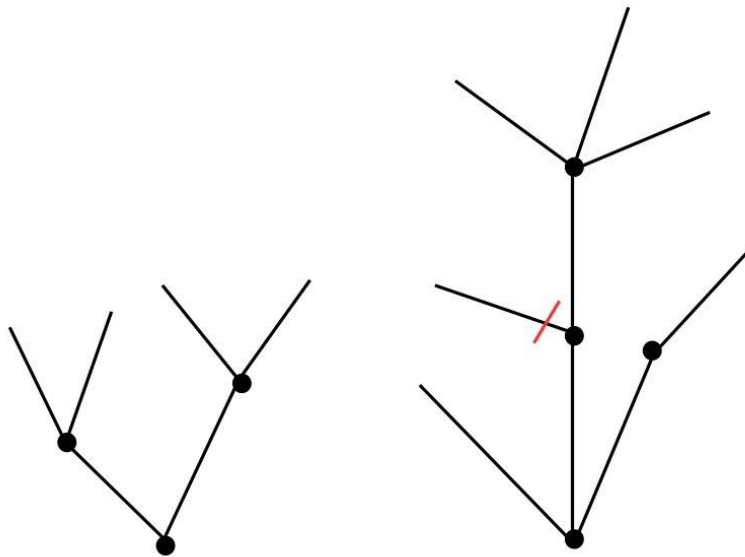


Le jeu des jardiniers

Deux jardiniers doivent débroussailler un terrain où ont poussé quelques arbustes. Pour se distraire ils ont inventé un jeu : chacun à tour de rôle coupe une branche, et celui qui coupera la dernière aura gagné.

Pourrez-vous déterminer s'il y a une stratégie gagnante pour le premier joueur, ou pour le second, selon la configuration des arbustes ?

Voici un exemple :



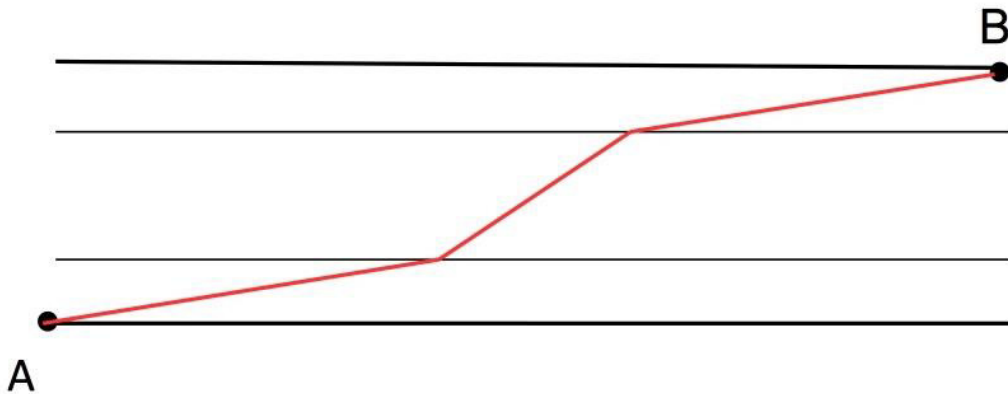
Précisions.

- Un arbuste (mathématique) est composé de branches et de nœuds (le tronc est considéré comme une branche et la racine comme un nœud).
- Une branche ne peut être coupée qu'une fois : chaque branche est coupée juste au-dessus du nœud dont elle est issue.
- Si on coupe une branche, toutes celles qui en sont issues tombent en même temps.
- Et il est possible qu'il reste une seule branche issue d'un nœud, comme à droite sur le dessin.

Traversée prudente

Chloé, partant d'un point A situé au bord d'une route doit se rendre à un point B situé un peu plus loin de l'autre côté de la route. Mais cette route est assez dangereuse et elle veut prendre le moins de risque possible. Elle estime qu'il y a moins de risque près des bords de la route que vers son milieu.

Quel est le meilleur chemin ?



On peut regarder d'abord une situation assez simple comme sur la figure, où les deux bandes latérales ont un coefficient de risque faible et la bande centrale un coefficient plus élevé. On évalue le risque total en multipliant la distance parcourue dans chaque zone par son coefficient de risque et en additionnant pour les différentes zones.

Mais vous pourrez ensuite considérer des situations plus compliquées, avec plus de zones, ou même avec un risque croissant progressivement lorsqu'on s'approche du milieu de la route, puis décroissant progressivement quand on va vers l'autre bord.

La suite de Stern-Brocot

Cette suite, appelée aussi *suite diatomique de Stern*^{*}, est la suite $s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$ de nombres entiers naturels, que l'on construit de proche en proche à partir de $s_0=0, s_1=1$ avec la règle, pour $n \geq 1$:

$$\begin{cases} s_{2n} = s_n \\ s_{2n+1} = s_n + s_{n+1} \end{cases}.$$

Les premiers termes sont 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1... Vous pourrez vérifier qu'on définit bien ainsi toute la suite et trouver un moyen de calculer rapidement le terme s_n .

On peut aussi la construire par lignes successives sous forme de tableau :

1	1							
1	2	1						
1	3	2	3	1				
1	4	3	5	2	5	3	4	1
...	...							

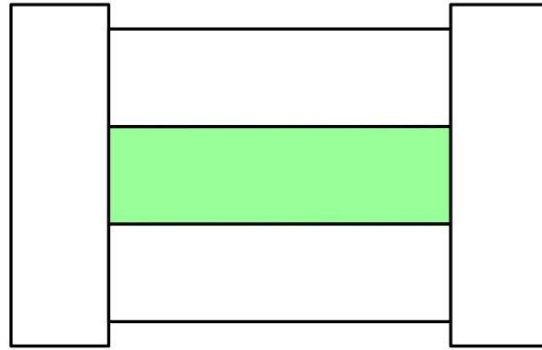
À chaque étape on recopie la ligne précédente en intercalant entre chaque paire de nombres successifs la somme de ces nombres ; la suite s'obtient alors en lisant les lignes l'une après l'autre mais en ne comptant qu'une fois le dernier 1 d'une ligne et le premier de la suivante (et en ajoutant le 0 au début).

Vous pourrez découvrir de nombreuses propriétés de cette suite. Regardez par exemple celles des paires de termes consécutifs (s_n, s_{n+1}) et des fractions s_n/s_{n+1} .

^{*} Moritz Stern est un mathématicien allemand du XIX^e siècle ; Achille Brocot était un horloger qui s'est intéressé aux mathématiques et en particulier aux fractions pour la réalisation de ses rouages.

Nombre de couronne et nombre H

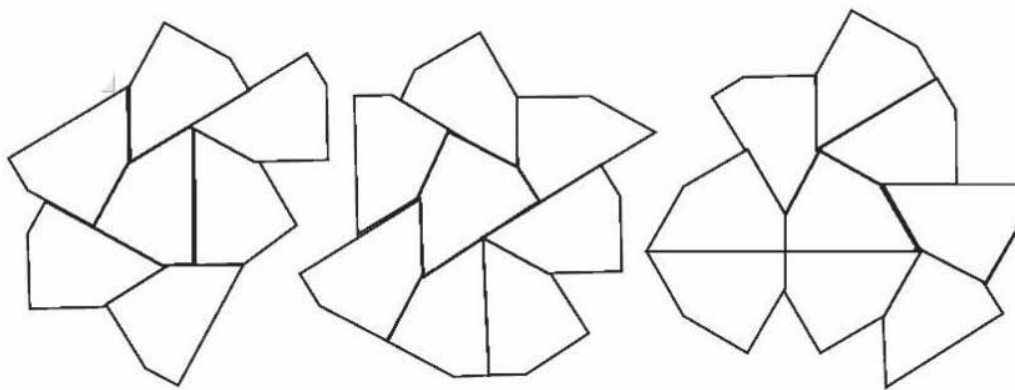
Deux problèmes de pavages incomplets.



Sur cette figure, le rectangle vert est complètement entouré par quatre copies de lui-même, sans chevauchement ni vide. Il semble clair qu'on ne peut pas l'entourer par moins de copies de lui-même. On dira que son *nombre de couronne* est 4.

Problème : peut-on trouver des figures d'une seule pièce admettant un nombre de couronne donné ; y-a-t-il des nombres pour lesquels c'est impossible ?

Un problème proche est le suivant :



Dans chacune de ces 3 figures, le pentagone au centre est entouré de 7 ou 8 copies de lui-même (éventuellement retournées) qui forment une première couronne. Mais on ne peut pas continuer le pavage avec une deuxième couronne de copies du pentagone, et on peut montrer qu'il n'y a pas d'autre façon de l'entourer qui permettrait de disposer une deuxième couronne. Nous dirons que son *nombre H* est 1.

Le nombre H d'une figure est égal à n si on peut l'entourer de n couronnes composées de copies d'elle-même, mais qu'on ne peut pas le faire pour $n+1$ couronnes.

Pouvez-vous trouver des figures avec un nombre H égal à 2, 3, 4, 5, ou plus ?