avons remarqué, en partant d'une forme stable simple comme celle ci-dessous (figure n°12), que si nous la répétons dans une seule direction, il est alors possible de créer une forme stable de taille potentiellement infinie.

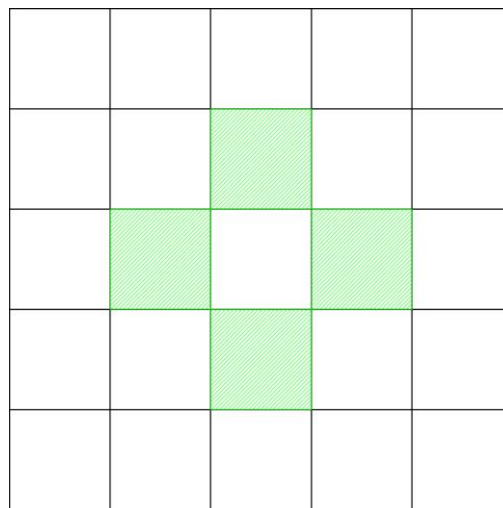


Figure n° 12 : Exemple de forme stable simple

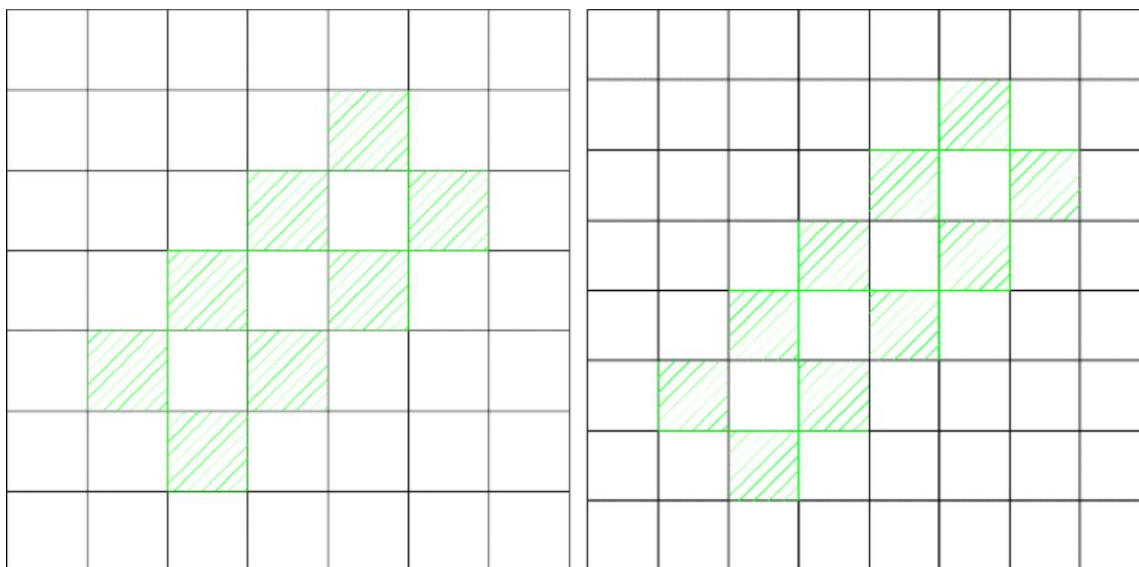


Figure n°13 : Exemples de formes stables de grandes tailles obtenues par répétition de la forme stable simple de la figure n°12.

5) Objectif 4 : Modifier les règles de base, et observer des formes au comportement particulier avec ces nouvelles règles

Représentation des règles :

Les règles seront représentées par un tableau, qui assignera à un nombre de robots voisins, un effet sur la case. Les effets sont les suivants :

- **Mort** : Si la case contient un robot, le robot meurt, sinon, la case reste vide.
- **Neutre** : L'état de la case ne change pas.
- **Naissance** : Un robot naît sur cette case.

Voici, par exemple, la représentation en tableau des règles de base :

Nombre de voisins	Effet
0	Mort
1	Mort
2	Neutre
3	Naissance
4	Mort
5	Mort
6	Mort
7	Mort
8	Mort

Règle stable :

On remarque que plus l'on diminue le nombre de robots vivants nécessaire pour qu'une cellule vivante le reste, plus le nombre de formes stables possible va augmenter, et des formes croissant à l'infini apparaîtront. Ainsi, plus le nombre de voisins est proche de zéro, plus le caractère sera fort. Par exemple si on le met à 0, 1, 2 et 3 il y aura plus de formes stables que si on le met à 6, 7, 8, 9.

Exemple :

Nombre de voisins	Effet
0	Mort
1	Neutre
2	Neutre
3	Neutre
4	Neutre
5	Mort
6	Mort
7	Mort
8	Naissance

Règle éphémère :

On remarque que plus l’on diminue le nombre de robots vivants nécessaire pour qu’une cellule vivante meure, plus le nombre de formes stables possible va diminuer, et les formes auront alors une durée de vie très faible, d’où le nom.

Nombre de voisins	Effet
0	Mort
1	Mort
2	Mort
3	Mort
4	Mort
5	Mort
6	Mort
7	Neutre
8	Naissance

Conclusion

Suite au Congrès, une nouvelle technique pour créer des formes stables infiniment grandes nous a été proposée, elle consiste à créer des ponts entre des formes, en suivant des conditions très strictes, respectant les conditions de stabilité (figure 14). Les recherches sur cet élément n’ont pas pu être très poussées et il serait intéressant de le faire.

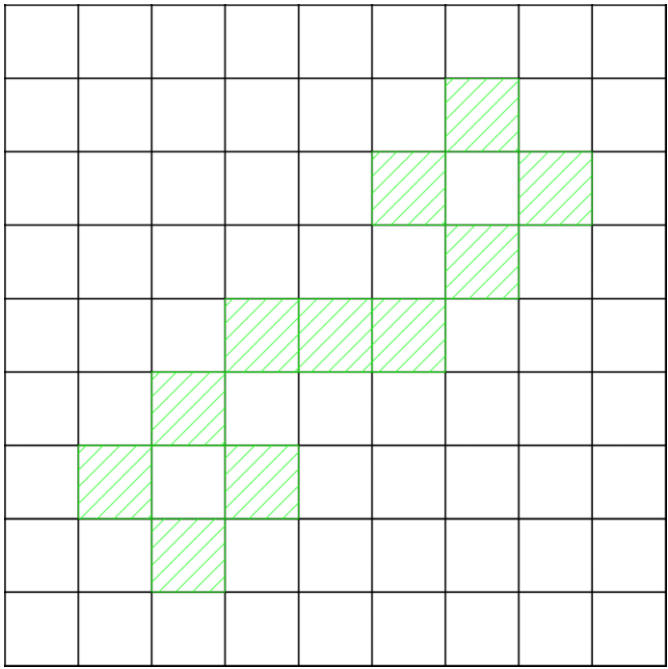


Figure n°14 : Exemple de forme stable de grande taille obtenue avec un pont

D'autre part, nous constatons que nos règles de base sont un parfait équilibre entre une règle stable et éphémère, elle permet l'existence de plusieurs types de formes sans pour autant avoir de formes qui croissent à l’infini.

Lien de la base de formes intéressantes : <https://drive.google.com/open?id=0B2jG2gob9sIPTFhTdW1ic28zZEU>
(les fichiers .rbp peuvent être ouverts dans le programme.)

NOTES D'ÉDITION

(1) Le lecteur très attentif aura remarqué qu'en assemblant deux structures de périodes x et y , on obtient une forme de période $\text{ppcm}(x,y)$, le plus petit commun multiple de x et y .

LOI DE JAMAL 1

Pour qu'une addition ou une soustraction ne changent pas le résultat, il faut que l'on utilise 0.

Si n est n'importe quel nombre, $n + 0 = n$

$N - 0 = N$

Du café ou du chocolat ?

Année 2015-2016

Clara Wu, élève de 6ème, Aleya Borocku, Lyla Demange, Juliette Robert, Zoé Schwann, élèves de 5ème

Encadrées par : Louissette Hiriart et Ziya Findik

Etablissement : Collège George Chepfer, Villers-lès-Nancy

Chercheuse : Irène Marcovici, Institut Elie Cartan, Université de Lorraine

Présentation du sujet

1°) Tous les matins, au petit déjeuner, nous avons le choix entre du **café** et du **chocolat**.

Pour rompre toute monotonie, on se demande s'il est possible de faire ce choix sans que jamais dans une suite de « café-chocolat-etc. », une même séquence ne se répète **trois fois de suite** côte à côte ?

Sur une semaine, le choix est facile ! Par exemple la suite « café-chocolat-chocolat-café-chocolat-café-café » convient.

Mais peut-on trouver une suite de « café-chocolat-etc. » qui convienne jusqu'à la fin de nos jours ? Et pour un nombre infini de jours, est-ce encore possible ?

2°) Et si on rajoute du **thé** ?

Est-il possible de faire un choix sans que jamais la même séquence ne se répète **deux fois de suite** côte à côte ?

Sommaire

1°) Etude de mots : alphabet, carré, cube.

2°) Mots dont l'alphabet ne contient que deux symboles : 0 et 1.

- a) **Mots sans carré.**
- b) **Mot de longueur infinie sans cube.**
- c) **Illustration géométrique à l'aide de GeoTortue.**
- d) **Réponse à la première question du problème.**

3°) Mots dont l'alphabet ne contient que trois symboles : 0, 1 et 2.

- a) **Mots sans carré.**
- b) **Mot de longueur infinie sans carré.**
- c) **Réponse à la deuxième question du problème.**

Résultats

Nous avons trouvé une suite de « café-chocolat-etc. » qui convienne jusqu'à la fin de nos jours, et même pour un nombre infini de jours, **sans aucune répétition d'une séquence trois fois de suite** côte à côte. Et de même, nous avons trouvé une suite de « café-chocolat-thé-etc. » qui convienne jusqu'à la fin de nos jours, et même pour un nombre infini de jours, **sans aucune répétition d'une séquence deux fois de suite** côte à côte.

1°) Étude de mots

- Ils sont construits avec des alphabets de différents symboles dont le nombre est limité.

Exemple : notre alphabet est constitué de 26 symboles : les 26 lettres a, b, c, d, ..., x, y, z.

- On veut éviter les répétitions côte à côte.

Par exemple avec notre alphabet de 26 lettres :

- le mot roudoudou contient la répétition côte à côte de dou, on dira qu'il contient **un carré**.
- le mot cocorico contient la répétition côte à côte de co, il possède un seul carré, même si co est présent 3 fois.
- le mot abracadabra ne contient aucun carré.
- le mot tralalalalère contient 3 fois de suite la côte à côte, on dira qu'il contient **un cube**.

Pour résoudre notre problème, on va étudier des mots écrits avec un alphabet ne contenant que deux symboles : les chiffres 0 et 1, puis trois symboles : les chiffres 0, 1 et 2.

2°) Mots donc l'alphabet ne contient que les deux chiffres 0 et 1

a) Mots sans carré

Avec deux chiffres seulement, il est difficile de ne pas avoir de répétition de séquence côte à côte deux fois de suite, c'est-à-dire de ne pas avoir de carré.

0 - 1 - 01 - 10 - 010 - 101 sont les seuls mots sans carré, ils n'ont pas plus de 3 chiffres.

Avec 4 chiffres ou plus, il ne peut pas y avoir de mot sans carré :

On prend les deux mots de 3 chiffres sans carré 010 et 101 et on rajoute un chiffre 0 ou 1.

- si le mot commence par 010, soit on écrit 0 ensuite, on obtient le mot 0100 et donc le carré 00.
soit on écrit 1 ensuite, on obtient le mot 0101 et donc le carré de 01.
- si le mot commence par 101, soit on écrit 0 ensuite, on obtient le mot 1010 et donc le carré de 10.
soit on écrit 1 ensuite, on obtient le mot 1011 et donc le carré 11.

Ainsi pour notre problème, si 0 représente le choix d'un café et 1 celui d'un chocolat, pour le petit déjeuner, il y aura donc au plus tard le 4ème jour une même séquence de « chocolat-café-etc. » qui se répètera deux fois de suite.

Les quatre séquences ci-dessous contiennent toutes une répétition côte à côte deux fois de suite.

« Café – Chocolat – Café – Café », « Café – Chocolat – Café – Chocolat »,
« Chocolat – Café – Chocolat – Café », « Chocolat – Café – Chocolat – Chocolat »

Comme il n'existe pas de mot de longueur supérieure ou égale à 4 sans carré, nous cherchons des mots de plus de 4 chiffres 0 ou 1 sans cube.

b) Mot de longueur infinie sans cube

0101001100101101001101001010011010010110 est par exemple un mot de 40 chiffres sans cube et cela devient difficile de l'allonger en étant sûr qu'il n'y a pas de cube.

(On verra plus loin comment on s'est assuré que ce mot ne contient pas de cube.)

Notre chercheuse nous a alors donné un mot constitué de 0 et 1 et de longueur aussi longue que l'on veut. Nous devons démontrer qu'il ne possède aucun cube pour résoudre notre problème.

Ce mot se construit par substitution, en remplaçant 0 par 01 et 1 par 10.

On démarre de 0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									</
-----------------	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

mot de longueur 2
mot de longueur 4 = 2^2
mot de longueur 8 = 2^3
mot de longueur 16 = 2^4
mot de longueur 32 = 2^5

et on continue ainsi de suite indéfiniment.

Remarques :

- Si on démarre par 1 c'est pareil, sauf que les 1 et 0 sont inversés.
- A chaque nouveau rang, la longueur du mot double puisque chaque chiffre 0 ou 1 est remplacé par deux chiffres 01 ou 10.
- On a remarqué que chaque mot est obtenu en prenant le mot de rang précédent et en lui accolant son « inverse » (même mot dont les 1 sont remplacés par des 0 et les 0 par des 1). Cela nous a aidés à construire plus facilement des mots de plus en plus longs.

Propriétés :

Par définition de la formation des mots :

- Nos mots ne sont constitués que par des séquences 01 et 10.
- Dans un mot d'un certain rang, en ne gardant que les chiffres en position paire on obtient le mot de rang précédent.

En effet par exemple, dans le mot de rang 5, en ne prenant que les chiffres en position paire (en orange), on obtient le mot précédent de rang 4.

rang 5	0110100110010110 1001011001101001 0
rang 4	0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0

On va démontrer que le mot de longueur infinie ainsi formé ne contient aucun cube.

Démonstration :

► Ce mot ne peut contenir 000 ou 111

- Supposons qu'il contienne 000, alors le premier 0 est en position paire ou impaire.
→ S'il est en position paire, on a le découpage ---- / 00 / 0_ / ----
→ S'il est en position impaire, on a le découpage ---- / _0 / 00 / ----
or c'est impossible d'avoir une séquence / 00 / puisque nos mots ne sont constitués que des séquences 01 ou 10.
Donc **ce mot ne contient pas 000**.

- Supposons qu'il contienne 111, alors le premier 1 est en position paire ou impaire.
→ S'il est en position paire, on a le découpage ---- / 11 / 1_ / ----
→ S'il est en position impaire, on a le découpage ---- / _1 / 11 / ----
or c'est impossible d'avoir une séquence / 11 / puisque nos mots ne sont constitués que des séquences 01 ou 10.
Donc **ce mot ne contient pas 111**

► Ce mot ne peut contenir 010101 ou 101010

- Supposons qu'il contienne 010101, alors le premier 0 est en position paire ou impaire.
→ S'il est en position paire, on a le découpage ---- / 01 / 01 / 01 / ----
Le mot de rang précédent est alors formé des chiffres en position paire, il contient donc 000
Or, on a vu que c'est impossible.
- S'il est en position impaire, on a le découpage ---- / _0 / 10 / 10 / 1_ / ----
Le mot de rang précédent, formé des chiffres en position paire, contient 111
Or, on a vu que c'est impossible

Donc ce mot ne contient pas 010101.

▪ Supposons qu'il contienne 101010, alors le premier 1 est en position paire ou impaire.

→ S'il est en position paire, on a le découpage ---- / 10 / 10 / 10 / ----

Le mot de rang précédent est alors formé des chiffres en position paire, il contient donc 1 1 1

Or, on a vu que c'est impossible.

→ S'il est en position impaire, on a le découpage ---- / _ 1 / 01 / 01 / 0 _ / ----

Le mot de rang précédent, formé des chiffres en position paire, contient 0 0 0

Or, on a vu que c'est impossible

Donc ce mot ne contient pas 101010.

► Ce mot ne peut contenir 0a0a0 ou 1a1a1 où a est une même suite de 0 et 1

La séquence a peut être de longueur paire ou de longueur impaire

▪ Supposons qu'il contienne 0a0a0 avec a de longueur paire.

▪ Si a est de longueur 2, on a selon que le premier 0 est en position paire ou impaire, les découpages suivants :

--- / 0 _ / _ 0 / _ _ / 0 _ / --- ou --- _ 0 / _ _ / 0 _ / _ 0 / ---

On complète les séquences de 01 ou 10 incomplètes, on obtient :

--- / 0 1 / 1 0 / _ _ / 0 _ / --- ou --- _ 0 / _ _ / 0 1 / 1 0 / ---

Entre deux 0 du départ, la suite a est 11. On la reporte à droite ou à gauche, on obtient :

--- / 0 1 / 1 0 / 1 1 / 0 _ / --- ou --- _ 0 / 1 1 / 0 1 / 1 0 / ---

Or, il est impossible d'avoir une séquence /11 / dans nos mots.

▪ Si a est de longueur 4, on a selon que le premier 0 est en position paire ou impaire, les découpages suivants :

--- / 0 _ / _ _ / _ 0 / _ _ / _ _ / 0 _ / --- ou --- _ 0 / _ _ / _ _ / 0 _ / _ _ / _ 0 / ---

On complète les séquences de 01 ou 10 incomplètes, on obtient :

--- / 0 1 / _ _ / 1 0 / _ _ / _ _ / 0 _ / --- ou --- _ 0 / _ _ / _ _ / 0 1 / _ _ / 1 0 / ---

Entre deux 0 du départ, la suite a commence et se termine par 1.

On reporte les 1 à droite ou à gauche, on obtient :

--- / 0 1 / _ _ / 1 0 / 1 _ / _ 1 / 0 _ / --- ou --- _ 0 / 1 _ / _ 1 / 0 1 / _ _ / 1 0 / ---

On complète les séquences de 01 ou 10 incomplètes, on obtient :

--- / 0 1 / _ _ / 1 0 / 1 0 / 0 1 / 0 _ / --- ou --- _ 0 / 1 0 / 0 1 / 0 1 / _ _ / 1 0 / ---

Entre deux 0 du départ, la suite a est 1001. On la reporte à droite ou à gauche, on obtient :

--- / 0 1 / 0 0 / 1 0 / 1 0 / 0 1 / 0 _ / --- ou --- _ 0 / 1 0 / 0 1 / 0 1 / 0 0 / 1 0 / ---

Or, il est impossible d'avoir une séquence /00 / dans nos mots.

▪ Si a est de longueur paire supérieure ou égale à 6

→ soit le premier 0 est en position paire, et on a le découpage suivant :

--- / 0 _ / _ _ / _ _ _ _ / _ _ _ _ / 0 _ / _ _ / _ _ _ _ / _ _ _ _ / 0 _ / ---

même suite a de 0 et 1 de longueur paire.

On complète les séquences de 01 ou 10 incomplètes dans le découpage :

On a donc --- / 0 1 / _ _ / _ _ _ _ / _ _ / 1 0 / _ _ / _ _ _ _ / _ _ / 0 1 / ---

Comme entre les 0 du départ, il y a la même suite a de 0 et 1, on voit que la suite a commence et se termine par 1. On complète la suite a.

On a donc --- / 0 1 / _ _ / _ _ _ _ / _ _ / 1 0 / 1 _ / _ _ _ _ / _ _ / _ 1 / 0 1 / ---

On complète les séquences incomplètes.

On obtient --- / 0 1 / _ _ / _ _ _ _ / _ _ / 1 0 / 1 0 / _ _ _ _ / _ _ / 0 1 / 0 1 / ---

On voit que a se termine donc par 01. On complète la suite a.

On a donc --- / 0 1 / _ _ / _ _ _ _ / _ 0 / 1 0 / 1 0 / _ _ _ _ / _ _ / 0 1 / 0 1 / ---

On complète la séquence incomplète.

On obtient $---/01/_/_/-----/10/10/10/-----/_/_/01/01/---$
Le mot contient alors **101010**. Or on a vu que c'était impossible.

→ soit le 1^{er} 0 est en position impaire, et on a le découpage suivant :

$---/_/_/0/_/_/-----/_/_/_/_/0/_/_/-----/_/_/_/_/0/---$

même suite a de 0 et 1 de longueur paire.

On complète les séquences incomplètes au fur et à mesure comme précédemment.
On obtient pas à pas :

$---/10/_/_/-----/_/_/_/_/01/_/_/-----/_/_/_/_/10/---$
 $---/10/1/_/_/-----/_/_/_/_/1/01/_/_/-----/_/_/_/_/10/---$
 $---/10/10/_/_/-----/_/_/_/_/01/01/_/_/-----/_/_/_/_/10/---$
 $---/10/10/_/_/-----/_/_/_/_/01/01/0/_/_/-----/_/_/_/_/0/10/---$
 $---/10/10/_/_/-----/_/_/_/_/01/01/01/_/_/-----/_/_/_/_/10/10/---$

Le mot contient alors **010101**. Or on a vu que c'était impossible.

Donc **ce mot ne contient pas 0a0a0 où a est une même suite de 0 et 1 de longueur paire.**

On procède exactement de la même manière pour démontrer que **ce mot ne contient pas 1a1a1 où a est une même suite de 0 et 1 de longueur paire.**

▪ Supposons qu'il contienne 0a0a0 ou 1a1a1 avec a de longueur impaire.

▪ Si a est de longueur 1

Supposons que le mot contienne 0 _ 0 _ 0, on a alors selon que 0 soit en position paire ou impaire, les découpages suivants :

→ $---/0_/0_/0---$, alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient **000**, or c'est impossible.

→ $---0_/0_/0---$, on complète les séquences incomplètes, on obtient $---10/10/10---$, alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient **111**, or c'est impossible.

Donc **ce mot ne contient pas 0a0a0 avec a de longueur 1.**

On procède exactement de la même manière pour démontrer que **ce mot ne contient pas 1a1a1 avec a de longueur 1**

▪ Si a est de longueur 3 ($3 = 1 \times 2 + 1$)

Supposons que le mot contienne

0_0_0

même suite a de longueur 3

On a alors selon que 0 soit en position paire ou impaire, les découpages suivants :

→ $---/0_/_/_/0_/_/_/0---$, alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient **0_0_0**. Or on vient de voir que c'est impossible.

→ $---0_/_/_/0_/_/_/0---$, on complète les séquences incomplètes, on obtient $---10/_/_/10/_/_/10---$, alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient **1_1_1**, or on vient de voir que c'est impossible.

Donc **ce mot ne contient pas 0a0a0 avec a de longueur 3.**

On procède exactement de la même manière pour démontrer que **ce mot ne contient pas 1a1a1 avec a de longueur 3.**

▪ Si a est de longueur 5 ($5 = 2 \times 2 + 1$)

Supposons que le mot contienne



même suite a de longueur 5

On a alors selon que 0 soit en position paire ou impaire, les découpages suivants :

→ $---/0_/_/_/0_/_/_/0---$, alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient 0_0_0 . Or c'est impossible car on a vu que notre mot ne contenait pas $0b0b0$ où b est de longueur paire (2).

→ $---0_/_/_/0_/_/_/0---$, on complète les séquences incomplètes, soit $---10_/_/_/10_/_/_/10---$, alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient 1_1_1 . Or c'est impossible car on a vu que notre mot ne contenait pas $1b1b1$ où b est de longueur paire (2).

Donc **ce mot ne contient pas $0a0a0$ avec a de longueur 5.**

On procède exactement de la même manière pour démontrer que **ce mot ne contient pas $1a1a1$ avec a de longueur 5.**

▪ Si a est de longueur 7 ($7 = 3 \times 2 + 1$)

Supposons que le mot contienne



même suite a de longueur 5

On a alors selon que 0 soit en position paire ou impaire, les découpages suivants :

→ $---/0_/_/_/0_/_/_/0---$, alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient 0_0_0 . Or c'est impossible car on a vu que notre mot ne contenait pas $0b0b0$ où b est de longueur 3.

→ $---0_/_/_/0_/_/_/0---$, on complète les séquences incomplètes, on obtient

$---10_/_/_/10_/_/_/10---$, alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient 1_1_1 . Or c'est impossible car on a vu précédemment que notre mot ne contenait pas $1b1b1$ où b est de longueur 3.

Donc **ce mot ne contient pas $0a0a0$ avec a de longueur 7.**

On procède exactement de la même manière pour démontrer que **ce mot ne contient pas $1a1a1$ avec a de longueur 7.**

▪ Si a est de longueur 9 ($9 = 4 \times 2 + 1$)

Si les mots contiennent $0a0a0$ ou $1a1a1$ où a est de longueur 9, les mots de rang précédent contiennent $0b0b0$ ou $1b1b1$ où b est de longueur 4 (paire). Or c'est impossible.

▪ Si a est de longueur 11 ($11 = 5 \times 2 + 1$)

Si les mots contiennent $0a0a0$ ou $1a1a1$ où a est de longueur 11, les mots de rang précédent contiennent $0b0b0$ ou $1b1b1$ où b est de longueur 5. Or, on vient de voir que c'est impossible.

▪ Si a est de longueur 13 ($13 = 6 \times 2 + 1$)

Si les mots contiennent $0a0a0$ ou $1a1a1$ où a est de longueur 13, les mots de rang précédent contiennent $0b0b0$ ou $1b1b1$ où b est de longueur 6 (paire). Or c'est impossible.

▪ Si a est de longueur 15 ($15 = 7 \times 2 + 1$)

Si les mots contiennent $0a0a0$ ou $1a1a1$ où a est de longueur 15, les mots de rang précédent contiennent $0b0b0$ ou $1b1b1$ où b est de longueur 7. Or, on vient de voir que c'est impossible.

On continue ainsi de suite en augmentant successivement la longueur de a de 2

(a = 17, a = 19, a = 21, etc.)

En prenant le mot de rang précédent, on obtiendra toujours une impossibilité démontrée dans les étapes précédentes.

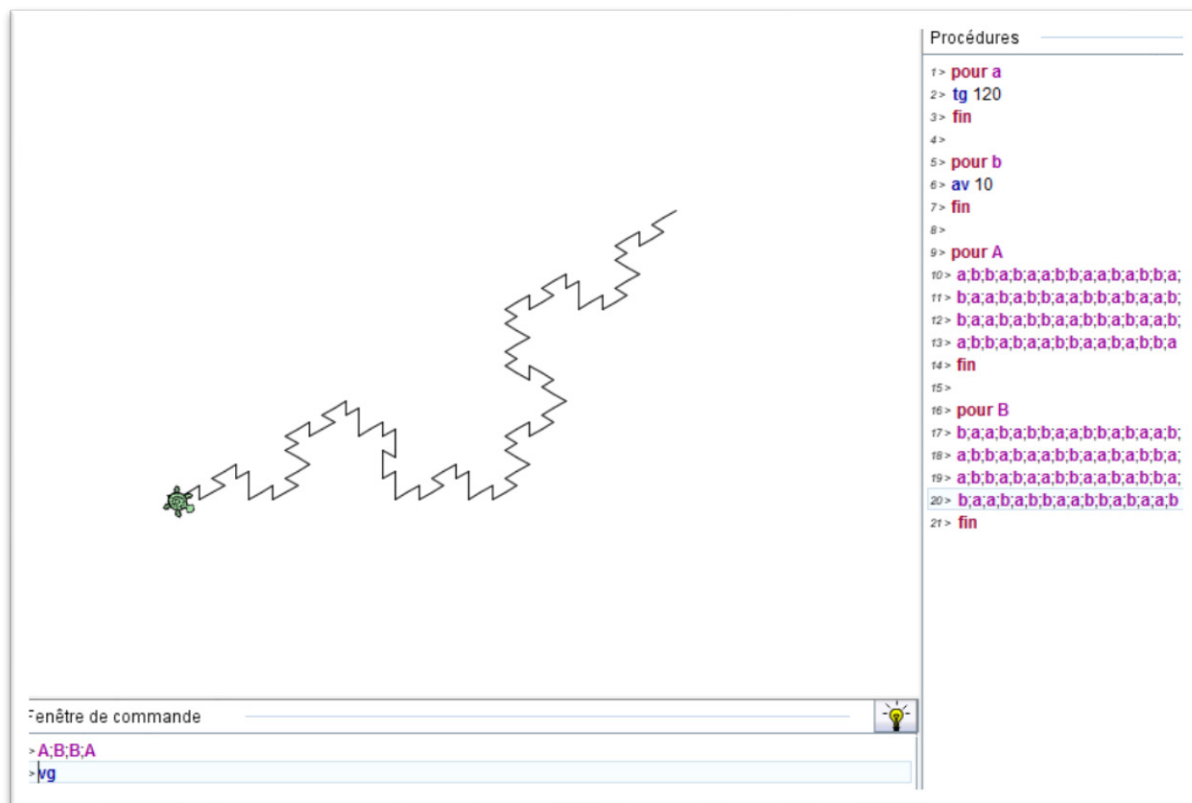


Illustration géométrique du mot de rang 8 comportant une suite de 256 chiffres 0 ou 1 car $256 = 2^8$.

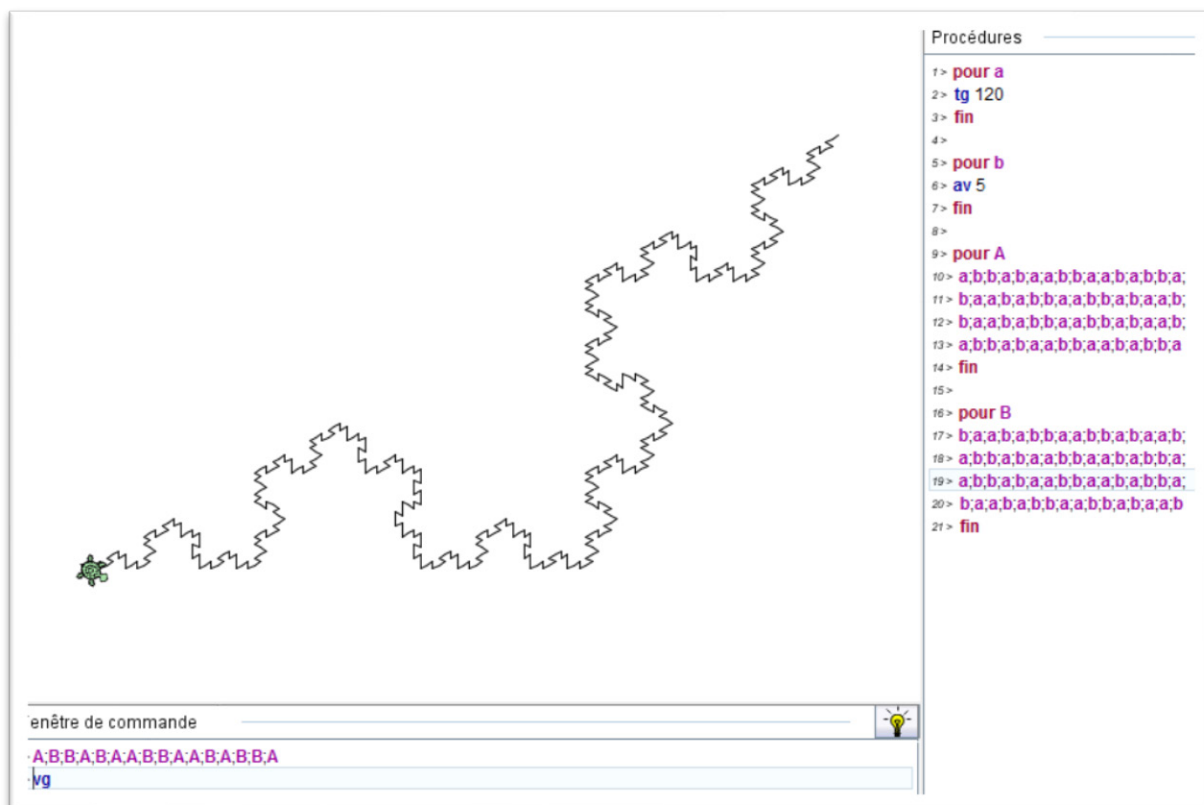


Illustration géométrique du mot de rang 10 de longueur 1 024 car $1\,024 = 2^{10}$.

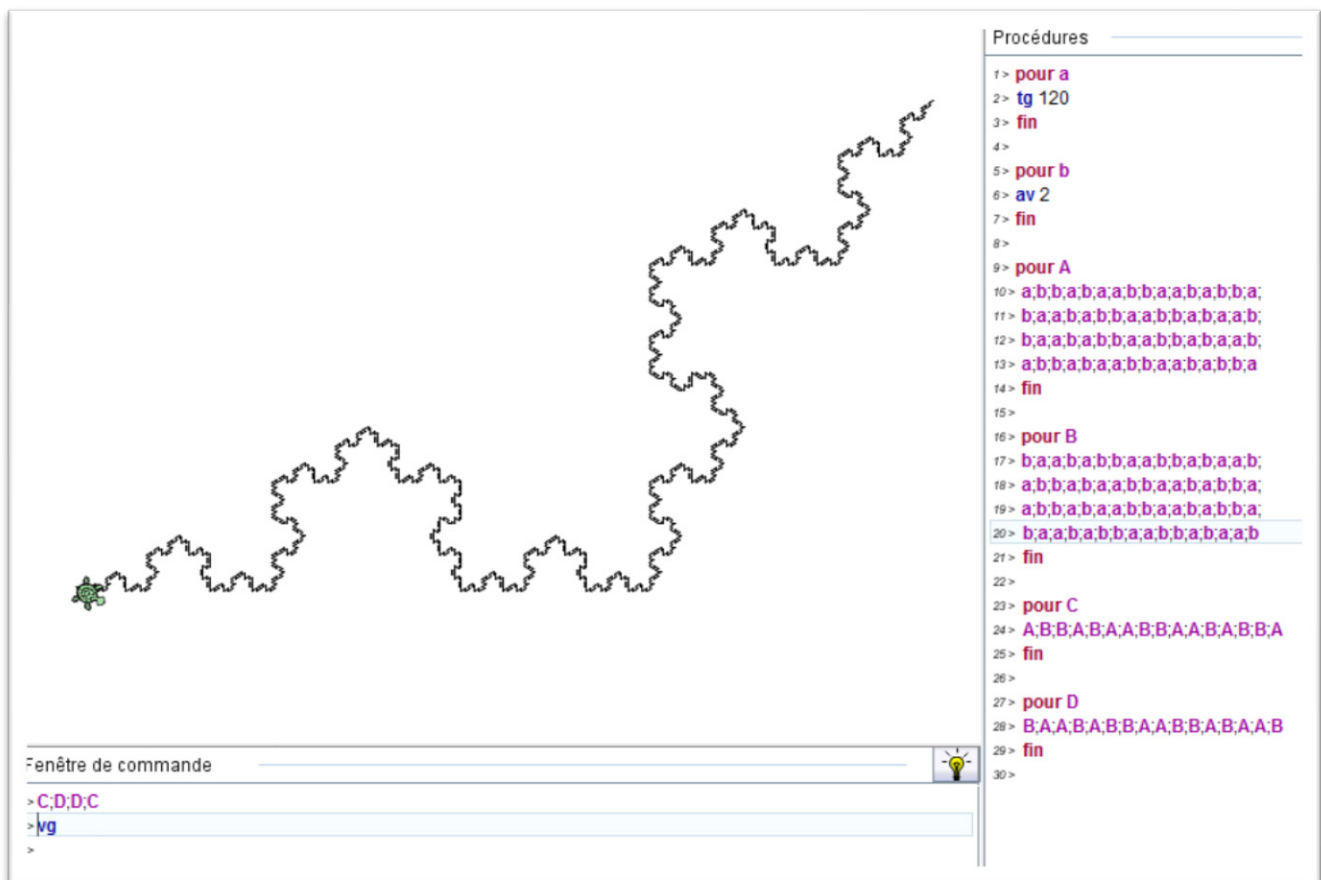


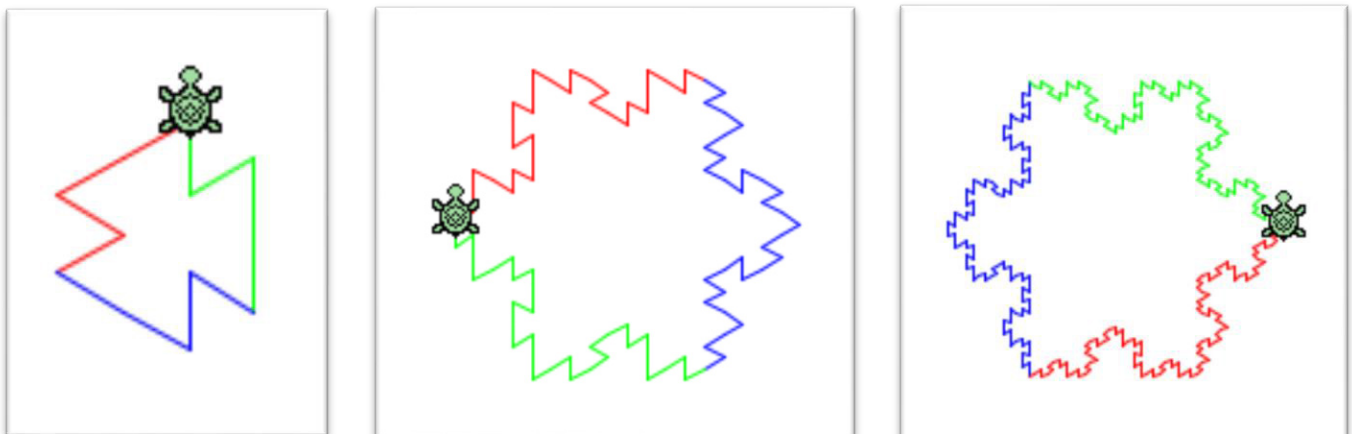
Illustration géométrique du mot de rang 12 de longueur 4 096 car $4\,096 = 2^{12}$.

On remarque le « caractère fractal » des représentations géométriques des mots, ce qui s'explique du fait que chaque mot contient le mot de rang précédent.

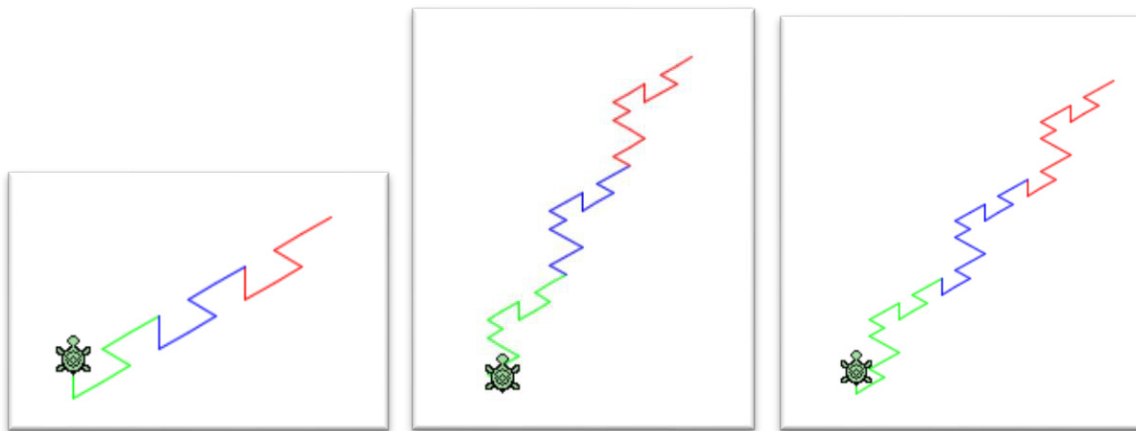
On a alors programmé des mots contenant des cubes et étudié comment on pouvait les visualiser.

On a pris des couleurs différentes pour chaque répétition de suite de 0 ou 1. On se retrouve forcément dans l'un des deux cas ci-dessous.

- Premier cas, la tortue revient au point de départ et la représentation géométrique forme une boucle. C'est les cas où la tortue redémarre dans une direction différente à celle du départ au moment de la répétition. Si on tourne 3 fois de 120° dans la même direction, cela revient à revenir au départ.



- Deuxième cas, on voit la figure qui se répète 3 fois de suite. C'est le cas où la tortue redémarre dans la même direction qu'au départ au moment de la répétition.



Nous avons alors vérifié que notre mot de longueur 40 du début de l'exposé était sans cube en le représentant graphiquement.

Il s'agissait du mot **0101001100101101001101001010011010010110**

Sur l'illustration géométrique de ce mot, la tortue ne dessine aucune boucle et on ne retrouve pas 3 fois de suite un même morceau de figure côte à côte. Ce mot de longueur 40 que nous avons inventé ne possède donc aucun cube.

d) Réponse à la première question du problème

On décide de choisir du café ou du chocolat en suivant notre mot de longueur infinie sans cube:

011010011001011010010110011010011001011001101001011 etc.

où 0 représentera le choix d'un café et 1 celui d'un chocolat.

Comme notre mot est de longueur infinie et sans cube, on a alors trouvé une suite de « café-chocolat-etc. » qui convienne jusqu'à la fin de nos jours, et même pour un nombre infini de jours, sans aucune répétition d'une même séquence trois fois de suite côte à côte.

3°) Mots dont l'alphabet ne contient que les trois chiffres 0, 1 et 2

Et si on rajoute du thé !

On se pose la question de savoir si on peut trouver une suite de « Chocolat – Café – Thé – etc. » dans laquelle aucune séquence ne se répèterait deux fois de suite ?

Il nous faut un mot dont l'alphabet est constitué de trois symboles pour résoudre ce nouveau problème.

On cherche donc un mot de longueur infinie dont l'alphabet ne contient que 0, 1 et 2 et sans carré.

a) **Mots sans carré**

0201021202101201021202102012101201 est par exemple un mot sans carré de longueur 34 et cela devient assez difficile de l'allonger en étant sûr qu'il n'y ait pas de carré.

b) **Mot de longueur infinie sans carré**

On nous a alors dit d'utiliser le mot sans cube dont l'alphabet ne contient que 0 et 1.

En le regardant bien attentivement, on a constaté qu'il n'était aussi constitué que des 3 séquences ; 0, 01 et 011 comme on peut le voir si dessous.

0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 ----

On a alors écrit un nouveau mot, de longueur infinie, en remplaçant :

0 par 0

01 par 1

011 par 2

On a obtenu le nouveau mot :

2102012101202102012021012101---

Nous devons démontrer que ce nouveau mot ne possède aucun carré pour résoudre notre problème.

► Supposons par exemple que ce mot contienne le carré de 201.

On a donc dans le mot --- 201 201 c --- où c est le chiffre qui suit donc soit 0, 1 ou 2.

Si on repasse au mot correspondant ne contenant que 0 et 1, on obtient le mot :

--- 011001 011001 0--- soit ---011001 011001 0---

On remarque qu'on peut alors l'écrire $0a0a0$ où a est la même suite 11001.

Or on a vu que c'est impossible.

Donc **ce nouveau mot ne contient pas le carré de 201.**

$$\begin{array}{lcl} 0 & \rightarrow & 0 \\ 1 & \rightarrow & 01 \\ 2 & \rightarrow & 011 \end{array}$$

► **Cas général, supposons que ce nouveau mot contienne le carré d'une suite a de 0, 1 et 2.**

Il contient donc la suite **aab** où - a est la même suite de 0,1 et 2

- b est le chiffre qui suit (donc 0,1 ou 2).

Alors en repassant au mot correspondant ne contenant que 0 et 1 avant la substitution :

- a devient un mot commençant forcément par 0, on peut l'écrire 0c où c est une suite de 0 et 1
- b commence forcément par 0

Et on obtient alors la séquence **0c0c0**, où c est une même suite de 0 et 1.

Or on a vu que c'était impossible.

Donc **ce nouveau mot de longueur infinie ne contient pas de carré.**

c) **Réponse à la deuxième question du problème**

On décide de choisir du café, du chocolat ou du thé en suivant notre mot de longueur infinie sans carré : 2 1 0 2 0 1 2 1 0 1 0 2 0 2 1 0 2 0 1 2 0 2 1 0 1 0 2 1 0 ---- où 2 représentera le choix d'un café, 1 celui d'un chocolat et 0 celui d'un thé.

Comme ce nouveau mot est de longueur infinie et sans carré, on a alors trouvé une suite de « café-chocolat-thé- etc. » qui convient jusqu'à la fin de nos jours, et même pour un nombre infini de jours, sans aucune répétition d'une même séquence deux fois de suite côte à côte.

LOI DE LIONNEL 2

Quand on additionne deux fois le même nombre, on obtient le double de ce nombre.

Si n est n'importe quel nombre, $n + n = 2 \times n$.

Une crêpe très fragile...

Année 2016-2017

Adrien Jimenez (Terminale S spé maths lycée Carnot), Samuel Prevost (Première S lycée Carnot), Julien Zwicky (Terminale S spé maths lycée Carnot), Ariane Martin (Supméca)

Encadrés par : Philippe Paul

Établissement : Lycée Carnot (Paris)

Chercheur : Amic Frouvelle (Université Paris-Dauphine)

Présentation du sujet

Nous avons une crêpe ayant deux côtés : un cuit en-dessous et un non cuit au-dessus. Nous souhaitons retourner cette crêpe de telle façon que le côté cuit se retrouve au-dessus et le côté non cuit au-dessous. Cependant, nous ne pouvons retourner qu'une seule portion de cette crêpe, puis celle adjacente, etc. (la taille de la portion restant toujours la même), et non la crêpe entière d'un coup. Une portion est un secteur angulaire de la crêpe défini par un angle α . Le but de nos recherches a été de savoir pour quels angles α on arrive à retourner totalement la crêpe (on dira alors que « l'angle marche »), et pour quels autres on retombe sur une crêpe ayant de nouveau la face cuite en dessous et la face non cuite au-dessus comme au départ (on dira que « l'angle ne marche pas »). Nous avons également montré que quel que soit l'angle choisi, on aboutira toujours à l'une de ces deux possibilités au bout d'un nombre fini de coups : il n'y a aucun cas où l'on se retrouve à couper la crêpe indéfiniment sans jamais se retrouver avec une crêpe à l'état initial ou une crêpe retournée. Il est important de savoir que ces deux côtés restent tels qu'ils étaient au départ tout le long de notre sujet (c'est-à-dire que lorsque l'on retourne une portion de la crêpe, le côté non cuit ne se met pas à cuire).

I) Introduction

a. Définitions et notations :

Portion : On appelle « portion » un secteur angulaire de la crêpe défini par un angle α constant lorsque l'on travaille sur une même crêpe.

Part : On appelle « part » un secteur angulaire de la crêpe défini de sorte qu'il ne sera jamais coupé lors du retournement.

Coup : Le nombre de coups correspondra au nombre de retournements de portion qui aura eu lieu.

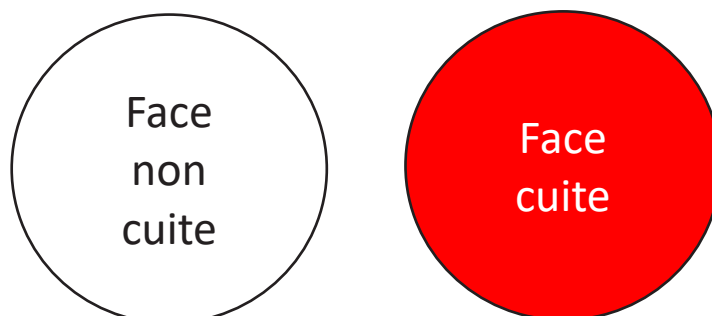


Schéma 1 : Crêpe vue de haut

b. Retournement (1) :

Le retournement de la portion d'une crêpe est un retournement au sens physique du terme qui s'effectue comme sur le schéma ci-dessous :

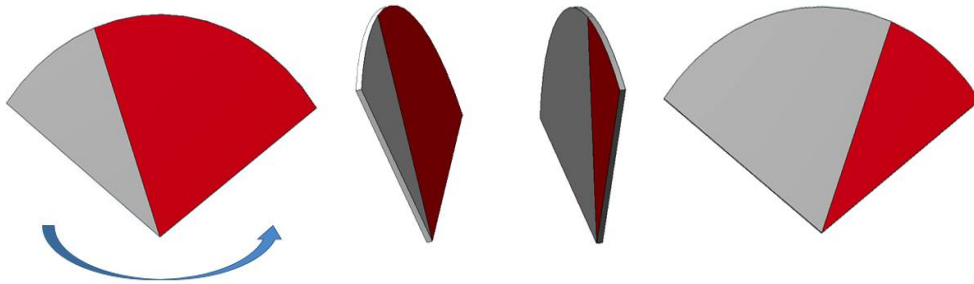


Schéma 2 : Retournement d'une portion

c. Exemples :

-Si on prend un angle α de 90° , on obtient la situation ci-dessous :

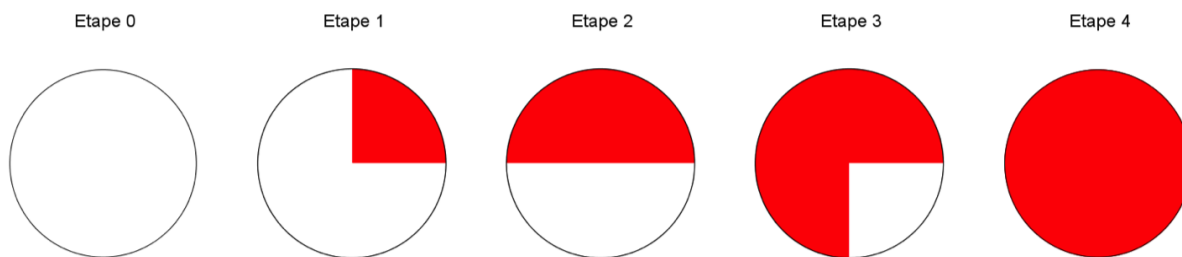


Schéma 3 : Retournement par portion de 90°

On voit ici que la crêpe se retrouve avec la face cuite au-dessus et la face non cuite en dessous au bout de 4 coups. Donc l'angle 90° marche.

Si on prend un angle de 216° (trois cinquièmes de la crêpe), on obtient une autre situation :

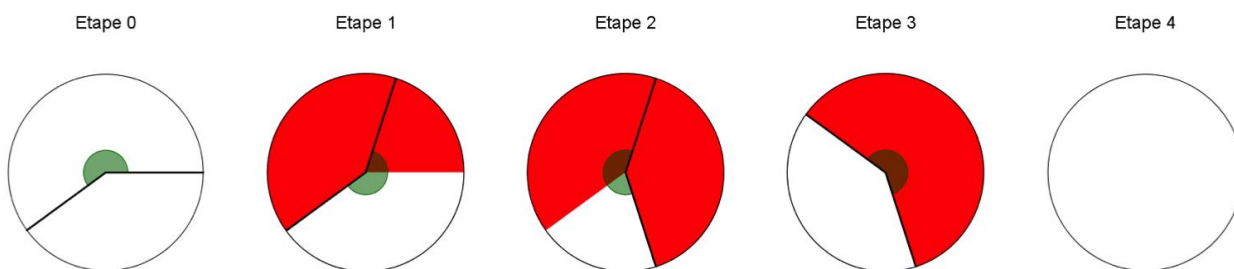


Schéma 4 : Retournement par portion de 216°

Les segments noirs et l'arc de cercle vert délimitent la portion qui sera retournée au coup d'après.

Entre l'étape 1 et l'étape 2 nous retournons une portion dont un tiers est cuit, or lors d'un retournement ce tiers passera de l'autre côté de la portion et deviendra non-cuit comme nous le voyons sur le schéma 2.

Dans ce cas la crêpe revient à son état initial au bout de 4 coups, l'angle 216° ne marche donc pas.

II) Premiers résultats

a. Si l'angle α est un diviseur de 360° :

Pour tout diviseur de 360° , on peut associer une fraction du type $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ tel que 1 correspond à 360° ; $\frac{1}{2}$ à 180° ; etc. Comme on retourne des portions de même taille (l'angle étant constant) et que l'on retourne à chaque fois la portion adjacente à celle d'avant, la totalité du secteur grillé y vaut $\sum_{i=1}^k \frac{1}{n}$ soit $y = k \frac{1}{n}$ avec k étant le nombre de coups, donc un entier naturel. Ainsi lorsque $k = n$ on a $y = \frac{n}{n} = 1$, ainsi la crêpe a tout son côté cuit au-dessus (elle est donc totalement retournée) au bout de n coups, quel que soit le diviseur de 360° auquel on associe la fraction $\frac{1}{n}$.

b. Si l'angle α est compris entre 180° et 360° exclus :

Prenons un angle $\alpha = 360 - x$ avec $x \in]0; 360[$, on obtient le modèle suivant :

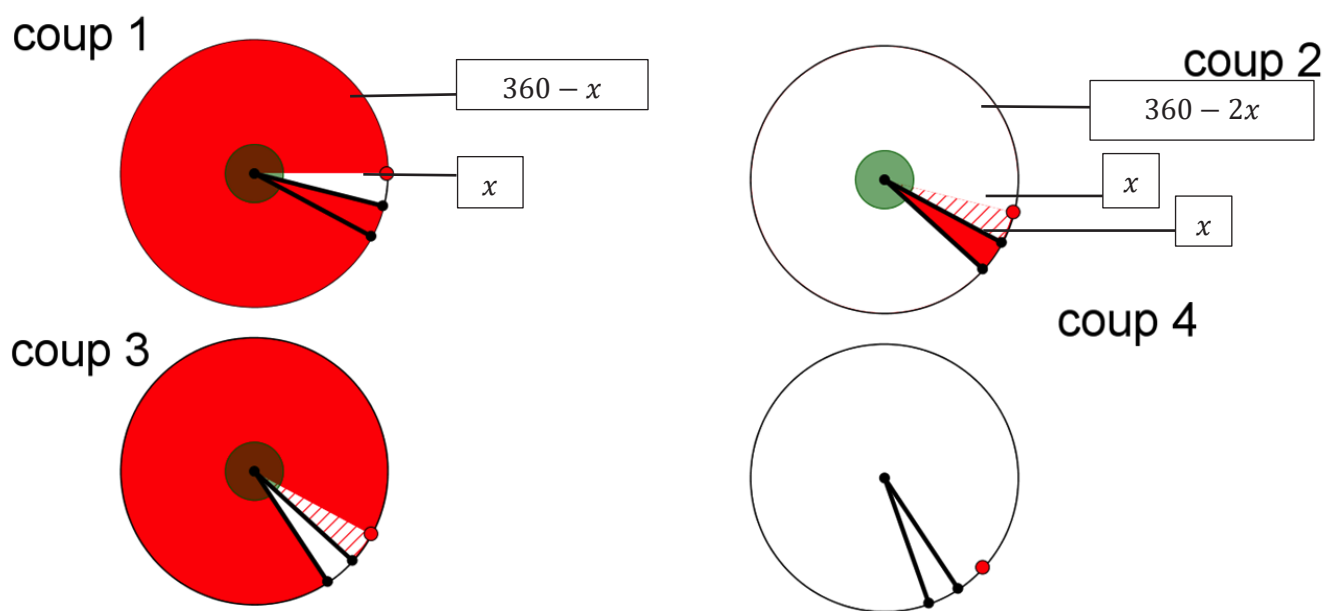


Schéma 5 : Retournement par portion avec un angle entre 180° et 360°

Les secteurs hachurés sont des parts dont la face cuite est au-dessus qui ont été retournés il y a plus d'un coup. Et on rappelle que les segments et l'arc de cercle vert délimitent toujours la portion de crêpe qui sera retournée au coup d'après.

Nous avons donc deux parts qui sont définies par l'angle qui vaut x et l'autre part définie nécessairement par l'angle qui vaut $360 - 2x$. Ce modèle existe si toutes les parts sont définies par des angles compris entre 0° et 360° exclus car $x \in]0; 360[$, ainsi seule la part définie par l'angle valant $360 - 2x$ est susceptible d'être en dehors de l'intervalle.

$$360 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 180$$

Or l'angle $\alpha = 360 - x$, donc on a $\alpha \in]180; 360[$ (la fraction équivalente est entre $\frac{1}{2}$ et 1), on en déduit donc que tout angle rentrant (supérieur à 180°) ne marche pas, et ce toujours au bout de 4 coups.

c. Autres résultats et observations :

Avec le même type de démonstration nous avons vu que tout angle compris entre 120° et 180° (la fraction équivalente est entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$) ne marche pas et la crêpe revient à sa position initiale au bout de 12 coups. Grâce à l'algorithme proposé en annexe, nous avons également remarqué (sans faire de démonstration) qu'il semblait

que tout angle ayant comme fraction équivalente une fraction comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ ne marche pas et que la crêpe revient à sa position initiale au bout de 24 coups, et que tout angle ayant une fraction équivalente comprise entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{4}$ ne marche pas et que la crêpe revient à sa position initiale au bout de 40 coups.

Nous avons déduit deux conjectures à partir de ces résultats :

- Aucun angle autre que les diviseurs de 360° ne marche.
- Si un angle a sa fraction équivalente comprise entre $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}$, il ne marche pas et la crêpe revient à son état initial au bout de $2n(n+1)$ coups sans jamais avoir été retournée complètement. En effet, comme on l'a vu ci-dessus, quand un angle a sa fraction équivalente comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, il ne marche pas au bout de 4 coups, or $4 = 2 \times 2 \times 1$, de même un angle ayant sa fraction équivalente comprise entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ ne marche pas au bout de 12 coups, or $12 = 2 \times 3 \times 2$.

III) Théorèmes complémentaires et conjecture

a. Nombre de coups

Nous avons cherché à démontrer le nombre de coups lors d'un retournement de la crêpe avant de revenir au point de départ, donc dans le cas d'un angle ne marchant pas.

Théorème :

Pour un angle dont la fraction équivalente :

- est de la forme $\frac{1}{n}$, le retournement de la crêpe s'effectue en n coups
- appartient à $\left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$, la crêpe revient à sa position initiale en $2n(n+1)$ coups, sans jamais avoir été retournée

Démonstration :

Pour ce faire nous avons changé de modèle, la crêpe est maintenant modélisée sur une ligne de longueur 1, ce qui facilite la représentation graphique les segments rouges représentant les parts cuites et les noirs les parts non cuites, nous appellerons dans la suite $x \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$ la longueur du segment que nous retournons à chaque coup, qui correspondrait à la longueur de l'arc de cercle du secteur angulaire dans le modèle précédent.

On note aussi la position à partir de laquelle nous coupons la part par une croix et la position des anciennes coupures par un point.

Coup 0 :



Coup 1 :



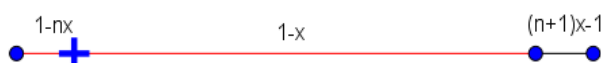
Nous pouvons réaliser $n-1$ autres coups de sorte à retourner la plus grande partie de la crêpe possible en laissant une partie non cuite.

Coup n :



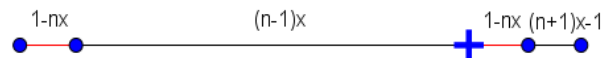
Lors du coup suivant, nous atteignons le bord de notre segment, et comme nous retournons une part $x = (1 - nx) + ((n+1)x - 1)$ nous en déduisons, qu'il y aura une part non cuite de $((n+1)x - 1)$ ainsi qu'une part cuite $(1 - nx)$, comme sur le schéma ci dessous (2) :

Coup $n+1$:



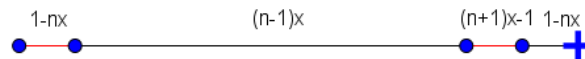
Nous pouvons ensuite réaliser $n - 1$ coups pour retourner la part $1 - x$

Coup $2n$:



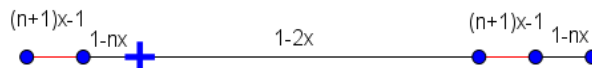
Comme $x = (1 - nx) + ((n + 1)x - 1)$, on obtient au coup suivant :

Coup $2n + 1$:



Et donc au coup suivant :

Coup $2(n + 1)$:



Or nous pouvons passer les deux bouts à gauche de la crêpe à sa droite, sans que cela ne change quoi que ce soit à part la représentation graphique qui permettra plus de visibilité dans la suite.

Coup $2(n + 1)$:

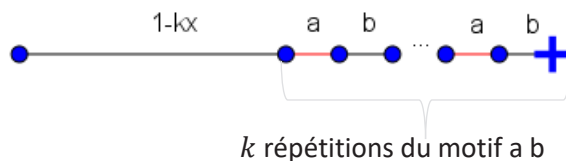


Nous en déduisons une relation de récurrence permettant de connaître la configuration au coup $k(n + 1)$, $k \in \mathbb{N}$.

Lemme :

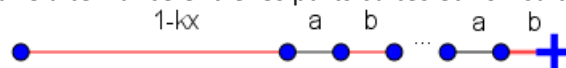
$\forall k \in [1, n]$, nous avons la configuration suivante de la crêpe au coup $k(n + 1)$:

Pour k pair :



Où $a = (n + 1)x - 1$ et $b = 1 - nx$. Avec une alternance entre les parts cuites et non cuites.

Nous aurons pour un k impair :



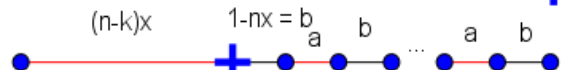
Démonstration du lemme :

Nous cherchons donc à prouver ce résultat par récurrence, pour ce faire, il faut faire une initialisation, ce qui a été fait précédemment pour obtenir ce lemme. Il reste donc l'hérédité, supposons l'hypothèse de récurrence vraie pour un certain $k \in [1, n - 1]$ pair, montrons que cela implique une relation similaire pour le coup $(k + 1)(n + 1)$. En partant du coup $k(n + 1)$ et en réalisant des opérations similaires à l'initialisation, nous obtenons :

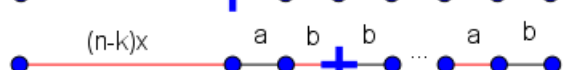
Coup $k(n + 1)$:



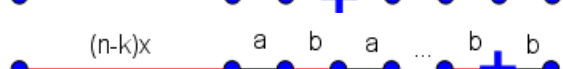
Coup $k(n + 1) + n - k$:



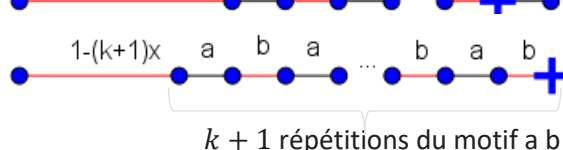
Coup $k(n + 1) + n - k + 1$:



Coup $k(n + 1) + n$:

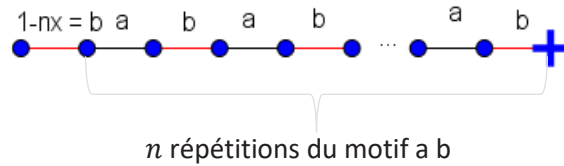


Coup $(k + 1)(n + 1)$:

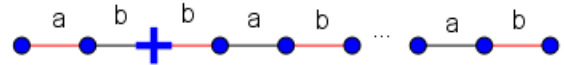


Pour le cas où k est impair, la démonstration est identique mais en changeant les couleurs des parts. Ce qui prouve notre récurrence.

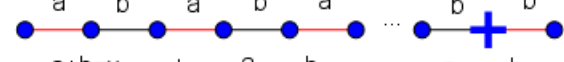
Pour $k = n$, nous avons (3) :
Coup $n(n + 1)$:



En continuant le retournement, nous trouvons :
Coup $n(n + 1) + 1$:



Coup $n(n + 1) + n$:



Coup $(n + 1)(n + 1)$:

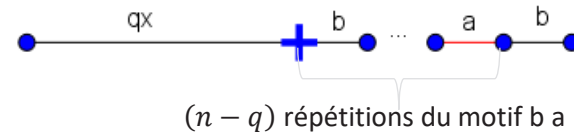


Nous en déduisons un lemme sur la configuration de la crêpe au coup $(n + q)(n + 1)$, $q \in \mathbb{N}$

Lemme :

$\forall q \in [1, n]$, nous avons la configuration suivante de la crêpe au coup $(n + q)(n + 1)$:

Pour $(n + q)$ pair :



Où $a = (n + 1)x - 1$ et $b = 1 - nx$. Avec une alternance entre les parts cuites et non cuites.

Nous aurons pour $(n + q)$ impair :



La première part de la zone qx est une part de taille a , et la dernière est de taille b .

Démonstration du lemme :

Comme pour le lemme précédent, l'initialisation a déjà été traitée, elle nous a permis de trouver le lemme. Nous supposons donc l'hypothèse de récurrence vraie pour un certain $q \in [1, n]$, avec $(n + q)$ pair.

Coup $(n + q)(n + 1)$:



Coup $(n + q)(n + 1) + 1$:



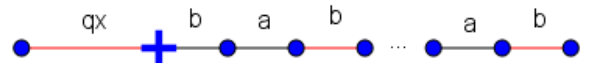
Comme il y avait $n - q$ répétitions du motif $b a$ au coup précédent, il en reste $n - q - 1$, d'où :

Coup $(n + q)(n + 1) + n - q$:



Comme la zone qx commence par une part de taille a , nous retournerons la part b avec la première part a de la zone qx , et comme la zone est de taille qx nous pouvons effectuer q coups et il restera la dernière part de la zone qui est de taille b :

Coup $(n + q)(n + 1) + n$:

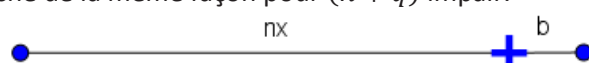


Coup $(n + q + 1)(n + 1)$:



Ce qui prouve ce deuxième lemme, car cela marche de la même façon pour $(n + q)$ impair.

Nous aurons donc au coup $2n(n + 1)$:



La crêpe est donc revenue dans son état initial au bout de $2n(n + 1)$ coups.

Cette démonstration nous permet de remarquer différentes propriétés et théorèmes.

b. Nombre de parts et leur taille

Théorème :

Il existe des parts, qui ne seront jamais coupées lors du retournement de la crêpe, pour une portion x de la crêpe que l'on retourne de :

- $x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ ces parts sont au nombre de n et sont de taille $\frac{1}{n}$
- $x \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[, n \in \mathbb{N}^*$ il y a $2n + 1$ parts, n parts de taille $1 - nx$ et $n + 1$ parts de taille $(n + 1)x - 1$

Démonstration :

Comme vu précédemment, pour une portion $x \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[, n \in \mathbb{N}^*$, au coup $n(n + 1)$, nous avons bien les différentes parts car toutes les coupes dans les crêpes ont été marquées. Et lors de la deuxième partie du retournement, les nouvelles coupes sont faites sur les coupes précédentes. Ce qui prouve l'existence des parts ainsi que leur nombre et taille.

Pour une portion $x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, nous avons vu qu'il faut n coups pour retourner la crêpe, en retournant à chaque coup une part de taille $\frac{1}{n}$, le nombre de parts est donc trivial.

c. Symétrie

Propriété :

Il existe une symétrie dans le processus de retournement de la crêpe pour une portion $x \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[, n \in \mathbb{N}^*$, il existe un axe de symétrie dans la configuration de la crêpe au coup $n(n + 1)$ et, $\forall k \leq n(n + 1)$, sa configuration au coup $n(n + 1) - k$ est symétrique à celle du coup $n(n + 1) + k$.

Exemple : Pour $x = \frac{4}{5}$,

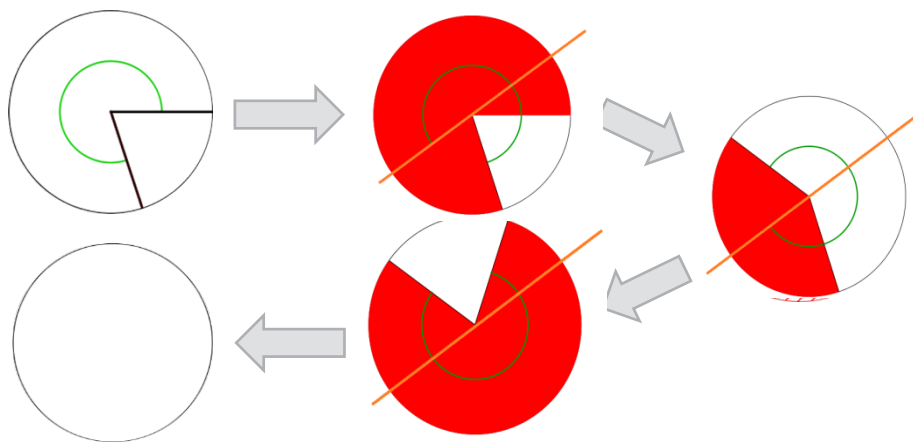
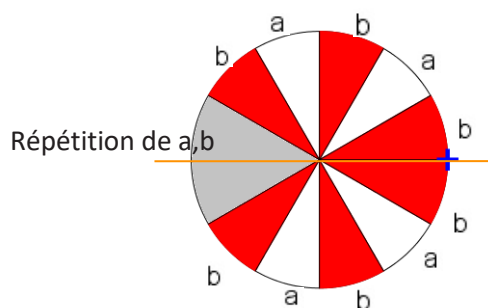


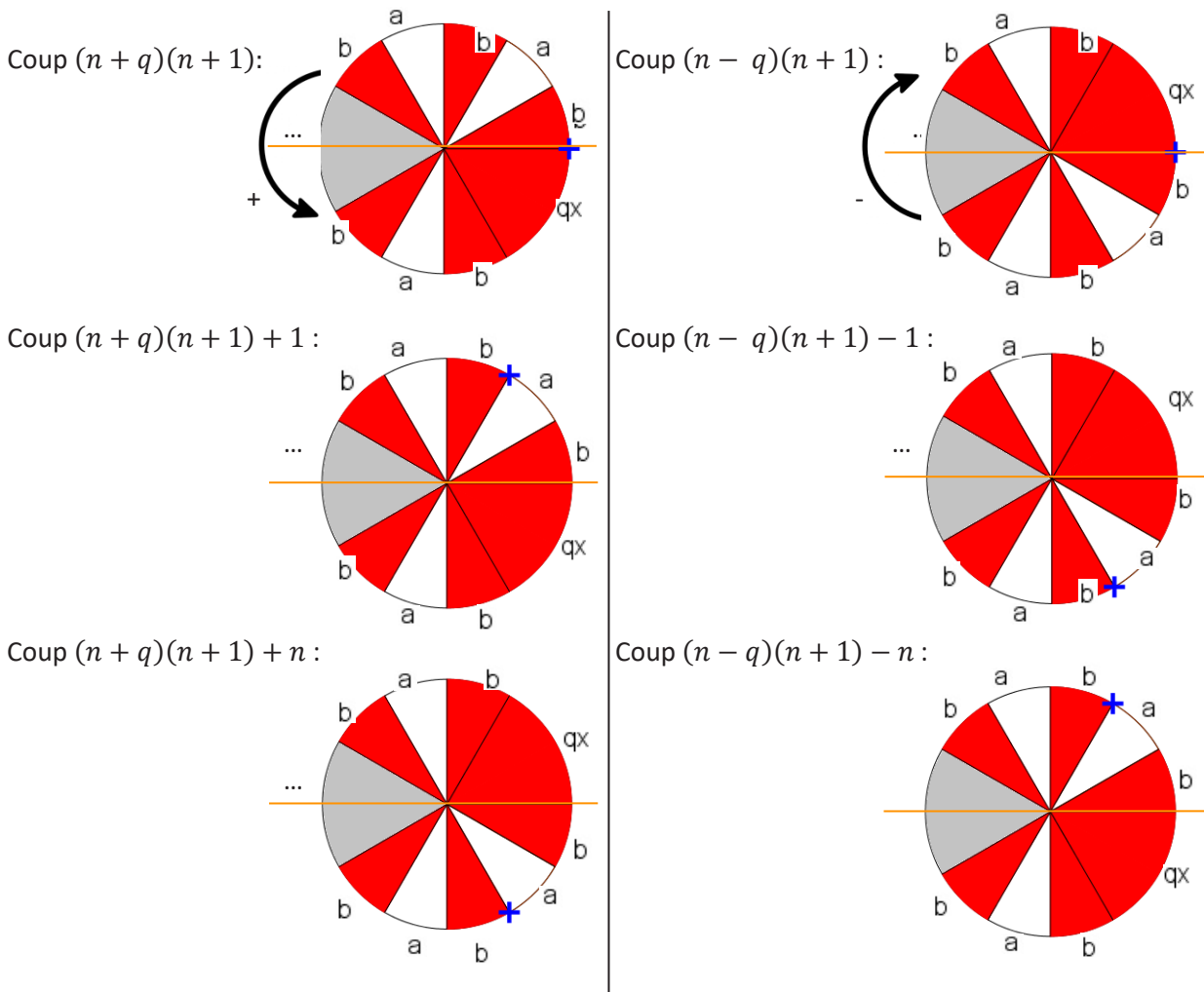
Schéma 6 : symétrie pour une portion de 4/5

Preuve :

En utilisant les deux lemmes précédents et en utilisant la représentation des crêpes sous forme de disque, nous remarquons un axe de symétrie dans la configuration au coup $n(n + 1)$:



Montrons que les configurations de la crêpe aux coups $n(n+1) + k$ et $n(n+1) - k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ sont symétriques. On pose $k = q(n+1) + i$ avec $q, i \in \mathbb{N}$. Nous pouvons trouver les configurations suivantes grâce aux lemmes montrés précédemment,



Comme nous avons une relation de symétrie valable pour un q quelconque, on en déduit que la relation est valable pour tout q .

Nous en déduisons donc que les configurations de la crêpe aux coups $n(n+1) + k$ et $n(n+1) - k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ sont symétriques.

d. Portions permettant de retourner la crêpe

Théorème :

Pour un retournement par portion x , le retournement marche si et seulement si

$$x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$$

Démonstration :

Nous avons déjà montré qu'avec une portion $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, le retournement marche, reste à montrer que si le retournement marche, alors la portion que l'on retourne à chaque coup est $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Raisonnons pour cela par contraposée, cela reviendrait donc à montrer que si $x \neq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ alors le retournement ne marche pas.

Or $0 < x \leq 1$, donc $x \neq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ implique $x \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[$, $n \in \mathbb{N}^*$. Mais comme nous l'avons vu au bout de $2n(n+1)$ coups nous retombons sur la face non cuite sans jamais passer par une étape où la totalité de la face est cuite. Le retournement ne marche donc pas pour une telle portion x . Ce qui démontre notre théorème.

e. Ordre des parts

Nous avons ensuite numéroté les différentes parts, et par expérience en utilisant un algorithme qui génère les configurations à chaque coup et donne la position de chaque part à chaque étape, nous remarquons la conjecture suivante,

Conjecture :

En numérotant les parts à l'étape 0, nous les retrouvons dans le même ordre à la fin du retournement dans le cas où $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi qu'à l'étape où nous retombons sur la face non cuite pour $x \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[$, $n \in \mathbb{N}^*$, à une rotation près autour de la crêpe.

IV) Conclusion

Ainsi nous avons prouvé que seuls les angles étant des diviseurs de 360° marchent, et retournent totalement la crêpe au bout de n coups, $\frac{1}{n}$ étant la fraction équivalente de cet angle. Tandis que tout autre angle ayant sa fraction équivalente comprise entre $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$ ne marche pas et ramène la crêpe à son état initial au bout de $2n(n+1)$ coups.

De plus, nous avons vu que lorsque l'on était dans un cas où l'angle ne marche pas, il y aura $2n+1$ parts avec n parts ayant leur bord de taille $nx-1$ et $n+1$ parts ayant leur bord de taille $1-(n-1)x$, 1 étant le périmètre total de la crêpe.

Remerciements :

Nous remercions monsieur Paul pour avoir organisé l'atelier au sein du lycée Carnot et pour nous avoir permis d'effectuer ce travail de recherche, ainsi qu'Amic Frouvelle qui nous a proposé des sujets intéressants qui nous ont permis de travailler toute cette année.

Merci aussi aux organisateurs du congrès.

Annexe :

Algorithme permettant de simuler le retournement d'une crêpe (python)
Lancer le code avec la commande `crepe(angle)`

```
def fract(angle): #renvois numérateur et dénominateur de la fraction angle/360 simplifiée
    d=360*10 #permet de traiter les angles à 0.1° près
    angle=int(angle*10)
    while angle%5==0 and d%5==0:
        angle=angle/5
        d=d/5
    while angle%3==0 and d%3==0:
        angle=angle/3
        d=d/3
    while angle%2==0 and d%2==0:
        angle=angle/2
        d=d/2
    return(angle,d) #retourne la fraction irréductible
```

```
def inverse(y,blanc,red): #inverse une case et met à jour les compteurs
    if y<0:
        return(-y, blanc +1,red-1)
    return(-y, blanc -1,red+1)
```

```
def trace(L, d, curseur,a): #graphique
    X=[] #liste parties rouges
    Y=[]
    V=[] #liste parties blanches
    W=[]
    A=[] #liste curseur début part
    B=[]
    C=[] #liste curseur fin part
    D=[]
    E=[]
    F=[]
    for i in range(0,int(d)): #trace part par part
        theta = np.linspace(2*i*pi/d, 2*(i+1)*pi/d, int(500./d)+1)
        if L[i]<0:
            for j in theta: #trace parts blanches
                for k in range(1,11): #hachures pour le visuel
                    X.append(k*cos(j)/10)
                    Y.append(k*sin(j)/10)
        else:
            for j in theta: #trace parts red
                for k in range(1,11): #hachures pour visuel
                    V.append(k*cos(j)/10)
                    W.append(k*sin(j)/10)
        theta=np.linspace(0, 2*pi, 200)
        for k in theta:
            E.append(cos(k))
            F.append(sin(k))
        X.append(0) #pour visuel
    Y.append(0)
    V.append(0)
    W.append(0)
    for k in range(1,11): #marque la part que l'on retournera au prochain coup
        A.append(k*cos(2*curseur*pi/d)/10)
        B.append(k*sin(2*curseur*pi/d)/10)
        C.append(k*cos(2*((curseur+a)%d)*pi/d)/10)
```

```

        D.append(k*sin(2*((curseur+a)%d)*pi/d)/10)
    pl.plot(X,Y,"r",label="cuit") #affichage des courbes et des légendes
    pl.plot(V,W,"w",label="pas cuit")
    pl.plot(A,B,"k",linewidth=6)
    pl.plot(C,D,"k",linewidth=4)
    pl.plot(E,F,"k")
    pl.axis("equal") #pour visuel
    pl.xlim(-2, 2)
    pl.ylim(-2, 2)
    pl.legend()
    pl.show() #affiche graphique

def crepe(angle): #programme à lancer precision de 0.1 degrés
    a,d=fract(angle)
    a,d=int(a), int(d)
    print('fraction :',a, '/', d) #affiche la fraction
    L=[]
    for i in range (0,int(d)): #initialisation liste représentant la crêpe
        L.append(i+1)
    blanc=d #nombre de parts blanches (non cuites)
    red=0 #nombre de parts red (cuites)
    coups=0
    print(L,"pas cuites:",blanc," cuites:",red,"coup:",coups) #affiche l'état initial
    curseur=0 #pour savoir à partir d'où on retourne la part
    x=1 #boolean pour rentrer dans le while
    trace(L,d,curseur,a)
    while ((red!=d and blanc!=d) or x==1):#pour arriver à avoir toute la crêpe retournée
        x=0 #toujours la boolean
        if a%2==0:
            for i in range (0,int(a)//2): #retournement de la part
                if i!=int(a/2):
                    b=int((curseur+i)%d) #sélection de 2 sous part qui vont se retourner et échanger leurs places
                    c=int((curseur+(a//2)-i+(a//2)-1)%d)
                    z=L[b] #retournement et échange
                    L[b],blanc,red=inverse(L[c],blanc,red)
                    L[c],blanc,red=inverse(z,blanc,red)
                else: #sous part du milieu si nombre impair de sous parts
                    b=int((curseur+i)%d)
                    L[b],blanc,red=inverse(L[b],blanc,red)
            elif a>1:
                for i in range (0,int(a)//2+1): #retournement de la part
                    if i!=int(a/2):
                        b=int((curseur+i)%d) #sélection de 2 sous part qui vont se retourner et échanger leurs places
                        c=int((curseur+a-i-1)%d)
                        z=L[b] #retournement et échange
                        L[b],blanc,red=inverse(L[c],blanc,red)
                        L[c],blanc,red=inverse(z,blanc,red)
                    else: #sous part du milieu si nombre impair de sous parts
                        b=int((curseur+i)%d)
                        L[b],blanc,red=inverse(L[b],blanc,red)
            if a==1: #cas particulier fraction numérateur = 1
                L[curseur],blanc,red=inverse(L[curseur],blanc,red)
            curseur =int((curseur + a)%d) #update du curseur pour le tour d'après
            coups=coups +1
            print(L,"cuits:",blanc,"pas cuit:",red,"coup:", coups) #affiche avancement de la liste
            trace(L, d, curseur,a) #affichage graphique
    return

```


NOTES D'ÉDITION

- (1) Comme indiqué dans la présentation, à chaque coup seule une portion est retournée, le reste de la crêpe restant inchangé ; au coup suivant une portion adjacente sera retournée, prise toujours du même côté (dans les exemples donnés, en tournant dans le sens direct).
- (2) Dans ce schéma on a représenté entièrement à droite le segment de longueur $(n+1)x-1$ devenu blanc, initialement situé à gauche, et entièrement à gauche le segment de longueur $1-nx$ échangé avec le précédent et devenu rouge, initialement situé à droite. Cela évite d'avoir à couper artificiellement l'un de ces segments, en adaptant seulement la représentation de la crêpe.
- (3) Le schéma est donné ici pour n impair ; pour n pair il suffit encore d'échanger les couleurs. Dans les deux cas on obtient la configuration du lemme suivant pour $q=1$, selon la parité de n .

LOI DE LOU 1

Il n'y a que deux nombres qui ont la propriété suivante : $A + A = n$

Ces nombres sont 0 et 2 : $2 + 2 = 4$

$$2 \times 2 = 4$$

$$0 + 0 = 0$$

$$0 \times 0 = 0$$

$$A \times A = n$$

LOI DE HANANE 1

Les nombres ne s'arrêtent jamais parce qu'on peut toujours rajouter un chiffre à l'écriture de ce nombre.

Une drôle de salle de bain

Année 2016-2017

Idriss Bensaada, Benoît Coeugnet, François Deslandes, Océane du Laurent de la Barre

Encadrés par : Florence Ferry et Claudie Asselain

Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91)

Chercheur : Maxime Ingreneau

Le sujet :

M. Exigeant a décidé de mettre du carrelage par terre dans sa salle de bain carrée ; mais il a néanmoins quelques contraintes :

- le long de chaque colonne et de chaque ligne, une couleur ne peut apparaître qu'une seule fois.
- les coins de chaque carré formé à l'intérieur de la salle de bain (quelle que soit sa taille) sont soit tous de couleurs différentes soit de deux couleurs différentes.

Combien de couleurs différentes au minimum lui faudra-t-il pour carreler sa salle de bain ?

I – Quelques exemples

Dans la suite de cet article, on dira que le carrelage est « juste » si les règles sont respectées ; dans le cas contraire, il sera dit « faux ». Nous remplacerons aussi les couleurs par des nombres ; un même nombre représentera une même couleur. Enfin, on appellera un carré $n \times n$, un carré possédant n carreaux sur une ligne (ou colonne).

1	2	3
2	1	4
3	4	1

Voici un carrelage juste avec 4 couleurs. Chaque colonne ou ligne contient bien des nombres différents et chaque carré formé a ses coins possédant 2 ou 4 nombres différents.

1	2	3	4	5	6
4	5	6	1	2	3
6	1	2	3	4	5
5	6	1	2	3	4
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2

Voici un carrelage faux utilisant 6 couleurs. Par exemple, les coins du carré encadré comportent 3 nombres différents.

Remarque : le nombre minimum de couleurs à utiliser est relié au nombre n de carreaux sur une ligne ou une colonne qui doit être composée de couleurs toutes différentes. Si le carré possède $n \times n$ carreaux, il faut au minimum n couleurs ; le maximum de couleurs correspond au nombre de carreaux sur la totalité du carré : $n \times n$.

II – Nombre de tests à effectuer

Après plusieurs exemples effectués nous nous sommes rendu compte que, pour des grands carrés, il était long de vérifier s'il était « juste ». Pour être sûrs de vérifier tous les carrés qui composent le carrelage, on a calculé le nombre de tests qu'il fallait faire pour un carré $n \times n$.

Pour un carrelage 2×2 : 1 carré à tester

Pour un carrelage 3×3 : 1 carré 3×3 et 4 carrés 2×2 à tester, donc au total 5 carrés à tester.

Pour un carrelage 4×4 : 1 carré 4×4 , 4 carrés 3×3 et 9 carrés 2×2 à tester, donc au total 14 carrés à tester.

Pour un carrelage 5×5 : 1 carré 5×5 , 4 carrés 4×4 , 9 carrés 3×3 et 16 carrés 2×2 à tester, donc au total 30 carrés à tester.

Généralisation : pour un carrelage de $n \times n$ carreaux, on aura :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 \text{ tests à faire.}$$

Le nombre de tests devient rapidement important.

Pour un carrelage 6×6 : 55 carrés à tester.

Pour un carrelage 7×7 : 91 carrés à tester.

Pour un carrelage 10×10 : 285 carrés à tester.

Nous recherchons maintenant des méthodes pour construire des carrelages justes avec un minimum de couleurs. Nous avons trouvé deux méthodes : par juxtaposition et par décalage.

III – Méthode par juxtaposition

Cette méthode consiste à poser des carrés justes les uns à côté des autres, soit en gardant le même positionnement des nombres, soit en les inversant.

1) Juxtapositions de carrés 2×2

On part d'un carré 2×2 juste :
il n'y a qu'une seule possibilité.

1	2
2	1

On le duplique pour avoir un 4×4 .
On obtient un nouveau carré juste.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

ou

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2

Nous pouvons renouveler l'opération indéfiniment.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5	8	7
4	3	2	1	7	8	5	6
3	4	1	2	8	7	6	5
5	6	7	8	1	2	3	4
6	5	8	7	2	1	4	3
7	8	5	6	4	3	2	1
8	7	6	5	3	4	1	2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15
4	3	2	1	7	8	5	6	11	12	9	10	15	16	13	14
3	4	1	2	8	7	6	5	12	11	10	9	16	15	14	13
5	6	7	8	1	2	3	4	13	14	15	16	9	10	11	12
6	5	8	7	2	1	4	3	14	13	16	15	10	9	12	11
7	8	5	6	4	3	2	1	15	16	13	14	11	12	9	10
8	7	6	5	3	4	1	2	16	15	14	13	12	11	10	9
9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8
10	9	12	11	14	13	16	15	2	1	4	3	6	5	8	7
11	12	9	10	15	16	13	14	4	3	2	1	7	8	5	6
12	11	10	9	16	15	14	13	3	4	1	2	8	7	6	5
13	14	15	16	9	10	11	12	5	6	7	8	1	2	3	4
14	13	16	15	10	9	12	11	6	5	8	7	2	1	4	3
15	16	13	14	11	12	9	10	7	8	5	6	4	3	2	1
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	3	4	1	2

Nous pensons pouvoir ainsi construire tous les carrelages $2^n \times 2^n$ avec 2^n couleurs ce qui est le minimum possible. Nous avons ensuite essayé de juxtaposer de plusieurs façons des carrelages justes 2×2 pour former un 6×6 mais nous n'avons pas trouvé de carrelage juste. En voici un exemple où les coins du carré encadré sont 3 nombres différents :

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
5	6	1	2	3	4
6	5	2	1	4	3
3	4	5	6	1	2
4	3	6	5	2	1

Pour le 6×6 nous n'avons pas réussi à le faire en moins de 7 couleurs. Le voici :

1	2	3	4	5	6
5	6	7	1	2	3
2	3	4	5	6	7
6	7	1	2	3	4
3	4	5	6	7	1
7	1	2	3	4	5

Nous avons ensuite essayé de juxtaposer d'autres carrelages que des 2×2 .

2) Juxtapositions de carrés 3×3

Le carré 3×3 ne peut pas se faire en 3 couleurs. Démontrons-le.

Etape 1 : on remplit la première ligne avec 3 couleurs différentes.	Etape 2 : 2 cas possibles pour la place du 1 sur la ligne 2.		Etape 3 : On remplit la deuxième et la troisième ligne sans avoir le choix.																																														
<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3							<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3		1					<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3			1				<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	1	2	3	3	1	2	2	3	1	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	1	2	3	2	3	1	3	1	2
1	2	3																																															
1	2	3																																															
	1																																																
1	2	3																																															
		1																																															
1	2	3																																															
3	1	2																																															
2	3	1																																															
1	2	3																																															
2	3	1																																															
3	1	2																																															

Aucun cas ne donne un carré juste.

Il nous faut minimum 4 couleurs pour faire un carrelage 3×3 juste ; nous avons un exemple dans le I.

En juxtaposant des carrelages 3×3 justes nous ne sommes pas arrivés à en trouver des justes.

3) Juxtapositions de carrés 5×5

Pour le 5×5 nous avons réussi à le faire en 5 couleurs, ce qui est le minimum, ainsi que le 10×10 en 10 couleurs, le 20×20 en 20 couleurs et le 25×25 en 25 couleurs, par juxtaposition de carrés 5×5 justes en procédant de même que le 2×2 . Nous pensons que cette méthode peut nous faire construire des $5^n \times 5^n$ en 5^n couleurs minimums ; par contre nous ne sommes pas arrivés à former le 15×15 Voici un exemple :

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	1	2	3	9	10	6	7	8
2	3	4	5	1	7	8	9	10	6
5	1	2	3	4	10	6	7	8	9
3	4	5	1	2	8	9	10	6	7
6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
9	10	6	7	8	4	5	1	2	3
7	8	9	10	6	2	3	4	5	1
10	6	7	8	9	5	1	2	3	4
8	9	10	6	7	3	4	5	1	2

10 couleurs minimum pour le 10×10

Après de nombreux essais, nous pensons que si on peut construire un carré $n \times n$ en n couleurs et un carré $m \times m$ en m couleurs alors on pourra fabriquer un carré $nm \times nm$ en nm couleurs ; nous n'avons pas réussi à le démontrer.

Voici aussi d'autres conjectures :

- les carrés $5^n \times 5^n$ ainsi que les $5 \times 2^n \times 5 \times 2^n$ se font en un minimum de couleurs par juxtapositions.

- Pour n premier sauf 3 : le carré $n \times n$ se fait en n couleurs minimum, $n^k \times n^k$ se fait en n^k couleurs minimums par juxtaposition de carrés $n \times n$ ainsi que les carrés $n \times 2^k \times n \times 2^k$ qui se font en $n \times 2^k$ couleurs minimums.

III – Méthode par décalage

Nous avons réussi à obtenir des carrés avec un minimum de couleurs, simplement en décalant les couleurs de la première ligne pour obtenir les lignes suivantes.

Voici un exemple :

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

On commence par remplir la première ligne avec les 5 nombres différents, puis on décale le 1 de deux cases vers la droite et on descend d'une ligne. On complète la suite de nombres sur la deuxième ligne ; ainsi tous les nombres de la première ligne sont décalés de 2 rangs vers la droite pour obtenir la deuxième ligne ; on continue à décaler le 1 de deux cases et on complète la ligne suivante et ainsi de suite jusqu'à ce que le carrelage soit fini. Nous obtenons ici un carrelage juste.

Etudions maintenant différents décalages.

1) Diviseurs

Tout d'abord, le décalage avec un diviseur du nombre n de carreaux sur un côté donne un carrelage faux. En effet, le 1 se retrouvera sur une certaine ligne dans sa colonne de la ligne de départ.

Exemple : On prend un carrelage 9×9 et on essaie de décaler de 3 rangs.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	8	9	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	8	9	1	2	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	8	9	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	8	9	1	2	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	8	9	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	8	9	1	2	3

Le 1 de la première ligne est revenu à sa position initiale 3 lignes plus loin.

2) Décalage de 1 ou -1

Les carrelages formés avec un décalage de 1 ou de -1 donneront un carrelage faux car les coins en haut à gauche et en bas à droite seront de la même couleur alors que les deux autres coins seront de couleurs différentes (excepté le 2×2) :

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Après avoir fait beaucoup de tests, nous avons remarqué que pour les carrelages avec un nombre de carreaux n impair, le décalage de 2 permettait toujours d'obtenir un carrelage juste en n couleurs sauf pour les carrelages où n est multiple de 3, ils ne sont pas réalisables en n couleurs par une méthode de décalage.

3) Nous avons fait une démonstration pour le 5×5 avec un décalage de 2.

1	2	3	4	5	1	⇐	On numérote les lignes
4	5	1	2	3	2		
2	3	4	5	1	3		
5	1	2	3	4	4		
3	4	5	1	2	5		
1	2	3	4	5		⇐	On numérote les colonnes

Contrainte sur les lignes :

Chaque couleur est représentée sur la ligne 1 ; on décale les couleurs de 2 colonnes à chaque ligne, il y a toujours les 5 couleurs différentes sur chaque ligne.

Contrainte sur les colonnes :

Prenons par exemple le 1, il se trouve dans la première colonne en décalant la suite, le 1 va se retrouver dans la 3 colonne, puis dans la 5, la 2, et la 4.

Avec un schéma :

colonne 1 → colonne 3 → colonne 5 → colonne 2 → colonne 4



On se rend compte que peu importe la couleur que l'on prend sur la première ligne, en décalant de 2 à chaque fois, il n'y aura jamais deux couleurs identiques dans une même colonne.

La première contrainte est respectée, il faut maintenant regarder les coins des carrés.

Carrés 2×2 : Les coins opposés de ces carrés n'ont un décalage que de 1 colonne ; or, on décale de 2 donc les coins de ces carrés sont tous de couleurs différentes.

Carrés 3×3 : Les coins opposés de ces carrés n'ont un décalage que de 2 colonnes, le bas du carré se trouve 3 lignes plus bas que le haut donc il faut décaler de 4 colonnes. Les coins seront donc tous différents.

Carrés 4×4 : Les coins opposés de ces carrés n'ont un décalage que de 3 colonnes, le bas du carré se trouve 4 lignes plus bas que le haut donc il faut décaler de 6 colonnes c'est-à-dire de 1. Les coins seront donc tous différents.

Il reste les 4 coins du grand carré à vérifier : ils sont également tous différents.

Toutes les contraintes sont respectées donc notre décalage de 2 sur le carrelage 5×5 nous donne un carrelage juste avec un minimum de couleurs.

4) Carrelage $n \times n$ avec n pair

Nous pensions que le décalage serait possible aussi avec un nombre pair de carreaux sur une ligne, mais nous n'en avons réussi aucun.

5) Autres résultats et conjectures

Pour les carrelages de 9×9 aucun décalage inférieur à 9 ne donne de solution même si le décalage n'est pas un diviseur de 9.

Voici un tableau récapitulatif de nos essais avec décalages. Lorsque le décalage donne un carrelage juste, on met « oui », sinon on met « non ».

Décalage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3×3	Non	Non	x	x	x	x	x	x	x	x	x
5×5	Non	Oui	Oui	Non	x	x	x	x	x	x	x
7×7	Non	Oui	Oui	Oui	Non	Non	x	x	x	x	x
9×9	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Non	x	x	x
11×11	Non	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Non	x

Il semble que les multiples de 3 ne soient pas faisables par décalage. Un résultat est surprenant c'est le « non » pour le décalage de 5 du 7×7 .

Conclusion

Nous avons suivi deux pistes : celles des juxtapositions et celles du décalage. Elles nous ont fourni quelques résultats (nous pouvons carrelers la salle de bain de M. Exigeant dans beaucoup de cas), mais aussi beaucoup de conjectures, sur lesquelles il nous faudrait travailler encore : le sujet est riche !

LOI DE LOUISE 2

Les multiples de 5 se terminent tous par 0 ou par 5.

Impossible ? Mon œil !

Année 2017-2018

*Lucile Cazade, Beverly Delannoy, Aloÿs Clef, Laurène Manry, Adèle Broussé, Mathis Van-Riel,
Elisa Forsans, Mailie Tresmontan, Manon Fouillen, élèves de troisième.*

Encadrés par : Marie Billard et Cathy Arriau.

Établissement : Collège Gaston Fébus Orthez

Chercheur : Jacky Cresson, Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau

Présentation du sujet

Nous nous sommes intéressés cette année aux illusions d'optique. Peut-on toujours se fier à ce que l'on voit ?

Dans une première partie, nous vous présenterons le paradoxe de Hooper, puzzle dans lequel le déplacement des pièces pour obtenir la même figure de base fait apparaître un carré manquant.

Nous utiliserons trois outils mathématiques différents pour expliquer ce résultat.

Ensuite, nous verrons une illusion d'optique : un chaos dans lequel tout est finalement ordonné.

A l'aide de propriétés géométriques, nous verrons que notre œil peut nous jouer de sacrés tours !

Et pour finir, nous étudierons le célèbre triangle de Penrose, dessin d'un objet que l'on a voulu construire en 3D.

Pourquoi est-ce impossible de l'obtenir ? En enlevant certaines contraintes que nous nous fixons naturellement, pouvons-nous le réaliser ?

1. Annonce des conjectures et résultats obtenus

Nous nous sommes demandé si ce que l'on voit est la réalité, si l'on peut se fier à l'interprétation de notre œil.

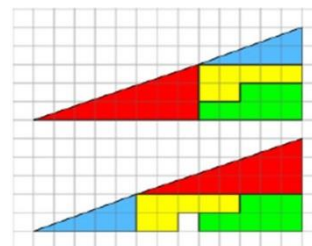
En observant le paradoxe de Hooper, il était évident que non et nous nous sommes interrogés sur l'utilité des démonstrations en mathématiques.

Nous avons obtenu différents résultats, que nous allons vous présenter tout au long de cet article.

2. Texte de l'article

A. Le paradoxe de Hooper

Cette figure est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent : 13 unités et 5 unités composé de plusieurs petites figures. Si on les déplace pour obtenir le même triangle de même mesure, on se rend compte qu'il manque une unité d'aire. Nous avons travaillé sur trois façons différentes pour résoudre le problème.



i. Preuve avec le théorème de Thalès

Il y a trois façons de résoudre le problème du paradoxe de Hooper. Notre groupe a choisi de le faire avec le théorème de Thalès.

Dans ce théorème, il y a deux hypothèses :

- les points sont alignés (ici B, E, C d'une part et B, D, A d'autre part)
- les droites sont parallèles (ici (DE) et (AC))

On a :

$$AC = 5 ; CE = 5 ; DE = 3 ; EB = 8.$$

$$\frac{DE}{AC} = \frac{3}{5} = \frac{39}{65}, \quad \frac{EB}{CB} = \frac{8}{13} = \frac{40}{65}$$

On constate que $\frac{DE}{AC} \neq \frac{EB}{CB}$, donc une des deux hypothèses citées ci-dessus n'est pas vérifiée.

Les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires à la droite (EC) , donc elles sont parallèles entre elles. Ainsi, cette hypothèse est vérifiée.

Les points B, E et C étant alignés par construction, ce sont les points B, D et A qui ne le sont pas.

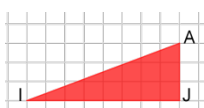
ii) Preuve avec les aires

Afin de démontrer le carré manquant, nous avons travaillé sur les aires.

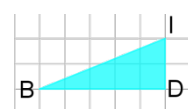
Tout d'abord nous avons calculé l'aire du triangle ABC .

$$A_{ABC} = \frac{13 \times 5}{2} = 32,5 \text{ unités d'aire}$$

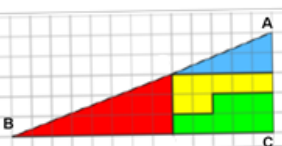
Ensuite, nous avons calculé l'aire de chaque petite pièce :

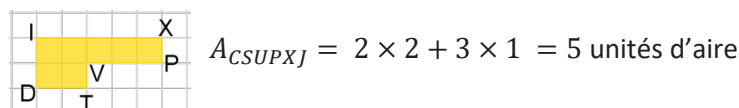
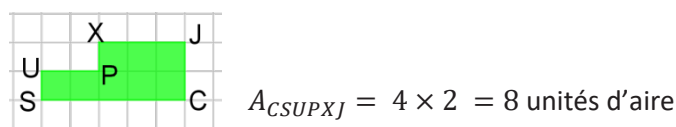


$$A_{AIJ} = \frac{8 \times 3}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ unités d'aire}$$



$$A_{IBD} = \frac{5 \times 2}{2} = 5 \text{ unités d'aire}$$



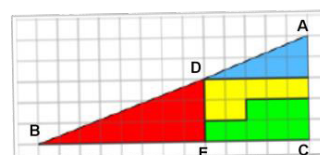


En additionnant chacune de celles-ci, nous avons 32 unités d'aire.

Ces deux aires ne sont pas égales. On observe une différence de 0,5 unité d'aire, mais cette différence ne peut pas expliquer la totalité du carré manquant (1).

iii) Preuve avec la trigonométrie

Nous avons calculé l'angle $\hat{B}$ dans le petit triangle EBD et l'angle $\hat{B}$ dans le grand triangle ABC afin de justifier l'absence de ce carré.



Dans le triangle ABC , rectangle en C , $\tan \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}$, $\hat{B} \approx 21,04^\circ$

Dans le triangle EBD , rectangle en E , $\tan \hat{B} = \frac{DE}{BE} = \frac{3}{8}$, $\hat{B} \approx 20,6^\circ$

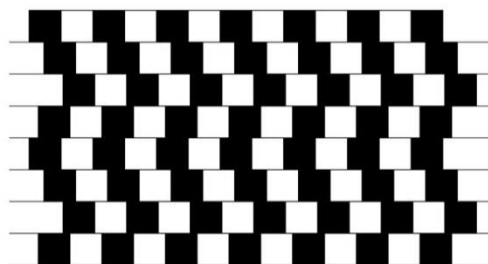
On constate que les deux valeurs trouvées pour le même angle ne sont pas égales.

On en conclut que le carré manquant est dû à un léger décalage au niveau du segment $[BA]$.

B. Ces droites sont-elles parallèles ?

Lorsque nous regardons cette figure, nous pensons tous : « ces droites ne sont pas parallèles ».

Mais, comme nous le disions en introduction, faut-il toujours se fier à ce que l'on voit ? C'est pourquoi nous avons décidé d'étudier cette figure plus en détail.

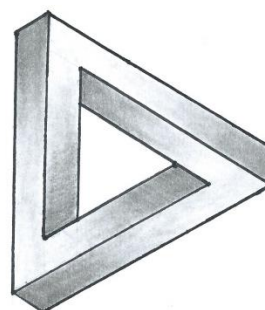


Nous allons vous démontrer que les droites de cette figure sont bien parallèles.

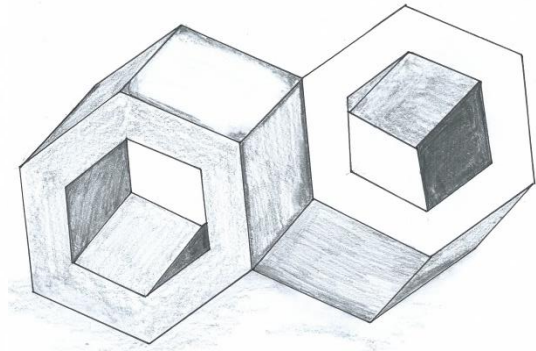
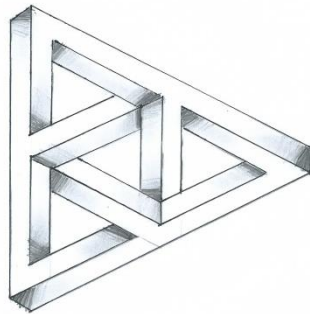
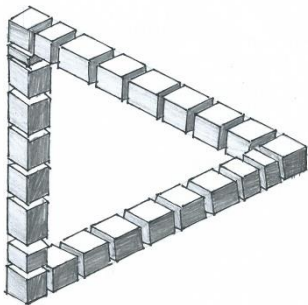
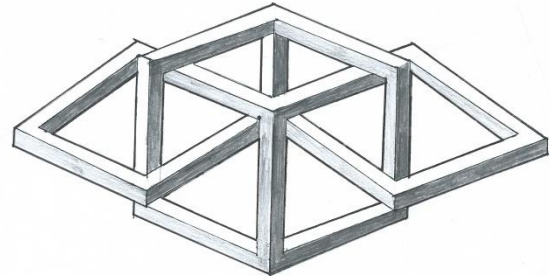
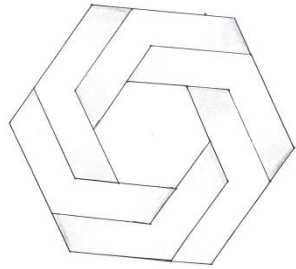
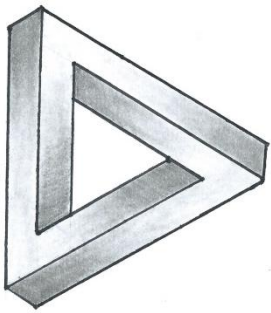
On sait qu'un côté d'un carré est perpendiculaire à un autre alors nous savons que si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles par conséquent toutes les droites de cette figure sont parallèles,

C. Peut-on construire le triangle de Penrose ?

Dans cette partie, nous allons chercher si le célèbre triangle de Penrose peut être construit en un solide fermé.



Nous avons auparavant essayé de dessiner ce triangle ainsi que d'autres figures dites « impossibles »

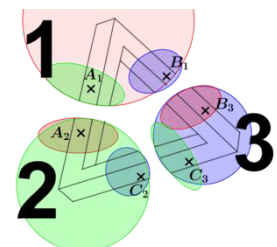
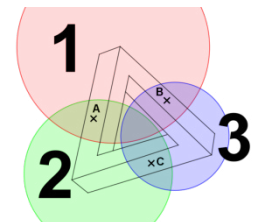


Partons du dessin du triangle de Penrose qui existe forcément.

Plaçons les points A, B et C comme indiqué ci-contre.

Quand on « éclate » le dessin, le point A devient alors deux points : les points A_1 et A_2 .

On procède de la même façon pour les points B et C .

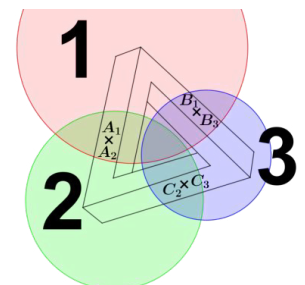


Pour reconstruire le triangle, il faut arriver à recoller les trois morceaux. Il faut donc que A_1 et A_2 se superposent, de même pour B_1 et B_2 , C_1 et C_2 .

Appelons O l'observateur. On a donc OA_1 est la distance du point A_1 du dessin à l'observateur. De même pour $OA_2, OB_1, \dots$

Notons : $d_{12} = \frac{OA_1}{OA_2}$; $d_{31} = \frac{OB_1}{OB_3}$; $d_{23} = \frac{OC_2}{OC_3}$.

Comme le dessin existe, les points A_1 et A_2 se superposent donc $d_{12} = 1$.

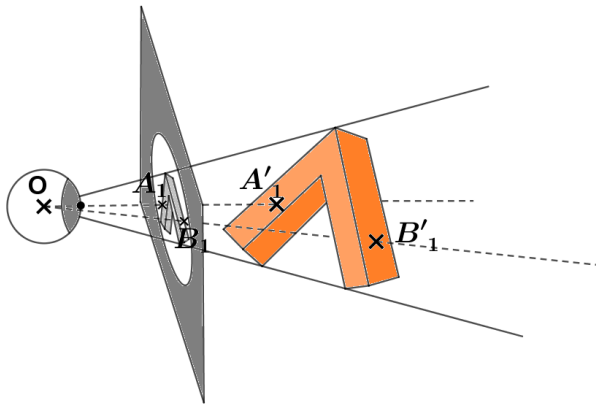


De même, $d_{31} = 1$ et $d_{23} = 1$

Si on veut construire le solide correspondant, on peut construire facilement chaque morceau séparément à partir de deux parallélépipèdes rectangles

Peut-on positionner les trois objets dans l'espace de façon à former l'objet correspondant au dessin ?

Si l'on regarde l'objet. Appelons A'_1 le point correspondant au point A_1 sur le dessin, A'_2 le point correspondant au point A_2 sur le dessin, et ainsi de suite.



Nous ne savons pas où sont situés les objets dans l'espace, ils peuvent être grands et derrière ou petits et devant.

Les dimensions de l'objet 1 a été multipliées par un certain coefficient λ_1 , l'objet 2 par un certain coefficient λ_2 , ainsi que l'objet 3 par un coefficient λ_3 .

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \bullet \quad OA'_1 &= \lambda_1 OA_1 \\ \bullet \quad OB'_1 &= \lambda_1 OB_1 \end{aligned}$$

et, de la même façon :

$$\begin{aligned} \bullet \quad OA'_2 &= \lambda_2 OA_2 \\ \bullet \quad OC'_2 &= \lambda_2 OC_2 \\ \bullet \quad OB'_3 &= \lambda_2 OB_3 \\ \bullet \quad OC'_3 &= \lambda_2 OC_3 \end{aligned}$$

On a donc trois nouveaux rapports de distances :

$$d'_{12} = \frac{OA'_1}{OA'_2} = \frac{\lambda_1 OA_1}{\lambda_2 OA_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} d_{12}$$

$$d'_{31} = \frac{OB'_3}{OB'_1} = \frac{\lambda_3 OB_3}{\lambda_1 OB_1} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} d_{31}$$

$$d'_{23} = \frac{OC'_2}{OC'_3} = \frac{\lambda_2 OC_2}{\lambda_3 OC_3} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} d_{23}$$

Or, nous avons vu que $d_{12} = d_{31} = d_{23} = 1$

Donc $d'_{12} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$; $d'_{31} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$ et $d'_{23} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$.

Si nous décidons de multiplier ces rapports de distance, nous avons donc :

$$d'_{12} \times d'_{31} \times d'_{23} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \times \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = 1$$

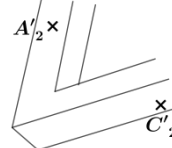
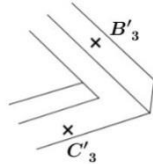
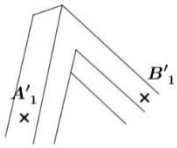
Si l'on revient à la définition de départ de d'_{12} , d'_{31} et d'_{23} , nous obtenons :

$$\frac{OA'_1}{OA'_2} \times \frac{OB'_3}{OB'_1} \times \frac{OC'_2}{OC'_3} = 1$$

Et, en réorganisant les numérateurs et les dénominateurs,

$$\frac{OA'_1}{OB'_1} \times \frac{OB'_3}{OC'_3} \times \frac{OC'_2}{OA'_2} = 1$$

Or, en regardant les solides, nous nous rendons compte, en supposant que l'observateur est en face, que :



$$OA'_1 < OB'_1, \quad OB'_3 < OC'_3 \quad \text{et} \quad OC'_2 < OA'_2.$$

Donc le produit de ces trois quotients est inférieur à 1.

Ainsi, nous obtenons une contradiction donc on ne peut pas recoller les trois morceaux.

Le triangle de Penrose ne peut pas être construit en un solide fermé.

Par contre, si on enlève la contrainte « le solide doit être fermé », que nous nous mettons naturellement, il est alors possible de le construire. C'est ce que nous avons fait pendant cet atelier, nous avons réussi à reconstruire le triangle en un solide ouvert en collant trois bouts de bois perpendiculairement. En les plaçant correctement par rapport à notre œil le triangle de Penrose apparaît en un solide fermé. Nous l'avons matérialisé dans une boîte où nous avons fait un trou qui permettait d'orienter l'œil dans le bon angle.



Vue par le trou de la boîte



Vue sur le côté de la boîte

Après avoir étudié ces trois exemples, nous pouvons affirmer que nos perceptions dépendent de notre œil. Il n'est parfois pas assez précis pour détecter des erreurs d'alignement (paradoxe de Hooper), il nous fait croire que des droites ne sont pas parallèles alors qu'elles le sont, il nous permet de voir un objet différent de l'objet réel (triangle de Penrose).

Comme notre œil nous joue de mauvais tours, nous avons pris conscience de l'importance de la démonstration.

NOTES D'ÉDITION

(1) Si, en effet, car il y a par le même argument une différence de 0.5 unité d'aire entre l'aire du polygone ACBD dans la deuxième figure de la page 326 (on sait maintenant que A,B et D ne sont pas alignés) et l'aire du triangle ABC.

LOI DE MANUEL 1

Si n est n'importe quel nombre,
 $N + (2 \times N) + (3 \times N) + (4 \times N) = 10 \times N$.
Exemple : $12 + 24 + 36 + 48 = 120$

We get 2017

Année 2017-2018

*Yohan Gourbière, Maelys Peltier, Sara Crespo, Claire Kewan, Sarah-Lou Morgen (lycée Arago) ;
Andreea Vasile, Irina Pana, Veronica Sturzu (National College B. P. Hasdeu)*

Encadrés par : Bogdan Enescu, Marie Diumenge, Christelle Quéru

Etablissements : Lycée Arago (Perpignan, France), National College B. P. Hasdeu (Buzau, Romania)

Chercheurs : Robert Brouzet, Bogdan Enescu

I) OUR PROJECT AND THE CHOICE OF THE SUBJECT

This year we had the opportunity to participate in MATH.en.JEANS, an exchange of experience between Romanian and French people*, where we have acquired a lot of information while working together as a team and discovering a universe where Mathematics offer us the chance to move between digits, but most importantly to see beyond the numbers. We have chosen a problem that inspired us and made us realise how many stories and relations could be hidden in some numbers, just if we let our minds play around with them and create new ones. Beyond each digit, each number, each equation there is an idea, waiting to be discovered. As we discover logically, we are closer to being able to move the Mathematics' world and finally see it differently.

Our project consisted in choosing a problem from a list of subjects, being proposed to be solved during a few months. After a lot of attempts, we have finally reached the answer and we exposed our problem at the Mathematics conference, placed by ERASMUS in Montpellier to a grand audience whose attention we tried, as much as possible, to capture with our interesting method of solving it.

Our subject sounded like this: *"At the beginning you only have an empty blackboard. At each step you can either write twice the number 1 on the blackboard or delete two numbers equal to n already written and replace them by $n - 1$ and $n + 1$. How many steps at least will be necessary in order to reach the number 2017?"*

Not only we saw in this problem the opportunity to master mathematical knowledge, but we also saw the beauty of some simple numbers that can hide unexpectedly complex ideas. The most beautiful discoveries in Mathematics were hidden in just some simple ideas which have been found step by step, by moving each number and giving it a new meaning.

II) OUR SOLUTION

A. The “bad” idea

First of all, we thought that in order to reach 2017 we need 2 of 2016, because to reach n , we need 2 numbers of $n - 1$. That is one step. In order to reach 2 of 2016, we need for each one 2 of 2015, meaning that we need 4 of 2015, and this means two steps. We continued with this idea until we wanted to reach 2 from 1. But how many numbers of 2 and how many numbers of 1 will be needed and how many steps are there?

We observed the next rule: to reach 2017 from 2016 there are 2^0 steps. To reach 2016 from 2015, there are 2^1 steps. Therefore, reaching n from $n - 1$ takes 2^{2017-n} steps.

To reach 2 from couples of 1, there are 2^{2015} steps and to write on the blackboard all the couples of 1, there are also 2^{2015} steps.



2017 $\rightarrow$ 2016 $\rightarrow 2^0$ steps

2016 $\rightarrow$ 2015 $\rightarrow 2^1$ steps

2015 $\rightarrow$ 2014 $\rightarrow 2^2$ steps

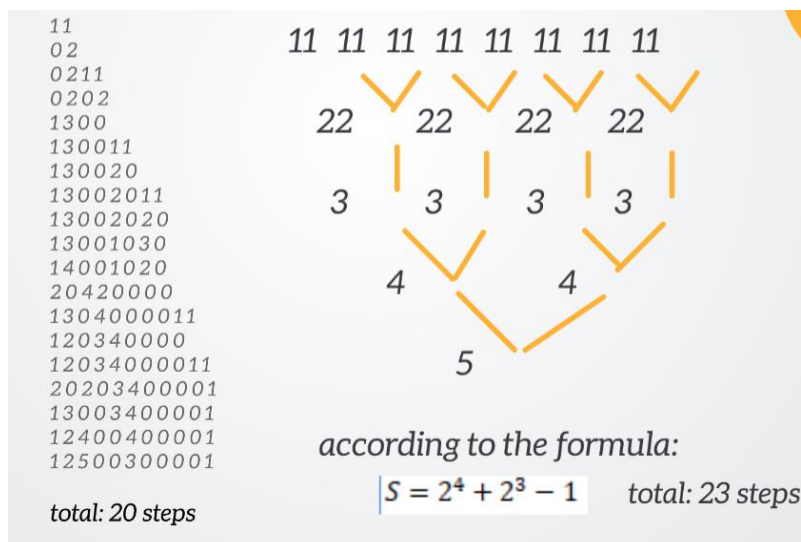
...

2 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow 2^{2015}$ steps

In order to find the total number of steps, we have to sum up all of the steps that we have done in order to get every number.

$$\begin{aligned}
 \text{steps: } & 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2015} + 2^{2015} \\
 S = & 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2015} + 2^{2015} \quad | \times 2 \\
 2S = & 2^1 + 2^2 + 2^3 \dots + 2^{2016} + 2^{2016}
 \end{aligned}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{aligned}
 S = 2S - S = & 2^{2016} + 2^{2016} - 2^{2015} - 1 = \\
 & 2^{2016} + 2^{2015}(2 - 1) - 1 \\
 = & 2^{2016} + 2^{2015} - 1
 \end{aligned}$$

Unfortunately, after the joy of thinking that we solved the problem, we had found a contradiction (1).



B. The good idea

After rethinking the problem, we have found the main idea for our subject in order to have the minimum number of steps.

- Each time we find a couple, we will transform it (so that we get the minimum number of steps) (2).
- If we have a choice between 2 couples, it is preferable that we transform the couple with greater numbers.
- If the pairs are only couples of zeroes, then we add two ones again and we do not change them.

Using these rules, we have found the next lines. Each line represents one step.

- 11
- 20
- 2011
- 2020
- 3100
- 310011
- 321000

We wanted to discover a rule which could have helped us to find the number of the line and we wanted to find a connection between the numbers on the line and the line itself. At every step, there are two possibilities, either we add 11, either we erase nn and add $n - 1$ and $n + 1$. And we found out that **if we calculate the sum of squares of the numbers on every line, we find an interesting property: the sum increases by 2.**

- If we have a line with some numbers which sum of squares is S and we add 1 1, then the sum of squares on the next line becomes $S + 1^2 + 1^2 = S + 2$.
- If we have a line with some numbers and also, the numbers $n n$, the sum of squares will be $S + n^2 + n^2 = S + 2n^2$ (3). If we erase them and we will add $n - 1$ and $n + 1$, the sum of squares becomes : $S + (n - 1)^2 + (n + 1)^2 = S + n^2 - 2n + 1 + n^2 + 2n + 1 = S + 2n^2 + 2$.

The reason why these relations will help us further is, maybe not so obviously, reaching the number of steps. As we sum up the squares of the numbers from each line, we get a certain sum that divided by 2 will offer us the exact number of steps, as presented lower:

11	1 1	$1^2 + 1^2 = 2 = 2 \times 1$
20	2 0	$2^2 + 0^2 = 4 = 2 \times 2$
2011	2 0 1 1	$2^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 = 6 = 2 \times 3$
2020	2 0 2 0	$2^2 + 2^2 = 8 = 2 \times 4$
3100	1 3 0 0	$1^2 + 3^2 = 10 = 2 \times 5$
310011	1 3 0 0 1 1	$1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 12 = 2 \times 6$
321000		

C. The last line

In order to calculate the number of steps, we need the numbers on the last line. Lower, we pointed out the lines where the greatest number appears for the first time (4). On one of these lines, there could be either the following:

Rule 1) $N, N - 2, N - 3, \dots, 3, 2, 1$

OR

Rule 2) $N, N - 2, N - 3, \dots, 3, 2, 1, 1$

We will prove those rules using induction. For the first case, when N is 3 for example, we see that one of that rules applies. We assume that the rule applies for N and we will prove that the rule applies also for $N + 1$.

I will assume that the following rule applies (5):

$N \ N-2 \ N-3 \ N-4 \ \dots \ 3 \ 2 \ 1$
 $N \ N-2 \ N-3 \ N-4 \ \dots \ 3 \ 2 \ 1 \ 1$
 $N \ N-2 \ N-3 \ N-4 \ \dots \ 3 \ 2 \ 1 \ 0$
 $N \ N-2 \ N-3 \ N-4 \ \dots \ 5 \ 4 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 0$
 $N \ N-2 \ N-3 \ N-4 \ \dots \ 5 \ 4 \ 4 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0$
 $\dots$
 $N \ N-2 \ N-3 \ N-4 \ N-5 \ \dots \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0$
 $N \ N-2 \ N-3 \ N-4 \ N-5 \ \dots \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0$
 $N \ N-1 \ N-3 \ N-4 \ N-5 \ \dots \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0$
 $\uparrow$
 $N-2$ IS MISSING
 $N \ N-1 \ N-3 \ N-4 \ N-5 \ \dots \ 4 \ 3 \ 2 \ 0 \ 0$
 $N \ N-1 \ N-3 \ N-4 \ N-5 \ \dots \ 4 \ 3 \ 3 \ 1 \ 0 \ 0$
 $N \ N-1 \ N-3 \ N-4 \ N-5 \ \dots \ 5 \ 4 \ 4 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0$
 $\dots$
 $N \ N-1 \ N-3 \ N-4 \ N-5 \ \dots \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0$
 $N \ N-1 \ N-2 \ N-4 \ N-5 \ \dots \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0$
 $\uparrow$
 $N-3$ IS MISSING

11	
2020	5004030002000011
3100	5004030002000020
310011	5004030003000010
300201	5004040002000010
30020111	5005030002000010
30020201	6004030002000010
30030101	600403000200001011
40020101	600403000200002001
40020200	600403000300001001
40030100	600404000200001001
4003010011	600503000200002000
4003020001	600503000300001000
400302000111	600504000200001000
400302000201	60050400020000100011
400303000101	60050400020000200001
400402000101	60050400030000100001
500302000101	60050400030000200000
500302000200	6005040003000020000011
500303000100	6005040003000020000020
500402000100	6005040003000030000010
50040200010011	6005040004000020000010
50040200020001	6005050003000020000010
50040300010001	6006040003000020000010
50040300020000	7005040003000020000010

Now, every time we will add 11, that sequence will repeat, but finally, on the last line another number will miss.

For example, on the first blue line $N - 2$ is missing, then on the second one, $N - 3$ is missing. On the next one $N - 4$ will miss, then $N - 5$ and so on until we will reach this line:

N N-1 N-2 N-3 N-4..... 5 4 3 1 1 (2 IS MISSING) (6)
 N N-1 N-2 N-3 N-4..... 5 4 3 2 0
 N N-1 N-2 N-3 N-4..... 5 4 3 2 0 1 1
 N N-1 N-2 N-3 N-4 5 4 3 2 0 0
 N N-1 N-2 N-3 N-4 5 4 3 3 1 0 0

 N N-1 N-1 N-3 3 2 1 0 0
 N N-2 N-3 N-4 3 2 1 0 0
 N+1 N-1 N-2 N-3 N-4..... 3 2 1 0 0

WE DID NOT
 WRITE ALL THE 0
 FROM EVERY LINE
 AND ALSO ON THE
 LAST LINE IT COULD
 BE ONE NUMBER OF
 1 OR TWO
 NUMBERS OF 1,
 THIS DEPENDS AND
 THIS IS WHY THERE
 ARE 2 RULES. WE
 WILL PROVE BELOW
 WHICH RULE APPLY.

D. The evenness of the sum

The sum remains even at all times.

We start with 11. If we sum them up, we get 2, an even number. Then, the sum of 11 couples that we add in order to reach the wanted number is even, and this sum adds to the previous sum (which is also even), resulting in an even sum. The case in which we end up with n couples ($n + n = 2n$ is even) we will write $n - 1$ and $n + 1$ whose sum is even also ($n - 1 + n + 1 = 2n$).

Coming back, we have to find out when to apply the first rule and when to apply the second one, in order to precisely reach the last line.

Let's take some examples:

40020101
 6004030002000010



QUICK REMINDER:
*Everything depends on the
 evenness of the sums.*

If the sum is even (7):

- A. If the greatest number is even, we won't need another 1, so the first rule applies.
 (ex. 6004030002000010)
- B. If the greatest number is odd, we need another 1, so the second rule applies.
 (ex. 500302000101)

If the sum is odd:

- A. If the greatest number is even, we need another 1, so the second rule applies.
 (ex. 40020101).
- B. If the greatest number is odd, we don't need another 1, so the first rule applies
 (ex. 7005040003000020000010).

E. The actual last line

In order to check whether or not there is another 1 on the last line, we have to consider the evenness of the sum, excluding 2017.

Our last line: 2017 2015 2014 2013 ... 3 2 1 [1?]

$$\begin{aligned} S &= 2015 + 2014 + 2013 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ &= (2015 + 1) + (2014 + 2) + (2013 + 3) + \dots + (1009 + 1007) + 1008 \\ &= 2016 \times 1007 + 1008 = 1008 \times (2014 + 1) = 2015 \times 2016 / 2 = 2031120 \end{aligned}$$

The sum is even and 2017 is odd, therefore there are two ones on the last line:

$$2017 \ 2015 \ 2014 \ 2013 \ \dots \ 3 \ 2 \ 1 \ \mathbf{1}$$

F. We get 2017

The number of steps for the wanted number

$$S = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2014^2 + 2015^2 + 2017^2$$

$$S' = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$$

Let's prove this through induction. Following the steps of induction proof, we have to verify the formula for $n = 1$. Then, we suppose that the formula is accurate for some $k \geq 1$ and we verify it for $n = k + 1$.

$$1^2 = 1$$

$$\frac{(1+1)(2+1)}{6} = 1$$

For $n = k + 1$

$$S' = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1-1)^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{k \times (k+1) \times (2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{1}{6} (k+1) [k(2k+1) + 6(k+1)]$$

$$= \frac{1}{6} (k+1)(2k^2 + 7k + 6) = \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2k+3) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_{2017} = \frac{\frac{2015 \times 2016 \times 4031}{6} + 1 + 2017^2}{2} = 1366608265$$

FINAL THOUGHTS

Our problem is not based on very difficult formulas, having the possibility to be understood by all ages. What would attract the public would be the fact that it is easy to comprehend, even if it has very interesting ideas. This problem is an opened universe even for children, being a problem that becomes more and more interesting as you discover new ideas. What links our problem to the subject of movement? We are playing with the numbers, we make the digits move and we give them sense. Every digit has a purpose. We use endless lines of numbers, but by moving them and putting them in order, not only we simplify our work, but we also make associations and discover new properties.

Take a look at this line, it is meaningless: 00004 10020006003,

but if we move the numbers, we get something interesting: 6 4 3 2 1 000000000000

In mathematics everything is moving. We cannot wait a number to show us a universe. We have to move the numbers in order to find the universe. And our problem let us do that.

NOTES D'ÉDITION

(1) This is not really a contradiction. The example below shows that the “bad idea” doesn’t give the least number of steps to reach a given number.

(2) This strategy is certainly a good idea, much more efficient than the “bad” one, as the final result shows, and one can conjecture that it is the best possible.

However, it is not proved that it gives the minimal number of steps.

(3) This time, the sum S doesn’t include the squares of the pair $n\ n$ to be deleted.

(4) In the table below, two lines are missing between 11 and 2020 : 20 and 2011.

(5) Here the first sequence ends with 321, according to “rule 1”, and we find later on “blue” lines (lines without pair $n\ n$ other than 11) ending with 3211 and 321 alternately. If we begin with “rule 2”, the scheme is the same except that these last terms will appear in the opposite order.

(6) The line here could as well end with a single 1, depending on the parity of N (here, with a pair of 1, we have an odd number of alternances between “ $N-1$ is missing” and “2 is missing”, so N has to be even).

(7) Here, the sum refers to the sum of the numbers except for the largest one, and taking in account only one 1, that is $(n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1$ if the largest number is n .

LOI DE BASTIEN 2 (POUR LIRE LE TABLEAU) :

horizontalement, le chiffre que l’on multiplie ; **verticalement**, combien de fois on le multiplie par lui-même.
A l’intérieur des cases, on trouve le dernier chiffre du résultat.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1 1 4 9 6 5 6 9 4 1 0

2 1 8 7 4 5 6 3 2 9 0

3 1 6 1 6 5 6 1 6 1 0

4 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

5 1 4 9 6 5 6 9 4 1 0

6 1 8 7 4 5 6 3 2 9 0

7 1 6 1 6 5 6 1 6 1 0

8 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

9 1 4 9 6 5 6 9 4 1 0

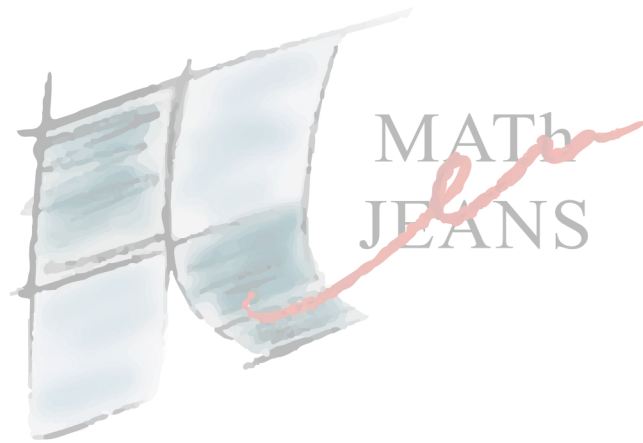
TABLE DES

◇ MATH.en.JEANS, 30 ans déjà	P.04
◇ L'atelier, lieu de vie de MATH.en.JEANS	P.06
◇ <i>L'écrit et la méthode</i> , Une introduction aux articles d'élèves dans les ateliers MATH.en.JEANS, par Pierre Duchet. Article paru dans le "Bulletin vert" n°507 de l'APMEP - Janvier Février 2014	P.08
◇ 1990 <i>L'infini</i> , Paris & Argenteuil, lycée (extrait du "livre")	P.11
◇ 1991 <i>L'algorithme de Kaprekar</i> , Colmar, lycée	P.13
◇ 1992 <i>Brachistochrone : le chemin le plus court est-il toujours le plus rapide ?</i> , Noisy le Grand, collège	P.17
◇ 1993 <i>Les brenoms</i> , St Brice & Montmorency, collège	P.23
◇ 1994 <i>Équation de Pell-Fermat</i> , Argenteuil, lycée	P.33
◇ 1995 <i>La suite de Conway</i> , Aix-Marseille, université	P.45
◇ 1996 <i>Systèmes balançaires</i> , Nanterre, collège & primaire	P.53
◇ 1997 <i>Problème de Syracuse</i> , Bordeaux, lycée	P.65
◇ 1998 <i>Communiquer dans une grille</i> , St Brice, collège	P.67
◇ 1999 <i>Les crêpes</i> , La Mure, lycée	P.77
◇ 2000 <i>Le problème des interrupteurs</i> , Mérignac & Lormont, lycée	P.89
◇ 2001 <i>Colliers de perles</i> , Cluses & Paris, lycée	P.95
◇ 2002 <i>Les plus courts chemins sur le cube</i> , Briançon, lycée	P.105
◇ 2003 <i>Découpage de la France</i> , Cergy, collège	P.109
◇ 2004 <i>Le labyrinthe</i> , Argenteuil, lycée	P.113
◇ 2005 <i>La stratégie des allumettes</i> , Mérignac & Pessac, lycée	P.117
◇ 2006 <i>Jeu de miroirs</i> , Bordeaux, lycée	P.129

MATIÈRES

◇ 2007 <i>Ça roule à Saint-Orens</i> , Saint-Orens, lycée	P.139
◇ 2008 <i>Tout noir, tout blanc</i> , Gières, collège	P.147
◇ 2009 <i>La géométrie du tas de sable</i> , Le Mans & La Flèche, collège	P.151
◇ 2010 <i>Les carrelages</i> , Bondy, collège	P.175
◇ 2011 <i>Les carrés magiques</i> , La Tremblade, collège	P.179
◇ 2012 <i>La géolocalisation</i> , Auray, lycée	P.185
◇ 2012 <i>Drôles de touches</i> , Fameck, lycée	P.205
◇ 2013 <i>Calculer à la règle non graduée et au compas</i> , Nancy, collège	P.213
◇ 2013 <i>De l'aire!</i> , Le Port & Saint-Denis de La Réunion, lycée	P.225
◇ 2014 <i>Figures isoaires</i> , Bressuire, lycée	P.233
◇ 2014 <i>Modélisation de croissance d'un arbre</i> , Cluj & Briançon, lycée	P.255
◇ 2015 <i>Le berger et ses moutons</i> , Toulouse, lycée	P.269
◇ 2015 <i>Découpage de polygones de même aire</i> , Nancy, collège	P.277
◇ 2016 <i>Les robots reproducteurs</i> , Petit-Lancy & Thonon-les-Bains, lycée	P.283
◇ 2016 <i>Du café ou du chocolat ?</i> , Villers-lès-Nancy, collège	P.295
◇ 2017 <i>Une crêpe très fragile...</i> , Paris, lycée	P.307
◇ 2017 <i>Une drôle de salle de bains</i> , Orsay, collège	P.319
◇ 2018 <i>Impossible ? Mon œil!</i> , Orthez, collège	P.327
◇ 2018 <i>We get 2017</i> , Perpignan & Buzau, lycée	P.335





j'ai fait un rêve

*où la mathématique
bleue comme une pomme
se croquait au lavoir ...*

et où, au delà du miroir, alicie grandissait

*j'ai rêvé de pages bleues
où le trait du sens
invitait au parcours ...*

j'y ai vu cavaliers blancs aux cent mille classes bleues

*l'école respirer la recherche
et la force que serait
la liberté de faire ...*

les bastilles du savoir pourraient alors se prendre

*imagine que ce recueil
riche d'aventures bleues
devienne déjà mappemonde ...*

d'audacieux explorateurs pour d'autres manières d'apprendre

Pierre Duchet