MATh.en.JEANS

Lycée Français Charles Lepierre, Lisbonne, 2013/14

problèmes proposés par
Filipe Oliveira,
docteur *es sciences* de l'Université Paris-Sud
enseignant-chercheur au Département de Mathématiques de l'Université Nova de Lisbonne

<u>Problème 1 – Somme de puissances</u>

Il est bien connu que, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2 + \cdots + N = N \times \frac{N+1}{2}.$$

Trouver une formule pour calculer $1^2 + 2^2 + \cdots + N^2$ et $1^3 + 2^3 + \cdots + N^3$.

En particulier, vérifier la très curieuse formule

$$(1 + 2 + \cdots + N)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + N^3,$$

qui est vraie pour tout entier N.

Plus généralement, comment pourrait-on s'y prendre pour calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la somme

$$1^k + 2^k + \cdots + N^k \quad ?$$

Problème 2 – Frises et isométries

1 unité

Ces deux tapisseries présentent des motifs géométriques. On supposera que ces motifs continuent indéfiniment vers la gauche et vers la droite.

La première tapisserie reste inchangée si l'on décale le dessin vers la gauche ou vers la droite d'une unité (on dit que l'on fait une translation d'un certain vecteur $\vec{u}$). Pour cette raison, on nomme la première tapisserie « un frise ».

La deuxième tapisserie est aussi un frise, mais elle possède par ailleurs une symétrie de réflexion par rapport à la droite horizontale qui passe par le centre de la tapisserie. Elle possède ainsi plus de symétries que la première.

Pouvez-vous décrire toutes les symétries supplémentaires possibles d'un frise et les utiliser pour classer tous les types de frises que l'on peut construire?

Problème 3 – Décomposition des nombres en somme de deux carrés

Pierre de Fermat

Les nombres 13 et 74, par exemple, peuvent s'écrire comme somme de deux carrés:

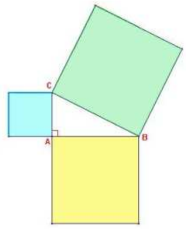
$13 = 2^2 + 3^2$ et $74 = 5^2 + 7^2$.

D'un autre côté, $13 \times 74 = 962 = 31^2 + 1^2$. Est-t-il vrai que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés peut également se décomposer sous cette forme?

Quels sont les nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés?

Proposer un critère et une méthode pratique pour décomposer les nombres le vérifiant.

Problème 4 – Triangles rectangles de côtés entiers



Le triangle $[ABC]$ de côtés $AB = 3$, $BC = 4$ et $AC = 5$ est bien sûr rectangle en B. Il suffit de constater que $3^2 + 4^2 = 5^2$ et d'évoquer la réciproque du Théorème de Pythagore.

Un autre fameux triangle rectangle de côtés entiers est le triangle de côtés mesurant 60, 80 et 100. Il est souvent utilisé pour vérifier si l'angle entre deux murs est droit. Il suffit de marquer, au sol:

- un point A sur l'un des murs à une distance de 60 cm de l'angle;
- un point B sur l'autre mur à une distance de 80 cm de l'angle.

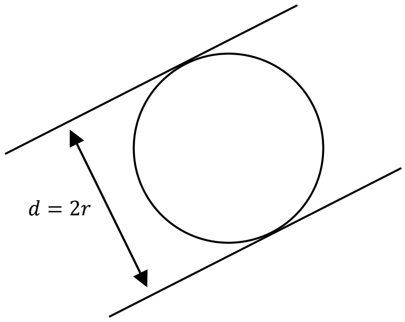
Si la distance AB est de un mètre, l'angle est droit.

Pouvez-vous décrire tous les triangles rectangles de côtés entiers?

Le théorème de Fermat dit que, lorsque $n \geq 3$, ils n'existent pas d'entiers x, y et z non nuls tels que $x^n + y^n = z^n$. Ce problème, formulé au 16ème siècle, a été résolu dans toute sa généralité par l'anglais Andrew Wiles en 1994.

Pouvez-vous utiliser vos recherches sur les triangles rectangles de côtés entiers pour résoudre le problème de Fermat dans le cas $n = 4$?

<u>Problème 5 – Des roues de vélo non circulaires?</u>



La fente d'un distributeur comporte deux parois à une distance d l'une de l'autre. Une pièce de monnaie circulaire, de diamètre d, glisse donc parfaitement entre les deux, en les touchant simultanément, indépendamment de la façon dont elle a été introduite.

Existent-ils d'autres figures ayant cette propriété? Comment les construire? Est-il envisageable, en suivant ce principe, de construire des roues de vélo non circulaires?

Problème 6 – La constante d' Euler

On considère la suite des sommes partielles de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$:

$$S_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}.$$

Justifier que $\lim_{n\to\infty} S_N = +\infty$. Nous avons $S_1 = 1$. Existe-t-il $N > 1$ tel que $S_N \in \mathbb{N}$?

En remplaçant $u_n = \frac{1}{n}$ par $v_n = \frac{1}{n^a}$, $a > 0$, quelle est la valeur de $\lim_{n\to\infty} S_N$?

Pouvez-vous montrer que la suite de terme général

$$w_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln(N)$$

a une limite finie?

Cette limite s'appelle la constante d'Euler et est souvent notée γ.

Pouvez-vous calculer γ avec une précision de 10^{-7} ?

Problème 7 – Fonctions arithmétiques et nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre qui est égal à la somme de ses diviseurs propres.

Par exemple, $6 = 1 + 2 + 3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Le but de ce problème est de trouver une méthode permettant de construire de tels nombres. On pourra utiliser un ordinateur pour trouver d'autres nombres parfaits et essayer d'établir une conjecture quant à leur forme générale.

Autour de ce problème: il serait intéressant de commencer par trouver une “formule générale” permettant de calculer la valeur des fonctions définies sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\tau(n) = nombre\ de\ diviseurs\ de\ n.$$

$$\sigma(n) = somme\ des\ diviseurs\ de\ n.$$

Problème 8 – Suite de Fibonacci et autres suites linéaires d'ordre 2.

Un couple de lapins produit chaque mois un nouveau couple. Ce nouveau couple, après avoir grandi pendant un mois, produira lui aussi un nouveau couple par mois. Le but se ce problème est de déterminer, en partant d'un couple de lapins, combien de couples de lapins existeront au bout de cinq ans.

Ce problème nous amènera à étudier la suite de Fibonacci, définie par ses deux premiers termes ($u_1 = u_2 = 1$) et la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

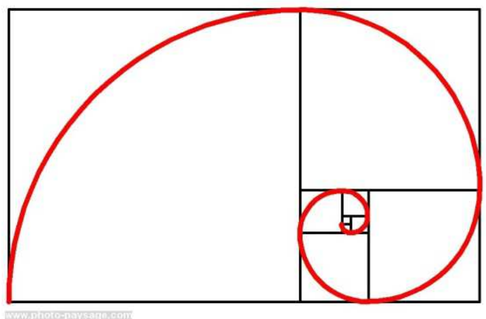
Pouvez-vous montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge.

Fournir une expression pour le terme général u_n de cette suite.

Proposer une méthode générale pour calculer le terme général d'une suite qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où a et b sont des nombres réels et où u_1 et u_2 sont donnés.

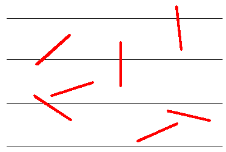
Le nombre φ, limite de la suite de terme général v_n est souvent appelé le «nombre d'or». Un rectangle de dimensions $a, b \in \mathbb{R}^+$ se dit un «rectangle d'or» si $\frac{a}{b} = \varphi$.

Proposer une construction géométrique d'un rectangle d'or et montrer que l'on peut décomposer un rectangle d'or en un carré et un nouveau rectangle d'or.



Problème 9 – L’aiguille et le plancher

On lance une aiguille de longueur a sur un sol formé de planches parallèles de même largeur $b > a$. Avec quelle probabilité l’aiguille restera-t-elle sur une seule planche?



On pourra envisager une approche théorique et une approche expérimentale de ce problème (réelle ou sur machine) que l’on essayera de concilier.

On pourra également essayer d’étudier la situation de certaines aiguilles courbes.

Problème 10 – Les carrés magiques

Un carré magique d'ordre $n \in \mathbb{N}$ est un carré divisé en n^2 petits carrés, chacun portant un nombre, tel que las somme des nombres inscrits sur chacune des lignes, chacune des colonnes et sur les deux diagonales est identique.

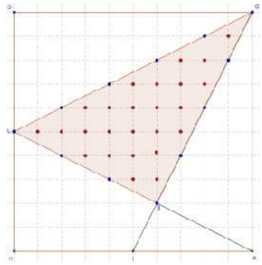
Pouvez-vous présenter une méthode générale pour construire des carrés magiques, en imposant par exemple des nombres donnés sur certaines positions?

?	30	01	?
?	?	?	?
?	?	?	?
?	10	10	?

Certains carrés magiques d'ordre n portent exactement les n^2 premiers nombres. Pouvez-vous proposer la construction de quelques uns?

Problème 11 – Théorème de Pick et aire des polygones réguliers

Dans le plan muni d'un repère cartésien on considère un polygone P dont tous les sommets ont des coordonnées entières.



Soit a le nombre de points de coordonnées entières à l'intérieur de P et b le nombre de points de coordonnées entières appartenant à la frontière de P.

Calculer l'aire de P en fonction de a et b.

Pouvez-vous construire un triangle équilatéral tel que ses trois sommets aient des coordonnées entières?

Quels polygones réguliers peut-on construire tels que tous les sommets aient des coordonnées entières?

Problème 12 – Critères de divisibilité

Voici quelques critères de divisibilité:

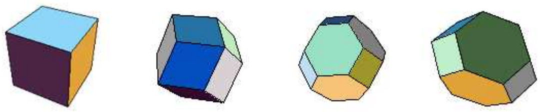
Le nombre $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ ($a_i \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$) est divisible par

est divisible par	si et seulement si
2	$a_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.
3	$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ est divisible par 3.
4	$a_1 a_0$ est divisible par 4.
5	$a_0 \in \{0; 5\}$.
7	$a_n a_{n-1} \dots a_1 - 2a_0$ est divisible par 7.
8	$a_2 a_1 a_0$ est divisible par 8.
9	$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ est divisible par 9.

Pouvez-vous justifier ces critères, et trouver des critères de divisibilité par d'autres nombres? (Par 37, par 101, etc…par exemple)

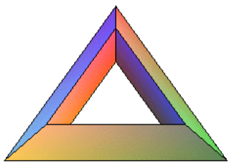
Problème 13 – Caractéristique d’Euler

Observer plusieurs polyèdres convexes (prismes, pyramides,…etc) et compter le nombre de faces, de sommets et d’arêtes. Il y a t’il une relation entre ses trois valeurs?



Que dire du cas des polyèdres non convexes ?

Que dire du cas des “polyèdres à trous”? Cette relation reste valable? Est-ce qu’une autre relation apparait?



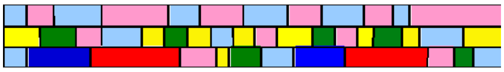
Problème 14 – Coloriage de cartes

Dans une carte:

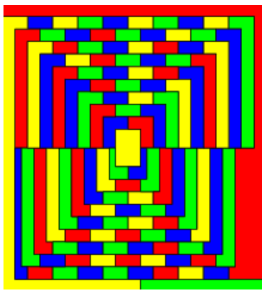
- tous les pays sont constitués d'un seul bloc;
- deux pays sont voisins s'ils ont en commun une ligne (un point ne suffit pas);

On souhaite colorier des cartes, en sachant que deux pays voisins doivent être coloriés avec des couleurs différentes.

On pourra commencer par faire des essais avec des "murs de briques",

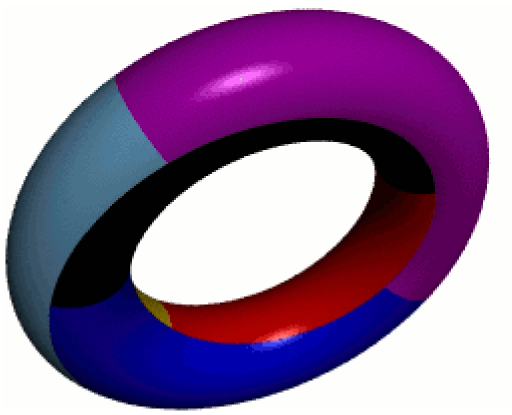


et puis considérer des cartes plus compliquées.



Quelle est le nombre de couleurs minimum qui semble être nécessaire?

Que dire d'autres types de cartes, comme par exemple les cartes en forme de tore (donuts)?



Colorier un tore ne semble pas très pratique pour effectuer des recherches. Pouvez-vous commencer par proposer une méthode pour représenter sur une feuille de papier des donuts à colorier ?